

- 国家自然科学基金
- 国家数学天元基金
- 湖南省自然科学基金
- 湖南师范大学出版基金

资助



Yang Xiang Qun Lin Ying Qiu

# MARKOV PROCESSES WITH TWO PARAMETERS

Markov Processes with Two Parameters

# 两参数 马尔可夫过程论

● 杨向群 李应求著  
湖南科学技术出版社



Yang Xiang Qun Lin Ying Qiu  
Markov Processes with Two Parameters

# 两参数 马尔可夫过程论

●杨向群 李应求著  
湖南科学技术出版社

0211.62/11.

1731407.

## 两参数马尔科夫过程论

编 著：杨向群

责任编辑：胡海清

出版发行：湖南科学技术出版社

社 址：长沙市展览馆路3号

印 刷：湖南省新华印刷二厂

厂 址：邵阳市双坡岭

邮 编：422001

(印装质量问题请直接与本厂联系)

经 销：湖南省新华书店

出版日期：1996年6月第1版第1次

开 本：850×1168毫米 1/32

印 张：11.25

插 页：1

字 数：288,000

印 数：1—700

征订期号：科目 2383—310

书 号：ISBN 7—5357—1889—2/O·148

定 价：40.00元

(版权所有·翻印必究)



国家自然科学基金、国家数  
学天元基金、湖南省自然科学基  
金资助项目

湖南师范大学出版基金资助  
出版

# 序

---

## PREFACE

马尔可夫过程最初由俄国数学家马尔可夫 (A. A. Марков, 1856—1922) 所研究, 至今已发展成为概率论中最富于理论意义和应用价值的重要分支. 它与泛函分析、微分方程、微分几何、理论物理等学科密切相关, 用到这些学科中的许多结果; 反过来, 它又从方法上、解释上丰富了这些学科. 从应用方面看, 许多具体的马尔可夫过程如布朗运动、Poisson 过程、扩散过程都来源于物理等自然科学和工程技术, 因而马尔可夫过程的一般理论在这些学科以及后来兴起的诸如系统论、自组织理论、数理经济学等中得到不少应用, 就不会使人感到意外了.

尽管马尔可夫过程论的内容非常丰富, 而且还在蓬勃发展之中, 但至今主要还只研究自变量为单参数的情形, 直观上可把此参数看成时间. 但在许多问题中需要考虑多个参数, 例如, 水文或气象中除时间外, 要考虑地点, 即经度、纬度和高度, 这便要 用 4 个参数来描述. 从单参数过程到多参数过程, 理论上也是很自然的, 这正如同从一元函数发展到多元函数一样. 众所周知, 多元函数论比一元函数论困难得多; 过程论也如此. 这里, 不仅是由于一些结果推广到多参数时往往会遇到本质性的困难, 还因为多参数情况下会出现许多新的问题, 需要新概念和新方法, 而这正是多参数理论的精华所在.

就我们所知, 迄今国内还没有一本系统论述多参数马尔可夫

过程的书；前几年国外出了两三本关于马尔可夫随机场的论著，但内容与本书没有重复。因此，本书是第一部论述两参数马尔可夫过程论的专著（从两参数到多参数较为容易）。本书内容基本上是我国学者（主要是作者们自己）的研究成果，这些成果以前只发表在数学期刊上，这是第一次把它们总结在一本书内，使之逻辑完整、论证严谨，成为前所未有的新的理论体系，自然是很不容易的事。作者们为概率论谱写了新篇章。在多参数马尔可夫过程论的研究领域中，本书达到了国际领先水平。可以预期，本书将为推动马尔可夫过程论的研究起到积极的作用。

**王梓坤**

1994年9月

# 前言

---

## PREFACE

多参数随机过程理论是单参数随机过程理论的自然的发展，正如在数学分析中从一元函数理论发展到多元函数理论一样。多参数随机过程不仅有重要的理论意义，而且有深刻的实际背景和广泛的应用。多参数集一般是半序集，它与通常有全序的单参数集是有本质上的不同的。例如，在单参数马尔可夫性的定义中，对于作为时间参数集的单参数集  $R_+ = [0, \infty)$ ，其“过去”、“现在”、“将来”是很明确的。然而，对于两参数集  $R_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ ，其“过去”、“现在”、“将来”就不好明确了。可以对“过去”、“现在”、“将来”作多种不同的理解，因而产生多种形式的两参数马尔可夫性。又例如，作为研究单参数齐次马尔可夫过程的重要工具，决定过程的压缩算子半群及其无穷小算子，也难以推广到多参数的情形。因此，多参数随机过程决不是单参数随机过程的简单推广，它必须要有自身独特的概念、内容、方法和结果。在多参数随机过程中，以两参数情形最具体、最富于启发性，也最富有代表性。早在 1948 年，法国的 P. Levy 定义了多指标布朗运动。但是，多指标随机过程研究的蓬勃开展，却是 70 年代末以后的事，然而大多侧重于对多参数鞅的研究，对多参数马尔可夫过程，其研究还较少。在我国，王梓坤教授于 1983 年、1984 年相继发表了《二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程》和《两指标马尔可夫过程》，这是两篇开创性的论文。之后，在国内掀起了对多

参数随机过程特别是对多参数马尔可夫过程研究的热潮。为适应这一形势，在国家自然科学基金的资助下，从1986年起，我们组织力量开展“多参数马尔可夫过程”课题的研究。在杨向群教授的主持下，坚持了数年的多参数马尔可夫过程讨论班，重点在两参数马尔可夫过程。在多参数马尔可夫过程的这块荒地上，我们精耕细作地耕耘了十个春秋，取得了一批研究成果。同时，也学习和收集到国内外有关的参考文献和资料。

我们关于多参数马尔可夫过程的研究结果曾在多次学术会议上报告和交流。在同行们的热情肯定、支持和鼓励下，我们经过数年的努力，将这些研究成果进一步扩充、完善，系统整理成一本书，与读者共飨。全书专论两参数马尔可夫过程，计五篇共14章。从基础知识写起，逐步深入，精心编排，形成一个理论体系。各章的内容我们在绪论中作了简单介绍，我们还列出了各章间关系的图，使读者更便于阅读。全书的框架由杨向群设计。除了第1、4章，§5.11，第8、11章的初稿由杨向群执笔外，其余章节的初稿均由李应求执笔。然后，由杨向群统稿、修改和审定，其间，李应求还作了认真的校阅。在这一过程中，有些章节作了较大的修改，甚至是改写。我们感谢国家自然科学基金会和数学天元基金会对我们的研究工作的大力支持。我们感谢中国科学院院士王梓坤老师的帮助和鼓励，是他在国内首先开展并提倡对多参数马尔可夫过程的研究，引导我们在这块荒地上开垦和耕耘。王老师还在百忙中为本书作序，使本书生辉，给我们以极大的鼓舞。我们感谢国内外的同仁们在多参数马氏过程研究中作出的巨大贡献，使本书的内容更为丰富。我们感谢王梓坤、王寿仁、江泽培、胡国定、严士健、钱敏、梁之舜以及D. G. 肯德尔、钟开莱等前辈老师们，他们对作者的学术生涯和研究，给予深刻的影响和启迪。我们感谢马志明、邓永录、甘师信、刘文、刘秀芳、庄兴无、陈木法、陈培德、陈宗洵、严加安、沈世镒、何声武、吴荣、汪家冈、张新生、杨振明、罗首军、周健伟、周晓文、施仁杰、胡迪鹤、侯振挺、郭青峰、钱敏平、龚光鲁、鲍玉芳、赵学雷、戴



永隆、曾繁烈等同志，他们中或者其研究成果收入本书中，或者激励我们撰写本书，或者在各种学术会议上向我们提出宝贵的意见，或者在学术研究中给我们以关心、支持和鼓励。我们感谢曾经参加讨论班的同志们，感谢邹东雅、贺湘民、谢语权、黄长全、郭军义、华仁海、傅平福、周占功、刘韶跃、王桂兰、刘良欣、郭学鹏、向红锋、杨新建、邓迎春、曹显兵等同志，他们对讨论班的贡献以及他们向我们提供的研究成果成为本书的重要内容。我们感谢湖南科学技术出版社，感谢国家自然科学基金委和数学天元基金领导小组、湖南省自然科学基金委、湖南师范大学出版基金委的大力支持，他们对于基础理论的长远的、战略高度的热心，使得本书能够顺利出版。我们希望本书能够起到抛砖引玉的作用。诚恳地欢迎读者对本书的缺点、错误提出批评建议。

**作者于长沙岳麓山**

1995年10月

# 目录

---

## CONTENTS

绪论 .....	( 1 )
第 1 篇 条件独立性和两参数鞅 .....	( 11 )
1 预备知识 .....	( 13 )
§ 1.1 常用记号 .....	( 13 )
§ 1.2 两参数随机过程的基本概念 .....	( 15 )
§ 1.3 单调类和复合函数定理 .....	( 18 )
§ 1.4 单参数马尔可夫链 .....	( 20 )
§ 1.5 条件独立性 .....	( 25 )
2 两参数鞅 .....	( 35 )
§ 2.1 单参数鞅 .....	( 35 )
§ 2.2 各类两参数鞅 .....	( 37 )
§ 2.3 两参数鞅的轨道正则性 .....	( 40 )
§ 2.4 两参数逆鞅 .....	( 48 )
第 2 篇 两参数马尔可夫过程的基本理论 .....	( 53 )
3 各种两参数马尔可夫性 .....	( 55 )
§ 3.1 单点马氏性 .....	( 55 )
§ 3.2 宽过去马氏性 .....	( 56 )
§ 3.3 宽将来马氏性 .....	( 58 )
§ 3.4 $i$ 马氏性 .....	( 58 )
§ 3.5 * 马氏性 .....	( 60 )

§ 3.6	Levy 马氏性 .....	(60)
§ 3.7	等价关系 .....	(61)
§ 3.8	蕴含关系 .....	(64)
§ 3.9	反例 .....	(70)
§ 3.10	强芽马氏性 .....	(72)
§ 3.11	A 过程的马氏性 .....	(76)
§ 3.12	关系图 .....	(78)
4	单点马尔可夫过程 .....	(79)
§ 4.1	单点转移函数族 .....	(79)
§ 4.2	单点马氏过程的单向转移 .....	(82)
§ 4.3	齐次情形和双向随机游动 .....	(83)
5	宽过去马氏过程的一般理论 .....	(85)
§ 5.1	三点转移函数族的定义和例 .....	(85)
§ 5.2	规则的宽过去马氏过程 .....	(87)
§ 5.3	马氏初值的规则宽过去马氏过程 .....	(93)
§ 5.4	宽过去马氏过程的强马氏性 .....	(96)
§ 5.5	化为单参数情形 .....	(101)
§ 5.6	在梯形域上的预测 .....	(105)
§ 5.7	样本函数的有界性 .....	(108)
§ 5.8	样本函数的灯函数性和阶梯性 .....	(110)
§ 5.9	样本函数的连续性 .....	(114)
§ 5.10	样本函数在固定点的连续性 .....	(117)
§ 5.11	在马氏过程上生长马氏过程 .....	(120)

### 第 3 篇 状态可列的两参数三点转移函数族 .....

6	状态可列的三点转移函数族 .....	(135)
§ 6.1	基本概念 .....	(135)
§ 6.2	关系定理 .....	(137)
§ 6.3	可测性和远近极限 .....	(141)
§ 6.4	可测族的表现定理 .....	(145)
§ 6.5	近极限函数的性质 .....	(149)
7	三点转移函数族的标准性和参数对称性 .....	(155)

§ 7.1	标准性和状态偶空间的分解	(155)
§ 7.2	参数对称型的若干结果	(158)
§ 7.3	在坐标轴上的扩充	(167)
§ 7.4	偏导数的存在性和四个偏微分方程组	(168)
<b>第 4 篇 几类重要的两参数马尔可夫过程</b> (171)		
8	两参数随机游动	(173)
§ 8.1	多参数随机游动的定义	(173)
§ 8.2	$RW_2$ 的各种两参数马氏性	(176)
§ 8.3	$RW_2$ 的单点和三点转移函数族	(178)
§ 8.4	$RW_2$ 的常返性	(180)
§ 8.5	$RW_2^d$ 的周期性	(181)
9	两参数独立增量过程: Levy 单	(189)
§ 9.1	Levy 单	(189)
§ 9.2	Levy 单的表现和构造	(190)
§ 9.3	Levy-Ito 轨道分解	(196)
§ 9.4	Levy 单的样本函数	(201)
§ 9.5	Levy 单的 Levy 马氏性	(202)
§ 9.6	Levy 单的局部性质	(206)
§ 9.7	广义 Levy 单及其相关随机过程	(213)
10	两参数随机事件流	(221)
§ 10.1	两参数流	(221)
§ 10.2	两参数平稳流	(221)
§ 10.3	两参数平稳无后效流	(223)
11	Poisson 单和广义 Poisson 单	(230)
§ 11.1	广义 Poisson 单	(230)
§ 11.2	广义 Poisson 单的基本性质	(231)
§ 11.3	Poisson 单的等价定义	(234)
§ 11.4	广义 Poisson 单的截口定理	(237)
§ 11.5	广义 Poisson 单的各种马氏性	(238)
§ 11.6	广义 Poisson 单不存在三点转移函数族	(239)
§ 11.7	广义 Poisson 单的存在定理	(241)

§ 11.8	广义 Poisson 单的第二存在定理 .....	(244)
§ 11.9	Poisson 单的鞅刻划 .....	(244)
§ 11.10	广义 Poisson 单的跳线与轨道 .....	(245)
§ 11.11	广义 Poisson 单样本函数的刻划 .....	(250)
§ 11.12	广义 Poisson 单在射线上的导出过程 .....	(252)
12	Brown 单 .....	(253)
§ 12.1	白噪声与 Brown 单 .....	(253)
§ 12.2	Brown 单的导出过程 .....	(254)
§ 12.3	鞅性与 0—1 律 .....	(255)
§ 12.4	样本函数的连续性 .....	(256)
§ 12.5	强马尔可夫性和反射原理 .....	(260)
§ 12.6	奇点蔓延 .....	(263)
§ 12.7	Levy 马氏性 .....	(266)
§ 12.8	水平曲线 .....	(269)
§ 12.9	广义 Brown 单 .....	(271)
13	两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程 .....	(272)
§ 13.1	定义 .....	(272)
§ 13.2	基本性质 .....	(273)
§ 13.3	各种马氏性 .....	(275)
§ 13.4	在射线上的导出过程 .....	(277)
§ 13.5	奇点蔓延 .....	(281)
§ 13.6	转移概率及预测 .....	(286)
<b>第 5 篇</b>	<b>马尔可夫型两参数随机微分方程 .....</b>	<b>(293)</b>
14	作为随机微分方程解的两参数马氏过程 .....	(295)
§ 14.1	马氏型两参数随机微分方程 .....	(295)
§ 14.2	记号和 Yeh 定理 .....	(295)
§ 14.3	马氏型方程的解 .....	(297)
§ 14.4	马氏型方程解的各种马氏性 .....	(302)
§ 14.5	较强条件下马氏型方程的解及其估计 .....	(307)
§ 14.6	较强条件下马氏型方程解的宽过去强马氏性 .....	(311)

注释 .....	(315)
参考文献 .....	(317)
索引 .....	(337)

# 绪 论

---

MARKOV PROCESSES  
WITH TWO PARAMETERS





在自然界和人类社会中，普遍地存在着两类客观现象：必然现象和随机现象。必然现象是在一定条件下必然会发生的客观现象，其结果能预先确定。例如，在标准大气压下，纯水加热到  $100^{\circ}\text{C}$  必然沸腾；在恒力作用下，质点作等加速运动。而随机现象是这样的客观现象，在一定的条件下，人们不能预先确定出现的结果，只能说出现多种可能结果中的一种。例如，某公路桥每天通过的汽车数目，它是非负整数集中的一个数；在相同工艺条件下生产出来的灯泡的使用寿命，它是非负实数集中的一个数。虽然，单个的随机现象其结果具有一定的偶然性，但大量的随机现象却蕴含着必然的客观规律。例如，掷一枚均匀的硬币，在一次投掷中，人们不能事先确定必然出现正面，但随着投掷次数的增加，人们会发现，出现正面的频率（出现正面的次数与总投掷次数之比）逐渐稳定于  $\frac{1}{2}$ 。概率论就是研究随机现象数量规律的数学分支，其任务在于从数量上揭示大量可重复的随机现象中的必然规律。

概率论有着悠久的历史，但遗憾的是，它的起源却与赌博有关。早在 16 世纪，意大利的一些学者就开始研究掷骰子等赌博中