

高等师范专科学校通用教材

数学分析

上册

中南五省(区)师专《数学分析》教材编写组

广西师范大学出版社

高等师范专科学校通用教材

数学分析

上册

中南五省（区）师专《数学分析》教材编写组

广西师范大学出版社

数 学 分 析

上册

中南五省（区）师专《数学分析》教材编写组



广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市育才路3号）

广西灵川县印刷厂印刷

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张12.0625 字数261千字

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

印数：00001—10000

ISBN7—5633—0238—7/G · 212

定价：2.85元

前 言

教材建设是学校三大基本建设之一. 长期以来, 高等师范专科教育没有一套具有自己特点、较为系统的教材, 影响了教育质量的提高. 为了深化高等师范专科教育的改革, 为普及九年制义务教育培养更多的合格教师, 中南五省(区)教委(高教局)高教(教学)处, 共同组织五省(区)师专及部分高校的教师, 协作编写了师专 12 个专业 85 门主干课程的通用教材.

编写这套教材的指导思想是, 从高等师范专科教育人材培养的目标出发, 根据国家教委新制定的二年制师专教学计划, 教学大纲的要求, 兼顾三年制和双科制专业的需要, 力求突出适用性, 科学性及高等师范专科教育的特点. 因此, 这套教材, 不仅适用于普通高等师范专科教育, 而且也适用于教育学院和电大普通师范教育相关专业的教学, 同时, 还可作在职初中教师的培训和自修教材.

数学分析是数学专业的主要课程. 我们在编写中, 注意吸取现有各种教程中之所长, 还特别注意从我地区实际出发, 除了加强基本理论的叙述, 力求在培养学生分析问题和解决问题的能力方面使教材起更好的作用. 在教材安排方面, 尽可能照顾学生的可接受性. 同时还尽可能吸收新的成果(如极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 存在性证明). 习题配备上也考虑各种类型. 考虑到各校情况不同, 教材及习题中打有“*”号的是供选用的内容. 本书主编单位是广西右江民族师专, 副主编单位是广东深圳师专、湖南娄底师专、湖北孝感师专、河南商丘师专. 参加本

书编写的人员及分工如下：广东深圳师专林碧玉（第九、十八章），广东佛山师专李家森（第五、十七章），广西右江民族师专顾映高（第四、第十五章），广西河池师专葛克阳（第二、十四章），湖南零陵师专黄裕民（第八、十六章），娄底师专谢伦乾（第七、十一章），湖北孝感师专罗元（第一、十三章），湖北鄂西大学吴运恢（第六、十章），河南商丘师专朱宇光（第十九、二十章），河南洛阳师专黄云昭（第三、十二章），本书由广西师范大学郑步南副教授，余鑫晖副教授，罗桂烈副教授主审，提出了许多宝贵意见，我们谨表示深切的感谢。

这套教材是按主编负责，分工编写的原则成书的。由于这样大规模有组织地进行教材编写在我们还是第一次，因而错误在所难免，恳请读者批评指正。

中南五省（区）师专协作教材编委会

一九八八年三月

目 录

第一章 函 数

§ 1 实数概述.....	(1)
一 实数的主要特征(1)	
二 绝对值不等式、邻域、空心邻域(2)	
练 习 1.1(4)	
§ 2 函数概念.....	(4)
一 函数的概念(4)	二 基本初等函数(7)
练 习 1.2(12)	
§ 3 几种特殊类型的函数	(14)
一 单调函数(14)	二 奇函数与偶函数(15)
三 周期函数(15)	四 有界函数(17)
练 习 1.3(18)	
§ 4 函数的运算	(20)
一 四则运算(20)	二 反函数(21)
三 复合函数(23)	
练 习 1.4(24)	
习 题 一(25)	

第二章 极 限

§ 1 数列极限的概念	(28)
一 极限思想(28)	
二 数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 的极限(29)	
三 数列极限定义(31)	
练 习 2.1(35)	

§ 2	收敛数列的性质	(36)
	练习 2.2(41)	
§ 3	数列的收敛判别法	(42)
	练习 2.3(48)	
§ 4	函数极限	(49)
一	函数极限概念(49)	二 函数极限的定理(59)
三	函数极限存在的判定(63)	
	练习 2.4(66)	
§ 5	两个重要的极限	(67)
一	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (67)	
二	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (70)	
	练习 2.5(72)	
§ 6	无穷小量与无穷大量	(73)
一	无穷小量(73)	二 无穷大量(74)
三	无穷小量阶的比较(76)	
	练习 2.6(79)	
	习题二(80)	

第三章 函数的连续性

§ 1	函数的连续性概念	(83)
一	函数在一点的连续性(83)	二 间断点及其分类(88)
三	区间上的连续函数(90)	
	练习 3.1(93)	
§ 2	连续函数的性质	(95)
一	连续函数的局部性质(95)	
二	连续函数的运算性质(95)	
三	区间上连续函数的基本性质(98)	
四	一致连续性(100)	

练习 3.2(104)

§ 3 初等函数的连续性..... (106)

练习题 3.3(108)

习题 三(108)

第四章 导数与微分

§ 1 导数概念 (110)

- 一 两个典型问题(110) 二 导数的定义(112)
- 三 单侧导数(116) 四 导数的几何意义(118)
- 五 可导性与连续性的关系(119)

练习 4.1(120)

§ 2 求导法则..... (122)

- 一 导数的四则运算(122) 二 反函数的导数(126)
- 三 复合函数的导数(128)
- 四 基本求导法则与公式(134)
- 五 隐函数求导法(135)
- 六 参数方程表示的函数的求导法(138)

练习 4.2(143)

§ 3 微分..... (146)

- 一 微分概念(146)
- 二 微分与导数的关系(147) 三 微分的几何意义(148)
- 四 微分运算法则(149)

练习 4.3(154)

§ 4 高阶导数与高阶微分..... (155)

- 一 高阶导数(156) 二 莱布尼茨公式(158)
- 三 高阶微分(161)
- 四 其他函数关系的高阶导数(163)

练习 4.4 (166)

习题 四(168)

第五章 中值定理与导数的应用

§ 1	微分学基本定理.....	(172)
一	费尔马定理(172)	二 中值定理(175)
三	例(181)	
	练 习 5.1(183)	
§ 2	洛比达法则.....	(185)
一	$\frac{0}{0}$ 型未定型的极限(185)	
二	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定型的极限(189)	
三	其它未定型的极限(191)	
	练 习 5.2(193)	
§ 3	泰勒公式.....	(194)
一	泰勒定理(194)	
二	几个常用函数的麦克劳林公式(199)	
三	函数的近似计算(200)	
	练 习 5.3(202)	
§ 4	函数的单调性与极值.....	(202)
一	函数单调性的判别法(202)	二 极值的判别法(206)
三	最大值与最小值的求法(209)	
	练 习 5.4(213)	
§ 5	函数图象的讨论.....	(214)
一	曲线的凹凸性与拐点(214)	
二	曲线的渐近线(216)	三 函数图象的讨论(219)
	练 习 5.5(223)	
§ 6	方程的近似解	(224)
	练 习 5.6(227)	
	习 题 五(227)	

第六章 实数基本定理

- § 1 实数基本定理 (229)
- 一 闭区间套定理(229) 二 确界存在定理(231)
 - 三 柯西收敛准则(234) 四 有限复盖定理(236)
 - 五 聚点定理(227)
 - 六 收敛子列存在定理(238)
- § 2 闭区间上连续函数基本性质定理的证明 (238)
- 习 题 六(244)

第七章 不定积分

- § 1 不定积分的概念及运算法则 (246)
- 一 原函数与不定积分的定义(246)
 - 二 不定积分的基本公式(248)
 - 三 不定积分的运算法则(250)
- 练 习 7.1(252)
- § 2 不定积分的计算 (253)
- 一 换元积分法(253) 二 分部积分法(261)
- 练 习 7.2(266)
- § 3 有理函数和可化为有理函数的积分 (268)
- 一 有理函数积分法(268)
 - 二 三角函数有理式 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 型的积分(274)
 - 三 形如 $\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ 的积分(277)
 - 四 形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 的积分(278)
- 练 习 7.3(281)
- 习 题 七(282)

第八章 定积分

§ 1 定积分的概念.....	(284)
一 问题的提出(284)	
二 定积分的概念(288)	
练习 8.1(291)	
§ 2 定积分的性质.....	(292)
一 可积条件与可积函数类(292)	
二 定积分的基本性质(293)	
练习 8.2(303)	
§ 3 定积分的计算.....	(304)
一 微积分学基本定理(304)	
二 换元积分法与分部积分法(308)	
练习 8.3(316)	
§ 4 定积分的近似计算.....	(318)
一 矩形法(318)	
二 梯形法(319)	
三 抛物线法(321)	
练习 8.4(325)	
§ 5 可积条件.....	(326)
一 可积的必要条件(326)	
二 大和与小和(328)	
三 可积的充要条件(331)	
四 可积函数类(334)	
练习 8.5(337)	
习 题 八(338)	

第九章 定积分的应用

§ 1 平面图形的面积、微元法	(340)
一 平面图形的面积(340)	
练习 9.1(345)	
§ 2 已知截面面积函数的立体体积.....	(345)
一 微元法(345)	

二	已知平行截面面积函数的立体体积(346)	
三	旋转体的体积(348)	
	练习 9.2(350)	
§ 3	曲线的弧长、旋转体的侧面积	(350)
一	曲线的弧长(350)	二 旋转体的侧面积(356)
	练习 9.3(359)	
§ 4	定积分在物理上的应用	(359)
一	水压力(359)	
二	平均值(360)	三 平面图形的重心(362)
	练习 9.4(364)	
§ 5	几个简单的一阶微分方程	(364)
一	微分方程(364)	
二	可分离变量的微分方程(366)	
三	一阶线性微分方程(368)	
	练习 9.5(370)	
	习 题 九(370)	

第一章 函 数

在中学里,我们已经学习过函数概念及一些简单函数的性质.

函数是表示事物运动变化规律的重要工具,它是数学分析这门课程的主要研究对象.在这一章里,我们再讨论函数.借以复习中学里学过的函数知识,并对函数有关知识作必要的补充.

§ 1 实数概述

一 实数的主要特性

本课程是在实数范围内研究函数.

实数由有理数与无理数两大类组成.

1. 每一个有理数都可用分数 $\frac{m}{n}$ (m, n 为整数, $n \neq 0$) 表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示.又因为有限十进小数可以用 0 或 9 为循环节的无限十进小数表示,因此任何有理数都能表示为无限十进循环小数.

无限十进不循环小数称为无理数.例如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 π 等是无理数.下列小数也是无理数;

$$a = 1.01001000100001000001\cdots,$$

$$b = 3.12112111211112111112\cdots.$$

2. 每一个实数都可用一列不大于它的不足近似值与一列大于它的过剩近似值所确定,如第1段中的 b ,它介于不足近似值列

3, 3.1, 3.12, 3.121, 3.1211, ...

与过剩近似值列

4, 3.2, 3.13, 3.122, 3.1212, ...

的对应项之间.

3. 实数是有序的,即对任意两个实数 a, b ,必满足下列三个关系之一:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

4. 任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为零)运算后仍得实数,即实数对四则运算是封闭的.

5. 实数全体具有稠密性,即任意两个不相等的实数之间有有理数,也有无理数.

6. 任一实数都对应数轴上唯一的点,反之,数轴上每一点也都唯一地代表一个实数,即全体实数与数轴上的点有一一对应关系.所以,在今后的叙述中,把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”两种说法看作是一样的.

绝对值等概念在中学数学已给出,这里不再重述.

关于实数理论,我们将在第二十章再作较为详细的论述.

二 绝对值不等式、邻域、空心邻域

1. 绝对值不等式:对于任何实数 a, b ,有

$$|a| = |-a| \geq 0, \text{当且仅当 } a = 0 \text{ 时, } |a| = 0 \quad (1)$$

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (2)$$

$$|a| < b \text{ 与 } -b < a < b \text{ 等价} (|a| \leq b \text{ 与 } -b \leq a \leq b \text{ 等价}) \quad (3)$$

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad (4)$$

不等式(4)称为三角不等式,下面我们来证明它,其他三个不等式的证明请读者自己完成.

证 由式(2)有

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

相加后得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

由式(3)知,它等价于

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (5)$$

又由 $|a| = |a + b - b|$ 及(5)式有

$$|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |b|$$

于是

$$|a| - |b| \leq |a + b| \quad (6)$$

在(5)、(6)两式中,把 b 改写成 $-b$,则得

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \quad (7)$$

将(5)、(6)、(7)式合并就得到(4)式.

证毕

2. 邻域、空心邻域

我们在中学已学习了集合及其表示法、闭区间、开区间、半开半闭区间、实数集 $\mathbf{R}$ 等概念,下面介绍一种特殊的开区间.

对于某个正数 δ ,开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 即数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,或称为点 a 的邻域,记为 $U(a, \delta)$ 或简记为 $U(a)$.

$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 即 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域,或点 a 的空心邻域,记为 $U^0(a, \delta)$ 或简记为 $U^0(a)$. 请注意,点 a 的空心邻域不包含点 a .

练 习 1.1

1. 写出无理数

$$\sqrt{3} = 1.732050807 \dots$$

$$\pi = 3.141592653 \dots$$

$$e = 2.7182818284 \dots$$

的有理数不足近似值列与过剩近似值列,使其精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, …….

2. 试述实数 a 的绝对值的定义,试述邻域与空心邻域的不同点.

3. 试证明有理数集对四则运算具有封闭性,而无理数集没有这种封闭性.

4. 证明: $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \geq |a_1| - |a_2 + \dots + a_n|$

5. 证明: $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

(提示: $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = 1 - \frac{1}{1+|a+b|}$)

6. 证明: $||a| - |b|| \leq |a - b|$

§ 2 函数概念

在中学里我们初步学习了函数的概念及一些简单的函数,本节将对函数概念作进一步讨论,并给出一些中学未见到的函数的例子,使我们对函数概念的理解更深层一层.

一 函数的概念

定义 设数集 A, B 非空,如果对于任意一个数 $x \in A$,按照某一确定的对应法则 f ,都有唯一的一个数 $y \in B$ 与之对应,则称 f 是定义在数集 A 上的函数,记为

$$f: A \rightarrow B$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值, 记为 $y = f(x)$. 数集 A 称为函数 f 的定义域, 函数值的全体构成的集合记为 $f(A)$, 称为函数 f 的值域, 即

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$$

x 称为自变量, y 称为因变量.

通常称定义域、对应法则、值域为函数的三要素.

表示函数的方法主要有三种: 解析法, 列表法和图象法.

当函数的对应法则借助于数学式子给出时, 称这种表示函数的方法为解析法.

例如, $y = 2x + \ln x \quad (x > 0)$

$$y = \sin x + 5 \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1)$$

都是解析法表示的函数, 它是我们今后表达函数的主要形式. 若函数 $f: A \rightarrow B$, 可用一张含有自变量 x 的值与函数 $f(x)$ 的对应值的表格来表示, 则称为列表法. 如通常所用的三角函数表、对数表等等, 都是用列表法表达函数的例子. 由图象给出函数的对应法则的方法, 称为图象法. 例如, 气象站的气温自动记录仪, 把一天 24 小时的气温变化在坐标纸上描绘出来, 一天内每一时刻 t , 都能从图上找到相应的气温 T 的数值, 这是用图象法表达函数的例子.

关于函数概念, 有几点值得注意:

1. 根据定义, 函数是指对应法则 f , $y = f(x)$ 是表示函数值; 但为了方便起见, 仍采用中学的习惯用法, 用“ $y = f(x), x \in A$ ”表示“ f 是定义在 A 上的函数”. 如果无需说