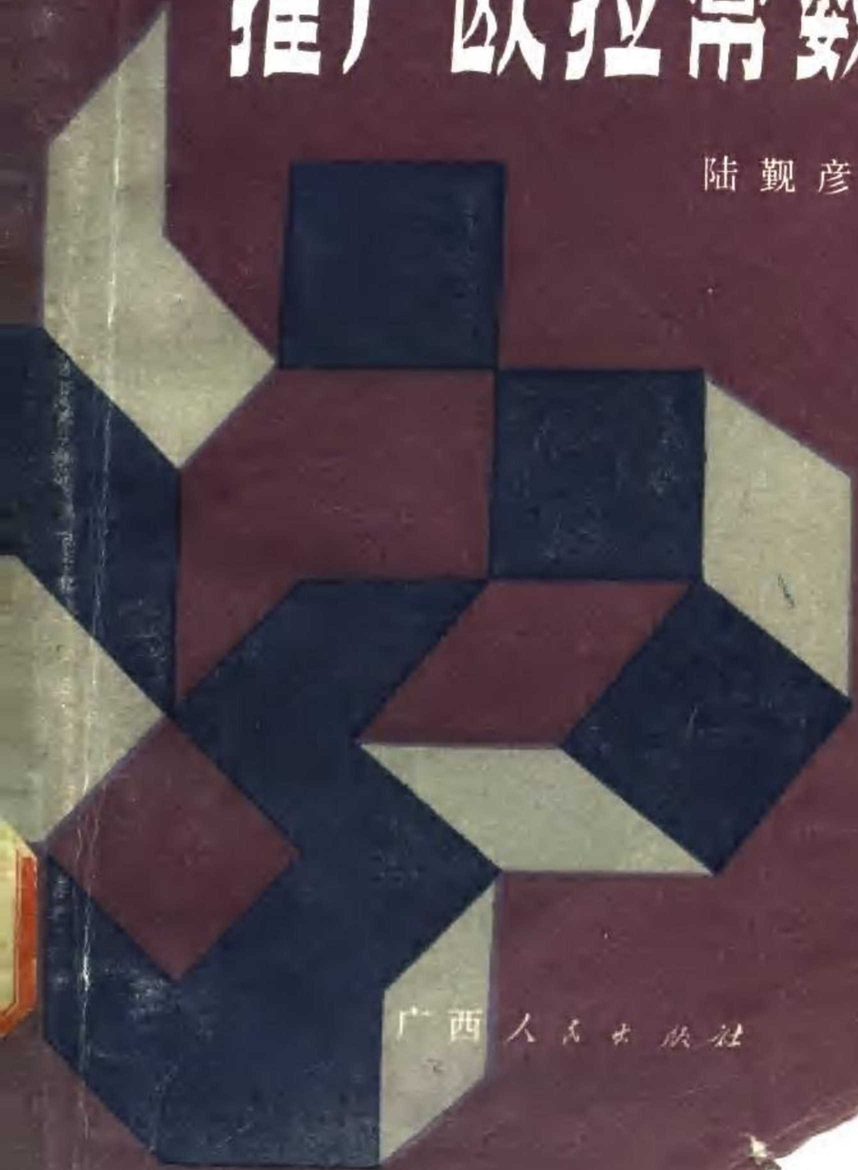
推广欧拉常数

陆觐彦



广西人民出版社

推广欧拉常数

陆覲彦　著

广西人民出版社

内 容 提 要

欧拉常数是数学的一个著名常数。本书将该定义推广，并以此为工具求得一系列无穷级数的和，得到了一些新结果，采用的方法十分简单而又具一般性和启发性。

本书可供从事无穷级数研究的工作者、大专院校理工科及中学师生参考。

推广欧拉常数

陆觐彦 著

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 10.5印张 23千字

1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷

印 数 1—1,600 册

书号：7113·576 定价：1.95元

前　　言

欧拉(Euler)常数是一个著名的常数，其定义如下：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C.$$

这里将把欧拉常数的定义加以推广，给出如下的定义：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}-\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}\right]=C(a,k),$$

其中 a 与 k 都是正整数。当 $a=1$，$k=1$ 时，$C(1,1)$ 就是通常所见的欧拉常数。证明上述的极限存在并不难，在本书的一、中将给出其证明。

从常数 $C(a,k)$ 的定义直接推得一个重要的结果：

$$2C(a,2k)-C(a,k)=A(a,k), \tag{1}$$

其中 $A(a,k)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{k(n-1)+a}$.

公式(1)给出 $C(a,k)$ 与 $A(a,k)$ 之间的关系，使得常数 $C(a,k)$ 的定义可以作为无穷级数求和的有力工具，由此将直接推得一系列的无穷级数之和。所得结果非常之多，这里只提出四组：

(一) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(8n-7)(8n-6)(8n-5)\cdots(8n-1)}$$

$$=\frac{13}{1440}\ln 2-\frac{7}{720\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(8n-7)(8n-6)(8n-5)\cdots(8n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{1280\sqrt{2}}-\frac{\pi}{1920}+\frac{13}{2880}\ln 2$$

$$-\frac{7}{1440\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(8n-7)(8n-6)(8n-5)\cdots(8n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{1280\sqrt{2}}-\frac{\pi}{1920}+\frac{11}{4608}\ln 2$$

$$-\frac{23}{9216\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(8n-7)(8n-6)(8n-5)\cdots(8n-1)}$$

$$=\frac{151\pi}{245760\sqrt{2}}-\frac{33\pi}{81920}+\frac{61}{46080}\ln 2$$

$$-\frac{121}{92160\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(8n-7)(8n-6)(8n-5)\cdots(8n-1)}$$

$$=\frac{11\pi}{24576\sqrt{2}}-\frac{7\pi}{24576}+\frac{283}{368640}\ln 2$$

$$-\frac{2047}{2949120\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(二) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=\frac{1}{9}\ln 2-\frac{1}{16}\ln 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=-\frac{\pi}{18\sqrt{3}}+\frac{5\pi}{144};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{432\sqrt{3}}+\frac{1}{18}\ln 2-\frac{1}{32}\ln 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=-\frac{\pi}{36\sqrt{3}}+\frac{5\pi}{288}-\frac{1}{108}\ln 2+\frac{1}{72\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3});$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{432\sqrt{3}}+\frac{5}{162}\ln 2-\frac{1}{64}\ln 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(6n-5)(6n-4)(6n-3)(6n-2)(6n-1)}$$

$$=-\frac{5\pi}{324\sqrt{3}}+\frac{53\pi}{5184}-\frac{1}{108}\ln 2$$

$$+\frac{1}{72\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3}).$$

(三) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{3}}{5}+\frac{2\pi}{5},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$= -\frac{6}{5}\ln 2 + \frac{4\sqrt{2}}{5}\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{10} + \frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\ln 2 - \frac{3}{10}\ln 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$= -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5}\ln 2 + \frac{2\sqrt{2}}{5}\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$= -\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{5}\ln 2 - \frac{3}{10}\ln 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)}$$

$$= -\frac{\pi}{5\sqrt{3}} + \frac{\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(四) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$= \frac{29\pi}{70\sqrt{3}} - \frac{8\pi}{35},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$= \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{7}\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{16\sqrt{2}}{35}\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$=\frac{87\pi}{420\sqrt{3}}-\frac{4\pi}{35}+\frac{6}{35}\ln 3-\frac{26}{105}\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{15\sqrt{3}}-\frac{2\pi\sqrt{2}}{35}+\frac{\pi}{21}+\frac{1}{5}\ln 2$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{14}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{8\sqrt{2}}{35}\ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$=\frac{67\pi}{504\sqrt{3}}-\frac{\pi}{14}+\frac{6}{35}\ln 3-\frac{26}{105}\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-1)^{n-1}}{(3n-2)(3n-1)(4n-3)(4n-1)(6n-5)(6n-1)}$$

$$=\frac{\pi}{15\sqrt{3}}-\frac{2\pi\sqrt{2}}{35}+\frac{\pi}{21}+\frac{1}{9}\ln 2$$

$$+\frac{13}{84\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{2}}{7}\ln(\sqrt{2}+1).$$

从常数$C(a,k)$的定义还可以推得一系列关于无穷级数的新结果。例如：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn-m+1}+\frac{1}{mn-m+2}+\frac{1}{mn-m+3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{mn-1}-\frac{m-1}{mn}\right)=\ln m, \qquad (2)$$

其中m为正整数，且$m\geqslant 2$；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4m+2)n-4m-1}+\frac{1}{(4m+2)n-4m+1}\right.$$

$$+\frac{1}{(4m+2)n-4m+3}+\cdots+\frac{1}{(4m+2)n-2m-3}$$

$$-\frac{2m}{(4m+2)n-2m-1}+\frac{1}{(4m+2)n-2m+1}$$

$$+\frac{1}{(4m+2)n-2m+3}+\cdots+\frac{1}{(4m+2)n-1}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2m+1), \tag{3}$$

其中m为正整数；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{k(kn+n-k)-1}+\frac{1}{k(kn+n-k+1)-1}$$

$$+\frac{1}{k(kn+n-k+2)-1}+\cdots+\frac{1}{k(kn+n-2)-1}$$

$$-\frac{k}{k(kn+n-1)-1}+\frac{1}{k(kn+n)-1}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{k}\ln(k+1), \tag{4}$$

其中k为正整数，且$k\geqslant 2$；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{k(kn+n-k)-2}+\frac{1}{k(kn+n-k+1)-2}$$

$$+\frac{k}{k(kn+n-k+2)-2}+\cdots+\frac{1}{k(kn+n-3)-2}$$

$$-\frac{1}{k(kn+n-2)-2}+\frac{1}{k(kn+n-1)-2}$$

$$+\frac{1}{k(kn+n)-2}\Bigg]=\frac{1}{k}\ln(k+1), \tag{5}$$

其中k为正整数，且$k\geqslant 3$．

类似（2）——（5）这样的结果可以给出任意多个．

于（2）令$m=2$，即得通常已知的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$$

于(2)令$m=3$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}\right)=\ln 3.$$

于(3)令$m=1$，或者于(4)令$k=2$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{2}{6n-3}+\frac{1}{6n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln 3.$$

由此得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-5)(6n-3)(6n-1)}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{2}{6n-3}+\frac{1}{6n-1}\right)=\frac{1}{16}\ln 3.$$

级数(4)与(5)有相同的和数。于(4)令$k=3$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{12n-10}+\frac{1}{12n-7}-\frac{3}{12n-4}+\frac{1}{12n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2,$$

于(5)令$k=3$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{12n-11}-\frac{3}{12n-8}+\frac{1}{12n-5}+\frac{1}{12n-2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2.$$

求无穷级数之和是一个困难的问题，已经知道的结果不很多，现在从常数$C(a,k)$的定义却推得如此众多的结果，且求和方法十分简单而又具有一般性，据此便足以估量常数$C(a,k)$的价值。

关于常数$C(a,k)$的理论比较简单，思路清楚易明，粗知极限的读者即可看懂，但由此却推得非常之多的结果。这表明一个值得考虑的问题：理论不一定要艰深，但求有效，便是良好的工具。

本书可供中学师生、大专院校理工科学生、从事无穷级数研究的工作者以及广大的数学爱好者参考。

本书的全部内容是作者的研究成果。新的结果不可能完善无缺，错误和不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

陆觐彦

1984年秋于南宁

目　录

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A}{k(An-A)+a}-\frac{B}{k(Bn-B)+b}\right]$ …… (165)

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A}{k(A_1n-A_1)+a}-\frac{B}{k(B_1n-B_1)+b}+\frac{D}{k(D_1n-D_1)+d}\right]$$ …………………… (221)

8. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A}{k(A_1n-A_1)+a}-\frac{B}{k(B_1n-B_1)+b}+\frac{D}{k(D_1n-D_1)+d}-\frac{E}{k(E_1n-E_1)+e}\right]$$ … (257)

四、一般的结果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k(mn-m)+a}+\frac{1}{k(mn-m+1)+a}+\frac{1}{k(mn-m+2)+a}+\cdots+\frac{1}{k(mn-2)+a}-\frac{m-1}{k(mn-1)+a}\right]$$ ………………………… (287)

一、常数$C(a,k)$的定义及其性质

定理1 设a与k都是正整数，则

$$\frac{1}{k}\left[\ln(nk+a)-\ln a\right]<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}$$
$$\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{k}\left[\ln(nk-k+a)-\ln a\right].$$

证明 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$单调递增而趋于$e$，所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e,\quad n\ln\frac{n+1}{n}<1,$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $n=i,\ i+1,\ \cdots i+k-1$，然后各式相加得：

$$\ln(i+k)-\ln i<\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}+\cdots+\frac{1}{i+k-1}\leqslant\frac{k}{i},$$

$$\frac{1}{k}\left[\ln(i+k)-\ln i\right]<\frac{1}{i}.\quad(i=1,2,\cdots)$$

令$i=a,\ k+a,\ 2k+a,\ \cdots k(n-1)+a$，然后各式相加得：

$$\frac{1}{k}\left[\ln(nk+a)-\ln a\right]<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}.$$

数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调递减而趋于$e$，所以

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ 1<(n+1)\ln\frac{n+1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n.\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $n=i,\ i+1,\ \cdots i+k-1$，然后各式相加得

$$\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\cdots+\frac{1}{i+k}<\ln(i+k)-\ln i,$$

$$\frac{1}{i+k}<\frac{1}{k}\Big[\ln(i+k)-\ln i\Big].\ (i=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (*)$$

令 $i=a,\ k+a,\ 2k+a,\ \cdots k(n-2)+a$，然后各式相加得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}<\frac{1}{k}\Big[\ln(nk-k+a)-\ln a\Big].$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{k(i-1)+a}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{k}\Big[\ln(nk-k+a)-\ln a\Big]$.

定理2 设 a 与 k 都是正整数，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}=C(a,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}+\varepsilon_n(a,k),$$

其中 $C(a,k)$ 是常数，当 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n(a,k)\to 0$。

为了方便，记 $H_n(a,k)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{k(i-1)+a}$，则

$$H_n(a,k)=C(a,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}+\varepsilon_n(a,k).$$

证明 于(*)令 $i=nk-k+a$，则有

$$\frac{1}{nk+a}<\frac{1}{k}\ln\frac{nk+a}{nk-k+a}.\ (n=1,2,\cdots)$$

令 $X_n=H_n(a,k)-\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k(n-1)+a}{a}$,

则 $$X_{n+1}=H_{n+1}(a,k)-\frac{1}{k}\ln\frac{nk+a}{a}.$$

于是 $$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{nk+a}-\frac{1}{k}\ln\frac{nk+a}{nk-k+a}<0.$$

$(n=1,2,\cdots)$

根据定理1，有

$$X_n=H_n(a,k)-\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}$$

$$>\frac{1}{k}\ln\frac{nk+a}{nk-k+a}>0.\ (n=1,2,\cdots)$$

已证明数列$\{X_n\}$单调递减而且下方有界，所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}X_n$存在。设$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=C(a,k)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left[H_n(a,k)-\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}\right]$$

$$=C(a,k), \qquad (**)$$

则 $$H_n(a,k)=C(a,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}+\varepsilon_n(a,k),$$

当$n\to\infty$时$\varepsilon_n(a,k)\to 0$。

上述极限$(**)$就是常数$C(a,k)$的定义。

常数$C(a,k)$具有如下的两个性质：

命题1 设m为正整数，则

$$C(ma,mk)=\frac{1}{m}C(a,k).$$

证明 $H_n(ma,mk)=\frac{1}{m}H_n(a,k)$。

根据定理2，有

$$C(ma,mk)+\frac{1}{mk}\ln\frac{mk(n-1)+ma}{ma}+\varepsilon_n(ma,mk)$$

$$=\frac{1}{m}\left[C(a,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}+\varepsilon_n(a,k)\right].$$

于是 $C(ma,mk)+\varepsilon_n(ma,mk)$

$$=\frac{1}{m}C(a,k)+\frac{1}{m}\varepsilon_n(a,k).$$

令 $n\to\infty$并取极限，命题即得证。

命题2 设 b 为正整数，则

$$C(a+bk,k)=C(a,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{a+bk}{a}$$

$$-\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{k+a}+\frac{1}{2k+a}+\cdots+\frac{1}{(b-1)k+a}\right].$$

证明 根据定理2，有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{k+a}+\frac{1}{2k+a}+\cdots+\frac{1}{(b-1)k+a}$$

$$-\left[\frac{1}{kn+a}+\frac{1}{k(n+1)+a}+\cdots+\frac{1}{k(n-1+b)+a}\right]$$

$$=H_n(a,k)-H_n(a+bk,k)$$

$$=C(a,k)-C(a+bk,k)+\frac{1}{k}\ln\frac{nk-k+a}{nk-k+bk+a}$$

$$+\frac{1}{k}\ln\frac{a+bk}{a}+\varepsilon_n(a,k)-\varepsilon_n(a+bk,k).$$

令 $m\to\infty$ 并取极限，命题即得证。

定理3 设A为非负整数，a，b，B，k 都是正整数，且 $b\geqslant 2$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{k(Bn+A)+a}+\frac{1}{k(Bn+B+A)+a}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k(Bn+2B+A)+a}+\cdots+\frac{1}{k(bBn-B+A)+a}\right]$$

$$=\frac{1}{Bk}\ln b.$$