

气体动力学基础

时爱民 苏铭德 编著
刘季稔

科学出版社

气体动力学基础

时爱民 苏铭德 编著
刘季稔

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书是气体动力学的基础性教学参考书,是清华大学获奖教材。内容包括气体运动的基本方程,激波,相似理论,气体的一维运动,定常的亚、跨、超声速流动,气体动力学中的摄动法和数值计算方法。书中介绍了气体运动的基本规律和各种类型流动的特性。本书着重阐述基本概念和各种常用的计算方法。每章之后附有习题。书后附有数据表。

本书可供航空、机械、热能、建筑、气象、力学等专业的高年级大学生、研究生以及有关科技人员参考。

气体动力学基础

时爱民 苏铭德 编著
刘季稔

责任编辑 晏名文

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年 10 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1988 年 10 月第一次印刷 印张: 30 1/2

印数: 0001—3,020 字数: 710,000

ISBN 7-03-000352-7/O·95

定价: 16.00 元

前 言

本书是作者根据多年来(特别是近几年)为力学专业高年级大学生和非力学专业研究生讲授气体动力学的讲义整理、补充和改写而成的。

本书是一本基础性气体动力学教科书。鉴于学习本课程的读者都应具有流体力学和热力学方面的基础知识,因此本书不包括在一般流体力学和热力学中已讲授过的可压缩流的一些最基本现象的物理和数学描述。本书前四章概述气体动力学方程组、激波理论、强间断理论以及一维定常流动。第五章为一维不定常流动。第六章为小扰动相似律。第七、八、九章分别讨论定常的超、亚、跨声速流动。这里的内容是按由易而难的顺序编排的。第十、十一章讨论摄动法和数值计算方法。这是因为这两种方法是现代气体动力学研究的主要手段。由于篇幅的限制,多维不定常流动、有粘性可压缩流动等专门问题均未涉及。

为了加深对内容的理解,每章之后都附有一定数量的习题供读者作自我检查。

本书的第一、二、三、五、七、八、九、十章由时爱民同志编写;第四、六章由刘季稔编写。苏铭德同志为第七、八、九章增补了不少新的内容,编写了第十一章,并最后统一整理全稿。

在本书编写过程中,作者得到卞荫贵、童秉纲教授的热情支持和鼓励。全稿又经清华大学热能系桂杭生、陈佐一副教授细心审阅。他们指出不少缺点和谬误,提出不少建设性意见,使本书避免了不少错误。科学出版社的同志为本书的出版付出了大量的劳动。晏名文同志仔细审阅了本书稿件,描图员同志描绘了全部插图。没有上述同志的辛勤劳动,本书是不能顺利出版的。对此我们表示衷心的感谢。

由于我们水平有限,加上时间紧迫,错误在所难免,诚恳希望读者批评指正。

作者于清华园

1986年6月

目 录

前 言

第一章 气体运动基本方程组	1
§ 1 积分形式的基本方程组	1
§ 2 欧拉微分运动方程组	11
§ 3 Bernoulli 方程	17
§ 4 Kelvin 定理和 Crocco 定理	19
§ 5 势函数和流函数、势函数方程和流函数方程	25
§ 6 声传播方程	32
习题	36
参考文献	37
第二章 强间断面和激波	38
§ 1 激波现象	38
§ 2 强间断条件	39
§ 3 正激波	42
§ 4 斜激波	52
§ 5 激波厚度	61
习题	64
参考文献	66
第三章 量纲理论基础和相似律	67
§ 1 相似概念	67
§ 2 量纲理论基础	78
§ 3 π 定理的应用	86
习题	96
参考文献	97
第四章 气体一维定常流动	98
§ 1 气体一维定常运动基本方程组	98
§ 2 气体的一维定常等熵流动	105
§ 3 喷管流动	117
§ 4 等截面有摩擦一维定常流动	126
§ 5 等截面无摩擦加热(或冷却)一维定常流动	145
习题	153
第五章 气体的一维不定常运动	158
§ 1 活塞运动	158
§ 2 有限强度弱波法	168

§ 3 理想激波管	171
§ 4 平面爆震波的传播	175
§ 5 气体一维不定常运动基本方程组及自模拟解	177
§ 6 强爆炸	179
§ 7 活塞驱动的气体一维不定常运动	183
§ 8 特征线与特征相容方程	186
§ 9 平面波均熵运动的特征线法	190
§ 10 柱面波和球面波的均熵运动及平面波的非均熵运动	195
§ 11 作为弱间断的特征线	197
习题	198
参考文献	200
第六章 气体二维定常运动的小扰动相似理论	201
§ 1 小扰动概念	201
§ 2 基本方程组和边界条件的简化	202
§ 3 亚声速绕薄翼剖面定常流动的 Prandtl-Glauert 相似律	207
§ 4 Ackeret 相似律, 薄翼剖面超声速定常绕流	215
§ 5 薄翼剖面高超声速绕流的钱学森相似律	222
习题	228
参考文献	230
第七章 气体超声速定常运动	231
§ 1 Prandtl-Meyer 流动	231
§ 2 有限强度弱波及其性质	236
§ 3 有限强度弱波法	241
§ 4 气体超声速平面定常运动的特征线及特征相容方程	247
§ 5 平面无旋运动, Riemann 不变量	251
§ 6 喷管计算的 Atkin 法	256
§ 7 气体平面定常超声速流动特征线法四种问题的提法	258
§ 8 轴对称无旋流动和平面有旋流动的特征线法	260
§ 9 圆锥超声速定常绕流的性质——锥型流	262
§ 10 Taylor-Maccoll 数值解	264
§ 11 细长锥超声速定常绕流	270
§ 12 三维定常超声速流动的特征锥及特征相容条件	273
习题	278
第八章 气体亚声速定常运动	281
§ 1 平面位势流动的小扰动理论	281
§ 2 平面小扰动位势流的基本解	283
§ 3 薄翼理论	286
§ 4 轴对称细长体的线化理论	290
§ 5 Rayleigh-Janzen 法	295

§ 6 松弛法	298
§ 7 速度图变换	301
§ 8 Ringleb 流动	306
§ 9 Kármán-钱学森近似	310
习题	318
第九章 气体跨声速定常流动	321
§ 1 引言	321
§ 2 跨声速流的物理图案	322
§ 3 跨声速流的小扰动方程, Kármán 相似律	323
§ 4 Tricomi 方程	328
§ 5 对称薄翼跨声速流场的积分方程方法	330
§ 6 用速度图法求解跨声速问题	336
§ 7 喷管流动	347
习题	357
参考文献	358
第十章 气体力学中的高阶近似及奇异摄动法	359
§ 1 Lighthill 法的基本概念, 例	359
§ 2 绕尖头薄翼剖面超声速流动的二阶近似	363
§ 3 喷管喉部流动(跨声速)的近似解 (Sauer 法)	368
§ 4 用 Lighthill 法求解尖头薄翼超声速绕流问题	371
§ 5 无限长圆柱在静止空气中等速膨胀运动	376
§ 6 特征线摄动法: 林家翘-Fox 理论(一)	383
§ 7 特征线摄动法: 林家翘-Fox 理论(二)	389
§ 8 计算 Laval 喷管的流函数法	394
习题	402
参考文献	403
第十一章 气体动力学基本方程的差分计算	404
§ 1 数值流体动力学的范围与概况	404
§ 2 有限差分近似(离散化)	405
§ 3 有限差分的几个重要问题	408
§ 4 线性差分格式的稳定性与收敛性的讨论	412
§ 5 可压缩流体运动基本方程的守恒型	417
§ 6 激波的存在与处理	420
§ 7 显式差分格式	422
§ 8 隐式差分格式	427
§ 9 类型相关格式	434
习题	440
参考文献	441
附录 气体动力学图表	442

1. 气体动力学中物理量的量纲公式及单位	442
2. 气体常数表	442
3. 普适物理常数	443
4. 斜激波 θ - β 关系曲线	443
5. 完全气体中的斜激波 ($\gamma = 1.4$)	444
6. 标准大气	460
7. 等熵流的特征数函数参数表	461
8. 等熵流 ($\gamma = 1.4$) (T, P, ρ_0 为滞止状态参数)	464
9. 有摩擦等截面管道绝热流 ($\gamma = 1.4$)	469
10. 等截面有摩擦等温管流 ($\gamma = 1.4$)	471
11. 等截面管道有热交换无摩擦流动 ($\gamma = 1.4$)	473
12. 正激波 ($\gamma = 1.4$)	476

第一章 气体运动基本方程组

气体动力学研究气体本身的运动规律以及气体与固体之间的相互作用。在本书的大部分章节内,我们假定气体是无粘性的完全气体,同时略去作用于气体的质量力,如重力。这是对实际气体的一种简化。在一般基础性流体动力学教科书内都可以找到描写这种无粘性气体运动的基本方程组。为了简单起见,我们将直接引用这些最初形式的基本方程组而略去推导和证明的细节。

气体是一种可压缩流体。但是,在许多情况下(例如气体做低速运动),由于气体运动引起的密度变化很小,所以,尽管气体本身是可压缩的,当低速运动时这种可压缩性并不起显著作用,故常可忽略气体密度的变化,而把气体当做不可压缩流体处理。当气体做高速运动或不定常运动时,压缩性效应不可忽略。当运动速度接近当地声速或更高时,压缩性效应将会使流动性质发生根本的变化,例如,低速时本来连续的流动,这时会产生强度不同的间断(激波)。又比如,在大多数情况下液体的压缩性极小,我们总可将其视为不可压缩流体。但当发生像水下爆炸这类现象时,由于液体(水)的运动状态随时间的变化率极大,这时液体的压缩性效应也是不可忽略的。从形式上看,描述无粘性的不可压缩流体和可压缩流体运动的基本方程中,连续性方程和运动方程完全相同,只是前者的 $\rho = \text{const}$, 后者的 ρ 是变量。正是气体密度 ρ 的这种变化使这同一组方程描述了相当复杂的气体的各种运动过程。同时,由于密度的变化,气体在运动过程中必定伴随有相应的热力学过程。

§ 1 积分形式的基本方程组

1. 参考系统,即坐标系

任何力学现象的描述,都是相对于某参考系统而言的。在经典的牛顿力学范畴内,任何一个确定的力学规律在任一惯性坐标系内¹⁾都相同。或者说,描述任何力学现象与惯性坐标系的选取无关。实际上,为了方便起见,可以把坐标系固结在做等速直线运动的物体上,也可以固结在不动的物体上。

在本书内,如果没有特别的说明,一律采用惯性坐标系。在一般情况下,均采用正交的直线坐标系。有时也利用正交的曲线坐标系或非正交曲线坐标系。

2. 系统与控制体

大家知道,在惯性坐标系内描述流体运动过程有二种方法,即拉格朗日法和欧拉法。前者强调具有确定质量的流体团运动的整个历史过程。后者则强调被流体流过的各固定空间内流动参数的空间分布以及随时间的变化。实际上,欧拉法是一种研究流场的方法。

1) 各惯性坐标系间可有等速直线相对运动。

在各种实际问题中,我们常只对某确定的空间内的流场更感兴趣,而不必了解流过该确定空间的各流体团的全部流动的“历史”。因此欧拉法更为适用。如无特别的说明,本书一律采用欧拉法。当然,三个普遍成立的守恒定律总是对某个具有确定质量的流体团建立的。因此,当我们以积分形式将三个守恒定律用于描述流体的运动时,首先要利用流体系统的概念,然后用输运公式把它们变换为欧拉型的积分形式的基本方程组。

系统 含有确定的不变质量的任何流体团叫系统。系统之外的一切统称外界。把系统和外界分隔开的封闭曲面叫边界。系统的边界可以是固体边界,也可以是包围一定质量流体的任意封闭曲面。这样定义的系统 and 边界有如下特点:

1) 系统的边界必定是封闭曲面,且随流体一起运动。系统的体积、边界的形状都可随时间变化;

2) 系统的边界与外界没有质量交换¹⁾;

3) 在系统的边界上受到外部(即环境)作用在系统上的表面力;

4) 在系统的边界上,系统与外界可以有功和热的交换。

控制体 相对某坐标系所取的任一个固定的空间体积称为控制体,流体流过此控制体;包围此控制体的固定的空间封闭曲面叫控制面。控制面可以是实际存在的,如固体壁面,也可以是任意假想的空间封闭曲面。按上述定义的控制体和控制面有如下特点:

1) 控制体和控制面相对于坐标系是固定不动的²⁾;

2) 在控制面上可以有质量交换,即流体通过控制面流进或流出;

3) 在控制面上受到控制体以外物体加在控制体之内物体上的力;

4) 在控制面上有功、热和能量的交换。

有了系统和控制体的概念,我们可以把三个普遍成立的守恒定律直接用于任何系统,然后利用大家熟知的输运公式把它们改写为适用于控制体的欧拉型积分形式的基本方程组。

3. 输运公式

所谓输运公式是指把对系统整体来说的某物理量,如质量,动量和能量对时间的变化率写成两项,即对时间的当地变化率和因气体运动引起的系统位移所产生的迁移变化率。系统整体的某物理量对时间的变化率也称为该物理量的物质导数。把系统整体的物理量表示为

$$\int_{\tau(t)} \phi(x_i, t) d\tau \quad (1.1)$$

其中 $\tau(t)$ 是系统的体积,随时间变化; $\phi(x_i, t)$ 是任意的标量或向量函数。 $x_i (i=1, 2, 3)$ 是三个空间坐标。

若取

1) 这里定义的系统 and 热力学系统的概念略有不同。热力学系统与外界可以有质量交换,即可以有质量通过边界。
2) 当然,也可以取随时间按一定规律改变其位置和形状的控制体和控制面。但在本书中一律取固定的不随时间改变其位置和形状的控制体和控制面。

$$\phi(x_i, t) = \begin{cases} \rho \\ \rho V \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \end{cases}$$

则(1.1)式分别表示系统的质量、动量和能量。 e 是单位质量气体的内能。

按定义,参看图(1-1),物质导数可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \phi(x_i, t) d\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\tau(t+\Delta t)} \phi(x_i, t+\Delta t) d\tau - \int_{\tau(t)} \phi(x_i, t) d\tau \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\tau(t)} [\phi(x_i, t+\Delta t) - \phi(x_i, t)] d\tau + \int_{\tau(t+\Delta t) - \tau(t)} \phi(x_i, t+\Delta t) d\tau \right\} \end{aligned}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 时,系统的体积增量 $\tau(t+\Delta t) - \tau(t)$ 是由微元柱体 $V_n \Delta t d\sigma$ 组成的,即 $d\tau = V_n \Delta t d\sigma$, 且

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \phi(x_i, t+\Delta t) = \phi(x_i, t)$$

因此

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \phi(x_i, t) d\tau = \int_{\tau(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma(t)} \phi V_n d\sigma \quad (1.2)$$

$\sigma(t)$ 是包围系统的封闭曲面。(1.2) 式就是输运公式。右边第一项是包含在体积 $\tau(t)$ 内物理量 ϕ 的当地变化率。可以看出,如果被积函数 ϕ 不随时间变化, $\phi = \phi(x_i)$, 即对定常运动的情形,当地变化率为零。右式的第二项是由系统的迁移效应引起的,叫迁移变化率。如果被积函数 ϕ 和 V_n 等不随空间坐标变化,即在同一时刻 ϕ 和 $\mathbf{V}$ 在空间的分布为常数,即 $\phi = \phi(t)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ 。显然有 $\int_{\sigma} \phi V_n d\sigma = 0$, 即迁移变化率为零。这是在空间内平行均匀流动的情况。输运公式对研究流体运动有重要的作用。特别是,在任意时刻 t 我们可把系统的体积取为控制体,把包围系统的封闭曲面取为控制面。由物质导数导出的输运公式表明,物质导数等于控制体内部物理量对时间变化率的总和与通过控制面该物理量的通量之和。因为控制体的体积和控制面都不随时间改变,所以输运公式实际上是把物质导数转换为按欧拉法表示的固定的控制体内和控制面上的参数变化。

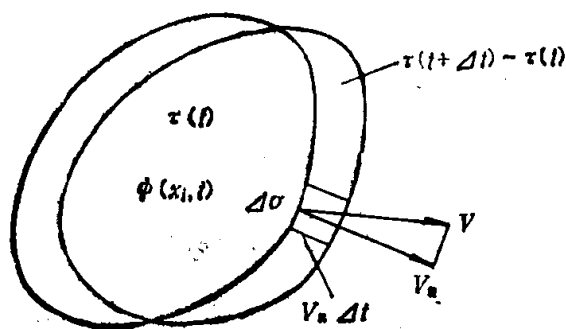


图 1-1

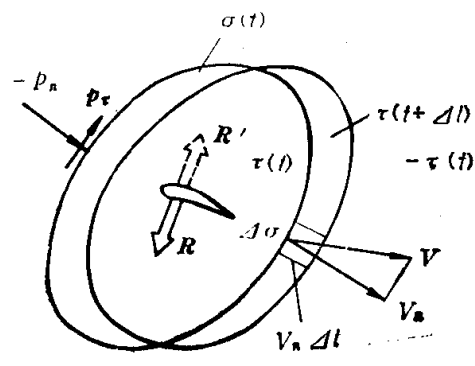


图 1-2

4. 连续性方程

连续性方程是系统质量守恒的一种数学表达式。若系统内部无源,则由系统的质量

守恒可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho d\tau = 0 \quad (1.3)$$

利用输运公式 (1.2), 取 $\phi = \rho$, 并令 τ 为控制体体积, σ 为控制面, 式 (1.3) 可写为

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \rho V_n d\sigma = 0 \quad (1.4)$$

运动定常时

$$\int_{\sigma} \rho V_n d\sigma = 0 \quad (1.5)$$

(1.3), (1.4) 式的物量意义是很清楚的。尽管本章开始时我们做了无粘性和完全气体的假定, 由于质量守恒是一个普遍成立的定律, 因此 (1.4), (1.5) 对有粘性的非完全气体也成立。

5. 动量方程

根据动量定理, 系统的动量对于时间的变化率(物质导数)等于外界作用在该系统上所有外力的合力。忽略气体的质量力, 外界作用在系统表面上压力的合力为 $-\int_{\sigma} p n d\sigma$ (图 1-2)。此外, 把作用在系统上所有其他外力的合力表示为 $\mathbf{F}_*$, 则

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho \mathbf{V} d\tau = - \int_{\sigma(t)} p n d\sigma + \mathbf{F}_* \quad (1.6)$$

利用输运公式, 取 $\phi = \rho \mathbf{V}$, (1.6) 式可改写为

$$\int_{\tau(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) d\tau + \int_{\sigma(t)} \rho \mathbf{V} V_n d\sigma = - \int_{\sigma(t)} p n d\sigma + \mathbf{F}_* \quad (1.7)$$

这里要说明, $\mathbf{F}_*$ 包括了除压力以外所有作用于控制体内流体外力的合力(图 1-2)。 $\mathbf{F}_* = \Sigma \mathbf{p}_r d\sigma + \mathbf{R}$ 。因此, 尽管我们并没有讨论气体粘性力作用的细节, 但是通过动量的计算或测量, 由积分形式的动量方程(1.7) 可以求出作用于流体的包括粘性力在内的所有外力作用的合力。这是积分形式动量方程所具有的优点之一。动量方程是向量表达式。

6. 能量方程

根据能量守恒原理, 系统的总能量 U 对时间的变化率(物质导数)等于单位时间内系统与外界交换的热量和外界对系统所作功率之和。在我们所研究的系统中(图 1-3), 系统的总能量包括内能和动能; 外界以热传导、热辐射或热源的形式对系统加热; 通过系统边界传导的热量为 $\int_{\sigma(t)} q_{\lambda} d\sigma$, q_{λ} 是单位时间通过单位表面积传入的热量; 辐射热量 $\int_{\tau(t)} \rho q_r d\tau$, q_r 是系统内单位质量气体单位时间内接受的辐射热量。系统内部的热源可理解为电加热或化学反应加热。由热源直接加给单位质量气体的热量为 q_c , 则热源对系统的总加热量为 $\int_{\tau(t)} \rho q_c d\tau$ 。外界对系统做功的功率由两部分组成: 一是作用在系统边界上的表面力对系统所作的功率, 其中压力 p 所作的功率为 $-\int_{\sigma(t)} p V_n d\sigma$, 表面切应力(粘性力)所作功率表示为 W_F ; 另外, 若系统内部还有做功机械, 如叶轮等, 其功率以 W_T 表示, 则总的能量守恒原理可表示为

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\tau = \int_{\sigma(t)} q_k d\sigma + \int_{\tau(t)} \rho (q_k + q_c) d\tau - \int_{\sigma} p V_n d\sigma + W_F + W_T \quad (1.8)$$

利用输运公式,取 $\phi = \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \rho$, (1.8) 式可改写为:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_{\sigma(t)} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) V_n d\sigma \\ &= \int_{\sigma(t)} q_k d\sigma + \int_{\tau(t)} \rho (q_k + q_c) d\sigma - \int_{\sigma} p V_n d\sigma + W_F + W_T \end{aligned} \quad (1.9)$$

引入焓 $i = e + \frac{p}{\rho}$, 上式还可写为

$$\begin{aligned} & \int_{\tau(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_{\sigma(t)} \rho \left(i + \frac{V^2}{2} \right) V_n d\sigma \\ &= \int_{\sigma(t)} q_k d\sigma + \int_{\tau(t)} \rho (q_k + q_c) d\sigma + W_F + W_T \end{aligned} \quad (1.10)$$

如果把系统体积 τ 取为控制体, σ 取为控制面, 则(1.10)式说明控制体内气体总能量对时间的变化率与通过控制面滞止焓 $i_0 = i + \frac{V^2}{2}$ 的通量之和, 等于单位时间外界加给控制体内气体的热量和表面切应力及做功机械所作功之和。

如果气体的运动过程绝热, $q_k = q_c = 0$, 也无粘性力及做功机械所作的外功, 则(1.10)式可简化为

$$\int_{\tau(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_{\sigma(t)} \rho i_0 V_n d\sigma = 0 \quad (1.11)$$

这里要特别说明, 如果控制面的一部份是由不动的固体壁面组成的, 这时 $V_n = 0$, 因此, 在这一部分控制面上滞止焓 i_0 的通量为零。此外, 即使气体是有粘性的, 但在不动的固体壁面处, 因粘性作用, 气体在固体壁面处的速度为零。所以尽管在壁面处有壁面摩擦力作用, 但这种摩擦力并不对控制体内的气体做功。如果控制面不是固体壁面, 则切应力

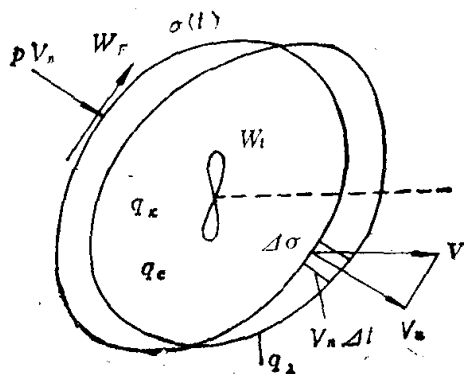


图 1-3

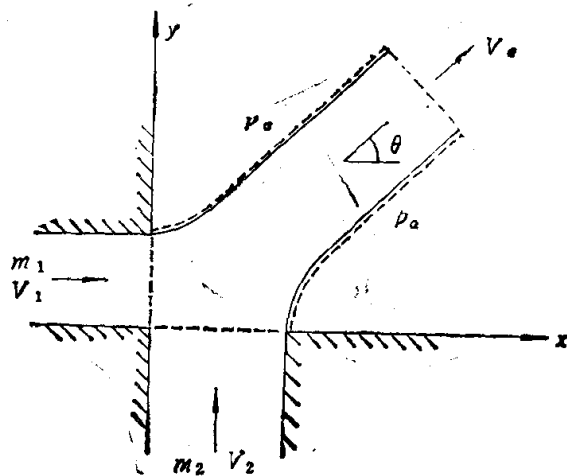


图 1-4

作功不为零。特别是控制面取在边界层之内,这时切应力作功尤其不能忽略。当运动定常时,(1.11)式可写成如下更简单的形式:

$$\int_{\sigma} \rho i_0 V_n d\sigma = 0 \quad (1.12)$$

积分形式的基本方程组所描述的是包含在系统或控制体内气体运动的总体性质,以及气体与固体之间相互作用的总效果,如固体作用于气体的合力(反作用力为气体对固体作用的合力)等。特别是,当流场中存在各种间断时,积分形式的基本方程具有更大的优越性,因为间断条件也必须满足总体的守恒条件,所以这时无需专门去处理间断条件。事实上间断条件已经自然包含在积分形式的基本方程之内。当流动对时间和空间都是连续的,即 $\rho, p, \mathbf{V}$ 等都是时间和空间的连续函数时,积分形式的基本方程与微分形式的基本方程完全等价。利用熟知的 Green 公式,很容易直接从积分形式的基本方程导出微分形式的基本方程组。对流动有间断的情况,积分形式的基本方程仍旧适用,但微分形式的基本方程却只在间断两侧连续流动区适用。而间断两侧的解需以间断条件作为连接条件。有许多具有实际意义的流动,间断面的形状事先并不知道,它们是作为求解过程的一部份被求出来的。因此求解微分形式的基本方程组将会遇到很大的困难。当然积分形式的基本方程不能给出流场的内部细节,也不能确定间断面的形状和位置。积分形式的基本方程对于那种有间断的且只对流动的总性质和效应有兴趣的情况是十分有效的。

7. 例

例 1 两股气体射流,如图 1-4 所示。进口速度及质量流量 V_1, m_1, V_2, m_2 已知($m_1 = \rho_1 V_1 A_1, m_2 = \rho_2 V_2 A_2$)。射流相交后以 θ 角向大气中射出。压力处处相等,均为大气压 p_a 。求射流角度 θ 及出口流速 V_c 。设流动为定常的,出口速度是均匀的。

解

取图 1-4 虚线所围区为控制体。水平和垂直方向动量守恒方程为

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V_c \cos \theta \quad \text{i)}$$

$$m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V_c \sin \theta \quad \text{ii)}$$

因为质量守恒,流出质量为 $m_c = m_1 + m_2$ 。由 i), ii) 式得

$$\tan \theta = \frac{m_2 V_2}{m_1 V_1} \quad \text{iii)}$$

若 $V_2 = 0$, 则 $\theta = 0$; $V_1 = 0$, 则 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。又由 i), ii) 式得

$$(m_1 V_1)^2 + (m_2 V_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 V_c^2 \quad \text{iv)}$$

所以

$$V_c = \frac{\sqrt{(m_1 V_1)^2 + (m_2 V_2)^2}}{m_1 + m_2} \quad \text{v)}$$

例 2 垂直放置的火箭模型向下喷水产生推力。水面上方为压缩空气,忽略其重力。水面下降速度为 $V_c = V_0 - kt$ 。喷水口截面积为 $A_c = A_0/2$ 。 A_0 为火箭腔室截面积。水的密度 $\rho = \text{const}$ 。火箭固体壳体的质量为 M_s , 水的初始质量为 M_c 。求使火箭模型保持不动的约束反力 R 。

解 取如图 1-5 所示控制体。

按动量守恒方程

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) d\tau + \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} V_n d\sigma + \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{F}_n$$

这里 τ 和 σ 分别为不随时间改变的控制体和控制面。上式右侧 $\mathbf{F}_n$ 包括 $\mathbf{R}$ 以及火箭壳体及水的重力。因为 τ 不随时间改变, 左侧第一项可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \mathbf{V} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_w} \rho \mathbf{V}_c d\tau_w$$

其中 τ_w 和 $\mathbf{V}_c$ 是水的体积和速度。这里忽略了火箭体内水的速度分布不均匀性。而假定水的速度等于水面下降的速度。因此在 y 方向(取向向下为正)有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho V d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \rho V_c \int_{\tau_w} d\tau_w = \frac{\partial}{\partial t} \rho V_c V_w(t)$$

$V_w(t)$ 是水的体积。

$$V_w(t) = \frac{M_w(t)}{\rho}$$

而

$$\begin{aligned} dM_w(t) &= -\rho V_c A_c dt \\ &= -[\rho A_c (V_0 - kt)] dt \end{aligned}$$

所以, 计及 $A_c = 2A_e$, 积分可得

$$M_w(t) = M_0 - 2\rho A_e \left(V_0 t - \frac{kt^2}{2} \right)$$

或

$$V_w(t) = M_0/\rho - 2A_e \left(V_0 t - \frac{kt^2}{2} \right)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho V_c V_w(t) &= \rho V_w(t) \frac{\partial V_c}{\partial t} + \rho V_c \frac{\partial V_w(t)}{\partial t} \\ &= -k \left[M_0 - 2\rho A_e \left(V_0 t - \frac{kt^2}{2} \right) \right] - 2\rho (V_0 - kt)^2 A_e \end{aligned}$$

因为控制面上 p 处处为常数 p_a , 所以

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma &= 0 \\ \int_{\sigma} \rho V^2 d\sigma &= \rho A_e V_c^2 \end{aligned}$$

根据连续性方程

$$V_c = \frac{A_e}{A_c} V_c = 2(V_0 - kt)$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \rho V^2 d\sigma &= 4\rho A_e (V_0 - kt)^2 \\ \mathbf{F}_n &= \mathbf{R} + g\mathbf{M}_s + g\mathbf{M}_w(t) \end{aligned}$$

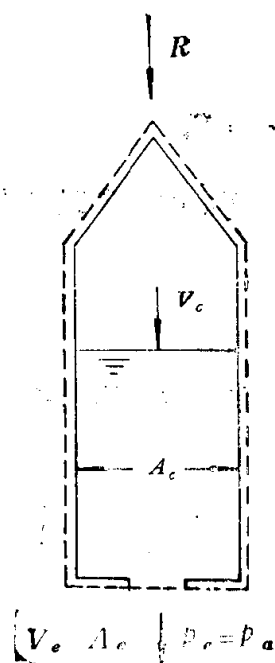


图 1-5

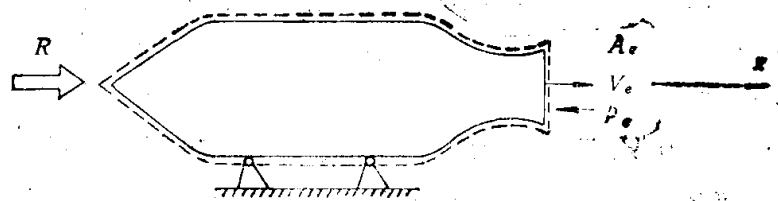


图 1-6

$$= R + gM_r + g \left[M_0 - 2\rho A_c \left(V_0 t - \frac{kt^2}{2} \right) \right]$$

所以

$$R = -(g + k) \left[M_0 - 2\rho A_c \left(V_0 t - \frac{kt^2}{2} \right) \right] + 2\rho A_c (V_0 - kt)^2 - gM_r$$

例 3 在试验台上有一火箭模型，尾喷管向大气喷出质量流量为 m 的气体。喷出速度为 V_c ，喷管出口压力为 p_c ，气体流动为定常。求模型支架反力 R (水平方向)。

解 取如图 1-6 所示的控制体。因运动定常，动量守恒方程为

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{V} V_n d\sigma + \int_{\sigma} p_a \mathbf{n} d\sigma + \int_{A_c} (p_c - p_a) \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{R}$$

或在 x 方向上

$$\int_{A_c} \rho_c V_c^2 d\sigma + \int_{A_c} (p_c - p_a) d\sigma = R$$

即

$$R = V_c m + A_c (p_c - p_a)$$

$m = \rho_c V_c A_c$ 。火箭在非设计工况下工作时 $p_c \neq p_a$ 。

例 4 如图 1-7 所示，一尖头对称薄翼剖面置于定常均匀的超声速来流中。流动参数可表示为

$u(x, y) = U + u'(x, y)$; $v(x, y) = v'(x, y)$; $\rho(x, y) = \rho_{\infty} + \rho'(x, y)$ ，且 $u'/U \ll 1$, $v'/U \ll 1$, $\rho'/\rho_{\infty} \ll 1$ 。已知

$$u'(x, y) = \begin{cases} -\frac{Uh'(x - \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y)}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}, & \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y \leq x \leq \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y + c; y > 0 \\ \frac{Uh'(x + \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y)}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}, & -\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y \leq x \leq -\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}y + c; y < 0 \\ 0, & \text{其他区域} \end{cases} \quad \text{i)}$$

$$v'(x, y) = \begin{cases} Uh'(x - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y), & \sqrt{M_\infty^2 - 1}y \leq x \leq \sqrt{M_\infty^2 - 1}y + c; y > 0 \\ Uh'(x + \sqrt{M_\infty^2 - 1}y), & -\sqrt{M_\infty^2 - 1}y \leq x \leq -\sqrt{M_\infty^2 - 1}y + c; y < 0 \\ 0, & \text{其他区域} \end{cases} \quad \text{ii)}$$

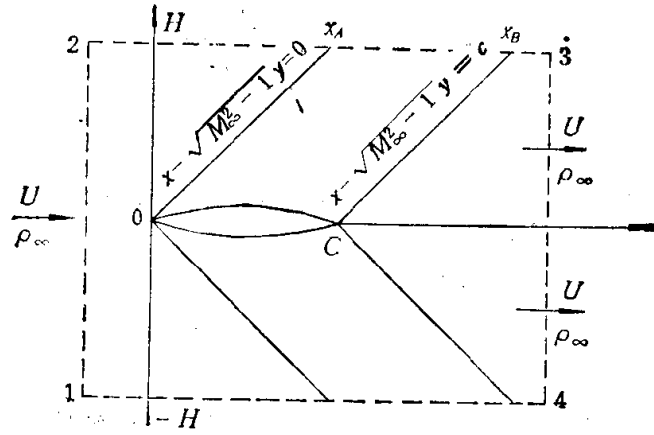


图 1-7

$h(x)$ 是翼剖面型线方程, $h'(x) = dh/dx$, c 是弦长. 不计摩擦, 求翼剖面所受阻力 R .

解 取如图 1-7 所示的控制体. 因流动为定常, 控制面 1-2, 4-3 上流动参数均匀分布. 控制面 1-4, 2-3 上只有 $x_A - x_B$ 这一段扰动参数不为零, 因此质量守恒方程和 x 方向动量守恒方程分别为

$$\int_{\sigma} (\rho_\infty + \rho') V_n d\sigma = \left[\int_{x_A}^{x_B} (\rho_\infty + \rho') v' dx \right]_{y=H} + \left[\int_{x_B}^{x_A} (\rho_\infty + \rho') v' dx \right]_{y=-H} = 0 \quad \text{iii)}$$

$$\int_{\sigma} (\rho_\infty + \rho') (U + u') V_\infty d\sigma + \int_{\sigma} p \cos(\widehat{nx}) d\sigma = R_1 \quad \text{iv)}$$

R_1 与 R 大小相等, 方向相反. $x_A = \sqrt{M_\infty^2 - 1}H$, $x_B = x_A + c$ 由 (iii) 式得

$$\left[\int_{x_A}^{x_B} (\rho_\infty + \rho') v' dx \right]_{y=H} = \left[\int_{x_A}^{x_B} (\rho_\infty + \rho') v' dx \right]_{y=-H} \quad \text{v)}$$

在 (iv) 式中

$$\int_{\sigma} p \cos(\widehat{nx}) d\sigma = 0$$

因此

$$\left[\int_{x_A}^{x_B} (\rho_\infty + \rho') (U + u') v' dx \right]_{y=H} - \left[\int_{x_A}^{x_B} (\rho_\infty + \rho') (U + u') v' dx \right]_{y=-H} = R_1 \quad \text{vi)}$$

利用 v) 式并略去三阶以上小量, vi) 式变为

$$\rho_\infty \int_{x_A}^{x_B} [(u'v')_{y=H} - (u'v')_{y=-H}] dx = R_1 \quad \text{vii)}$$

把 i), ii) 式代入 vii) 式, 则得

$$\begin{aligned} R_1 &= -\rho_\infty U^2 \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{[h'(x - x_A)]^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Big|_{y>0} + \frac{[h'(x - x_A)]^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Big|_{y<0} \right\} dx \\ &= -\frac{\rho_\infty U^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c \{ [h'_\perp(x)]^2 + [h'_\parallel(x)]^2 \} dx \end{aligned}$$

或

$$R = \frac{\rho_\infty U^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^c \{ [h'_\perp(x)]^2 + [h'_\parallel(x)]^2 \} dx \quad \text{viii)}$$