

數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY
THE PSYCHOLOGY OF INVENTION
IN THE MATHEMATICAL FIELD

數學

領域中的發明心理學

【法】雅克·阿達瑪 著
陳植蔭 肖奚安 朱梧櫚 譯校



数学方法论丛书

数学领域中的发明心理学

[法] 雅克·阿达玛 著
陈植荫 肖奚安 译
朱梧槿 校

江苏教育出版社

1988 · 南京

AN ESSAY ON
The Psychology of Invention
in the
Mathematical Field
BY
JACQUES HADAMARD
DOVER PUBLICATIONS, INC.

数学方法论丛书
数学领域中的发明心理学
〔法〕雅克·阿达玛 著
陈植荫 肖奚安 译
朱梧槨 校

出版发行：江苏教育出版社
经 销：江苏省新华书店
印 刷：镇江前进印刷厂

开本787×1092毫米 1/28 印张：4.125 字数：84,500
1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷
印数1—3,100册

ISBN 7—5343—0541—1

G·485 定价：1.65元 贴塑

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主 编：徐利治

副主编：朱梧槿 萧文强

编 委：(按姓氏笔划为序)

王兴华	王鸿钧	朱梧槿	刘凤璞
吴学谋	吴望名	欧阳绛	郑毓信
赵振威	徐利治	唐复芬	萧文强

出版说明

如大家所知,数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问,已有很长的历史,而且内容极为丰富。16世纪以来,如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者,都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言,以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例,他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究,出版了一系列论著,并被译为多种文字,受到全世界的普遍重视,被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国,也有许多学者在各种不同的场合屡次指出:要在数学教材与教学过程中,注意对形成数学概念的认识过程的分析,努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段,特别是我国数学家徐利治教授,他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流,结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状,深感在教学与科研领域中,有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下,我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课,出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物,这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来,在现今的数学教育与数学教学过程中,主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练,对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视,在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用,以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明,我们仍需大力提倡数学方法论的研究,并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是,我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期,这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍,而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍,因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要,我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称《丛书》),并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作,纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月,我社与徐利治教授等充分磋商,组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信,在《丛书》的全体编委的共同努力下,一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》,我们也由此而希望,这套《丛书》的出版,能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次,除了少数几本属于高档次的专著之外,其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑,《丛书》中的大部分题材,对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平,在《丛书》的编辑和出版过程中,难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

译者序

《数学领域中的发明心理学》是法国著名数学家雅克·阿达玛的一本名著，本书在1945年初版发行，后又几经再版重印，并被译为几种文字，影响甚大，是一本数学方法论方面的经典著作。

雅克·阿达玛在数学的许多分支中都有重要贡献。1896年，他应用整函数的理论，证明了解析数论中的一个中心定理，即著名的素数定理；1903年，他在《关于波的传播》讲义中，把特征理论推广到了任意阶的偏微分方程；他还于本世纪初开创了泛函的研究，“泛函”的名称是属于他的。此外，他在复变函数论和代数理论等方面也都有重要的贡献。

由这样一位有杰出贡献的著名数学家来研究数学领域中的“发明心理学”，当然具有特殊的优势，因为他可以时时内省，并以自己从事数学创造活动的实际经验来检验和丰富他关于数学发明的理论，从而使之更具有说服力。

阿达玛在本书中追随“近50年来最伟大的天才人物”庞加莱在巴黎心理学学会上的著名讲演的思想，着重论述了以“无意识思维”为核心的数学发明心理过程，给人以强烈的印象。概括说来，他和庞加莱的观点有如下几点：

一、在数学的(乃至一般的)发明创造过程中，往往存在着创造灵感，或称之为“顿悟”的现象。这种顿悟的出现，既不能简单地归之于机遇，也不能无为地说成是逻辑推理“对中间阶段的跳越”，而是经历了一种很复杂的、至今尚未被我们完全认识的“无意识思维”过程之后的结果。

所谓无意识思维，乃是指思维者本人既没有意识到它的存在，也没有受到意识之支配的一种思维过程。大量的例子表明，这种思维过程是确实存在的。而且，一旦承认了无意识思维的存在性，顿悟现象便得到很好的科学解释。

二、无意识思维在发明创造中占有举足轻重的地位，而且这是由发明的本质所决定的。任何领域中的发明，都是以思想组合的方式进行的。也即，发明就是将各种“观念原子”（这是庞加莱用以描述各种基本思想元素的一个形象化的比喻）进行千千万万的组合，再从中选出有用的组合，而这种选择的标准是所谓“科学的美感”。在发明过程的组合与选择这样两个大步骤中，由于无意识思维不受理智之条条框框的约束，而仅仅服从于人的直觉中之和谐的美感，因而比有意识的思维过程更为深刻和奏效。

三、发明的整体过程可以分为四个阶段：一是准备阶段，此时是有意识的工作，但常常不能得到预期的结果；二是酝酿阶段，即暂时丢开手头的工作，而去干些其他事情，或去休息一下，而无意识思维却已由此而开动起来；三是顿悟阶段，此时问题的答案或证明的途径已经出乎预料地突然出现了；四是整理阶段，即将顿悟时所感觉到的那些结果严格地加以证明，并将其过程精确化，同时又可为下一步研究作好必要的准备。

有时，顿悟也会出现在“准备阶段”的末尾，此时当然就不存在什么酝酿阶段了，然而许多重要的发现，都不是一般地进行了一段有意识的工作之后就能奏效的；因而，阿达玛所指出的那个酝酿阶段的无意识工作，乃是发明过程中的一个重要阶段。

四、本书的后半部还从各种不同的角度谈到直觉思维对于数学发明创造的特别重要的作用。首先，虽然在交流阶段，

思想的载体必须是语言,而且必须是严格而准确的语言;但在创造阶段,科学家的思维载体却往往是各种各样的、因人因事而异的符号、图表或其他形象,亦即此时的思维方式往往是形象的和直觉的,而不是逻辑的。其次,直觉型思维的无意识程度较深,而且散射面较宽,但逻辑型思维的无意识程度却较浅,同时散射面较窄,因而两相比较,直觉型更有利于创新,最后,书中还以诸如费尔玛大定理、黎曼猜想、伽罗瓦关于一类积分的周期的知识、庞加莱关于变分计算中一个极小值的充分条件等一系列著名例子,用以说明:虽然严格的逻辑推导可能要很久之后才能作出,甚至直到今天还未能作出,但这些天才人物的惊人的直觉洞察力,却能准确无误地预见到结果,这又从另一个角度说明了直觉思维在发明创造中具有逻辑思维所无法取代的重要作用。

以上只是极为简略地概括了本书的主要论点,但这也是后人所经常引用并加以发展的几个方面的内容,而且读者也已然能由此而窥见本书的丰富和深刻,也即它不仅是一本关于数学方法的论著,而且还是一本能够让学习数学和研究数学的人们从中认识到关于数学发明的一般思维规律的著作,因而对于本书的阅读,就能使人更自觉地按照这种规律去调节自己的工作节奏;从而这更是一本有关思维科学的学术著作,心理学家和思维科学工作者都可从中发掘出种种有待深入研究的课题。例如关于如何训练人的无意识思维的课题,就不仅具有理论意义,而且具有重大的实际意义。书中还描述了许多科学家进行科学研究时的生动情景,摘引了他们之各种不同的论述,从而更加增添了本书的可读性。

当然,我们又不能认为本书的所有观点都是正确而无懈可击的。实际上,就如作者关于“天才乃是大自然的造化,并独立于任何教育”的说法,以及关于动物也存在意识等观点,

就不可盲目相信或接受了。书中所引的一些史料也有与我们常见的有所不同,对此,我们在译本中也作了注解或说明。

本书译自1954年新版的英文本。原书有许多注释,多是标明出处或对正文的某些解释,考虑到篇幅所限,加之我国绝大多数读者都无必要,也不可能去查找这些考证,我们将这些注释都删去了。另外,书中所涉及的为数众多的科学家、数学家以及数学定理,我们都没有一一详细加以介绍,其理由可用原书所引之庞加莱的一段话来说明:“……重要的不是定理本身,而是发现这个定理时的种种情形。”阅读本书,也不是为了弄清几个数学定理或几个科学家的身世,而是为了了解发明创造中的种种心理过程。

这样一本名著一直未有中译本,确是令人遗憾的。我们有机会译成中文出版而奉献给读者,实感欣慰。但由于我们水平所限,译文难免有不妥之处,敬请读者批评指正。

译者

1988年2月于南京

献给她——我生活和事业中的伴侣

序

……我已经在如此的环境下发现了这个定理的证明。这个定理有一个很生疏的名字，恐怕我们之中大多数人都都不熟悉它。但这一点无关紧要，对于心理学家来说，重要的不是定理本身，而是发现这个定理时的种种情况。

——亨利·庞加莱

本书和其他许多有关数学发明创造的论著一样，都应溯源到亨利·庞加莱在巴黎心理学学会上的那篇著名讲演。我初次接触这个论题是在巴黎综合中心的一次会议上(1937年)，而我对它所作的进一步研究，则已被包括在1943年于纽约私立(教会)高等学校(Ecole Libre des Hautes Etudes)所作的一个内容甚为广泛的讲演之中。

在这里，我要对普林斯顿大学出版社的朋友们表示感谢，感谢他们在出版本书的过程中所给予我的真诚帮助和热情支持。

雅克·阿达玛

1944.8.21于纽约

目 录

前言	(1)
一、关于数学心理学的一般考察	(4)
二、关于无意识的讨论	(20)
三、无意识和发现的关系	(26)
四、准备阶段·逻辑和机遇	(36)
五、最后阶段的有意识工作	(46)
六、综合和符号	(52)
七、不同类型的数学心理	(77)
八、直觉中的不解之谜	(89)
九、对数学研究的一般性指导	(95)
结束语	(103)
附录 I 对数学家工作方法的调查表	
附录 II 爱因斯坦教授的一封信	
附录 III 无穷小运算的发明	

前 言

关于本书的书名，有两个问题必须加以说明。

首先，我们使用的是“发明”这个词，然而，似乎应该用“发现”这个词显得更为确切。“发现”和“发明”这两个词的区别是众所周知的：发现是针对那种业已存在，但在此之前却无人知道的情况而说的，例如，哥伦布(Columbus)发现了美洲大陆，但美洲在哥伦布知道它之前就早已存在；相反地，富兰克林(Franklin)发明了避雷针，而在此之前却根本不存在什么避雷针。

然而经过一番仔细考虑后，却又会感到这两个词的区别并不那么明显了。托里拆利(Toricelli)曾注意到这样一个事实：当把一个真空的管子倒过来插在水银池里时，水银就会上升到一个确定的高度。这是一个发现，但他也就由此而发明了气压表。诸如此类的例子还很多，它们既可以说是发现，也可以说是发明。比如，富兰克林关于避雷针的发明和他关于雷电的发现，可以说几乎没有什么区别。这就是我们为什么并不太关心“发现”和“发明”之区别的原因。事实上，两者在心理学的意义上没有什么差别，而往往被视为一致的。

其次，我们的书名是《数学领域中的发明心理学》，而不是《数学发明心理学》，这也许能使我们更容易注意到，数学发明仅仅是诸多发明中的一种，而发明创造活动在科学、技术、文学、艺术等各个领域都是广泛地存在着的。

现代哲学家甚至更进一步认为：所谓智力活动，所谓人类生活，都是一种连续不断的发明过程。正如理波特(Ribot)所说：“在科学或艺术上的发明都不过是发明中的特殊情况。事实上，在实际生活中，在机械学、军事学和工业、商业的活动

中,在宗教的、社会的和政治的各种研究中,人类都在耗费着心智,并且发挥了如同在其他领域中所发挥的同样丰富的想象力。”而伯格森(Bergson)则以他更为深刻、更为广泛的直觉断言:“所谓发明,就是在生活的各个领域创造新东西,这是连绵不断的人类自身所独有的特征;那些具有聪明才智的学者、富于创造精神的能人以及追求独立自由的志士,都在从事这种活动。”这种大胆的断言也曾被梅特切尼柯夫(Metschnikoff)所肯定过。他在他那本关于吞噬细胞的著作的末尾指出,对于细菌的斗争,不仅仅是吞噬细胞的事情,而且也是人类智力的工作,因为我们创立了细菌学以同细菌作战。

当然,我们并不能就此断言,各种各样的发明都是按同一种方式进行的。正如心理学家梭里奥(Souriau)所曾提到的,艺术领域和科学领域中的发明是有所不同的。艺术享有更大的自由,艺术家仅仅服从于灵感,服从于幻想,所以他们的工作是真正的发明。贝多芬(Beethoven)的交响乐,雷欣(Racine)的悲剧作品都是发明。而科学家就不同了,更确切地说,他们的工作实际上属于发现的范畴。正如我的老师埃尔米特(Hermite)所告诉我的:“我们与其说是数学的主人,不如说是数学的奴仆。”因为尽管某一真理至今尚未知晓,但是它却客观地存在着,而且只有一条道路能够通向它,如果离开这条路,我们就会迷失方向。

尽管发现与发明之间存在着区别,但并不排除它们之间存在着许多相似之处,对此我们还将再次论及。1937年,在巴黎综合中心,由于杰出的日内瓦心理学家克拉帕雷德(Claparède)的促进,曾花了整整一个星期的时间来讨论各种不同类型的发明,其中有一个分会专门讨论数学领域中的发明。另外,路易·德·布罗格利(Louis de Broglie)和鲍尔(Bauer)论述了实验科学中的发明,而保罗·瓦莱里(Paul Valé-

ry) 则分析讨论了诗歌创作中的发明。事实证明，将这些不同领域中的发明情况加以对比是富有成效的。

由于我更熟悉数学，所以让我们来分析讨论数学这一专门领域中的发明，似乎较为有益。我们要感谢庞加莱的经典讲演，因为这一讲演使我们获知这一领域中的许多重要成果，而这些成果势必有利于我们去了解和认识其他领域中的情况。

一 关于数学心理学的一般考察

对于本书所要讨论的论题，由于前人的努力，我们已经知道了不少；但是，其中仍有许多问题有待于探索和研究，幸运的是我们拥有一批比一般人想象中更为丰富、更有条理的资料，致使我们能以对付这些困难。

这里所说的困难，不仅来自问题的内部，而且来自这样一个事实，即我们的论题往往同时牵涉到心理学和数学这两个领域，而且愈来愈多的例子表明，这种牵涉往往阻碍着我们的研究进程。不难想象，要想透彻地研究数学中的发明心理学，势必要求研究者既是心理学家，又是数学家，然而可以说，迄今还没有这样的人才。所以这一论题历来只是被数学家和心理学家们分别地、单方面地从自己的侧面研究过，此外还被神经病学专家讨论过。

一般地说，可以用两种方法进行心理学的研究：其一是“主观”的方法，其二是“客观”的方法。所谓主观方法，即内省的方法，就是“从内部观察”的方法，也就是说，有关思维方式的信息是思维者本人直接从内部观察他自身的思维过程而得到的。使用这种方法存在一个困难，即思维者可能会扰乱自己的思维，因为思维的过程和观察自身思维的过程几乎是同时进行的，这就难以保证二者不会相互干扰。但是我们将看到，对于“发明”这样一种特定的思维过程，较之其他种类的思维过程而言，所说的这种干扰还不甚可怕。我就将采用内部反省的方法进行我们的研究，我认为这是唯一值得采用的可靠方法。不过在这种自我反省的过程中，我将不得