现代物理学丛书

非线性声学

钱祖文 著

科学出版社

现代物理学丛书

非 线 性 声 学

钱 祖 文 著

科 学 出 版 社

1 9 9 2

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了有限振幅声波在无界空间中的传播、在界面上的反射和折射，以及声辐射压力、声冲流和空化气泡的振动、非线性参数及应用、声散射声、声参量阵、孤子和声混沌、固体中的非线性声学。

本书讨论深入，反映当代最新发展，可供科学工作者、大学教师及高年级学生参考。

现代物理学丛书

非 线 性 声 学

钱 祖 文 著

责任编辑 张邦固

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1992年7月第一次印刷 印张：12 5/8

印数：平 1—860 插页：精 2

精 1—700 字数：327 000

ISBN 7-03-002855-4/O·535(平)

ISBN 7-03-002856-2/O·536(精)

定价： 平 装 9.20 元

布脊精装 10.80 元

序

在70年代前期，国外先后出版了三部非线性声学专著，即 Зарембо 和 Красильников 的《非线性声学引论》；Руденко 和 Солуян 的《非线性声学原理》以及 Beyer 的《非线性声学讲义》，而作者之所以撰写此书是基于下述四点考虑：第一，这三本著作不包括近20年飞速发展的成就；第二，由于它们的作者兴趣不同，其内容各有侧重；第三，可能由于文字上或者别的什么原因、国外的著作很少反映我国的工作；第四，迄今为止，尚无一本非线性声学的中文书，我们是11亿人口的大国，应有自己的相应著作.

70年代后期，作者在中国科学院声学研究所为有关同事讲授了非线性声学课程，当时的讲稿即为本书的雏形. 1980年，声学所所长汪德昭先生建议作者撰写这本书，并向现代物理学丛书编委会推荐而被列入出版计划. 在写作过程中，得到了汪先生和魏荣爵先生的鼓励、关怀和指导，魏先生审阅了本书的早期初稿，提出不少有益意见. 由于“讲课容易成书难”的弊病，作者总有点“足将进而踟蹰”，迟迟未能交稿，错过了大好时光. 后来，出版经费日趋紧张，这份手稿也就被暂时束之高阁了. 1990年，马大猷先生再次鼓励作者出版此书，并向我院出版基金委员会鼎力推荐，得到了批准和资助，此书因而得以问世. 作者在此对我的前辈师长们、和我作过有益讨论的同行们、资助本书的院出版基金委员会表示由衷的感谢.

由于作者才疏学浅，差错和不妥在所难免，敬请批评指正.

作者

1991年于中国科学院声学研究所

目　　录

绪　　论

近年来非线性声学有了迅速的发展，在学术上和实际应用中均很受重视。在研究声传播时，总离不开运动方程、连续性方程和物态方程。对于理想介质来说，运动方程是欧拉方程，即

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p \tag{0.1}$$

式中 ρ 为介质密度，V 为流点的速度矢量，p 是声压，而

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \tag{0.2}$$

显然，上式右端第二项是非线性项，在流体力学中，称其为对流项，或者运动非线性项。

连续性方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \tag{0.3}$$

式中 ρ 是流体的密度，上式第二项是非线性项。

物态方程为 $p = p(\rho)$，服从这种物态方程的流体称为正压流体，即压力仅是密度的函数。但在一般情况下，压力不仅是密度的函数，而且是熵 S 的函数。如果声传播过程是等熵的，则这种流体在这些意义下可以称之为正压流体。将物态方程展为泰勒级数，于是有

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \cdots \tag{0.4}$$

式中 ρ_0、P_0 分别为密度和压力的静态值，上式右端第三项开始即出现介质的非线性项。

在线性声学中，上述几个方程中的所有非线性项都被忽略。由此可见，运动非线性或者介质非线性不能都忽略的声学问题即属

于非线性声学问题.

根据线性声学的概念可知，一列单频声波在线性介质中传播时,除了它的振幅衰减和相位变化之外,其波形并不发生变化. 另一方面，如果运动非线性(例如振幅足够大)或者介质非线性发生作用时，一列单频正弦波就会产生它的谐波、分频波、和频波以及差频波，由于这些波的出现，波的叠加原理不再成立，线性声学规律不再遵守，从而必须代之以一门新的学科分支——非线性声学。

早在18世纪中叶,科学工作者就已经注意到许多非线性现象了. 1808年，泊桑提出了后来被称之为简单波[或者后来称之为黎曼(Riemann)-厄恩肖(Earnshaw)解]的形式解. 1860年黎曼和厄恩肖各自独立地发表了非线性一维波动方程的严格解，即黎曼-厄恩肖的简单波理论解(简称黎曼解]. 众所周知,在线性声学中,声波传播可以用著名的达朗贝尔解来描述,而单频声波的传播速度被介质的特性唯一决定. 而在非线性声学中，与达朗贝尔解相对应的为黎曼解,在这种情况下,声传播速度不仅取决于介质特性,而且还与质点振动幅度有关,质点振动速度的代数值大的地方波速大,代数值小的地方波速少. 对于正弦扰动的传播而言,波峰传得最快,波谷传得最慢,故传播一段时间之后,波峰赶上波谷,将有可能形成锯齿波或者冲击波,因此,黎曼解对于冲击波的形成过程给出了一个清晰的图象.

1870年和1889年兰金(Rankine)和休戈尼奥特 (Hugoniot)先后发表了冲击波波面两侧力学量的守恒关系式，后来称之为兰金-休戈尼奥特关系式,对冲击波的传播特性有了进一步的了解.

尽管如此,由于条件所限,以前人们只能将非线性现象当作一类“有害成分”来处理,除了从学科意义上对它进行探索以外,在实用方面也仅仅是尽量不要产生它.

到了20世纪50年代,莱特希尔(Lighthill)在空气动力声学方面取得了重要成就,在他的建议下,韦斯特维尔特(Westervelt)提出了一种新型声源——声参量阵,由于它的指向性很尖锐,频带

很宽，可以提高空间分辨率，抗混响，并可能获得较高的信号处理增益，它给非线性声学的应用带来光辉的前景。参量阵的缺点是效率低，但我们不妨认为，它的上述优点是以低效率为代价的。

参量阵亦用于接收，称之为参量接收器。在讨论这种接收器的指向性时，允许两束声(泵波和信号波)传播方向不同。但根据声散射声的结论，在这种情况下并不存在参量声的源函数，故本书在讨论这个问题时，只是假设可以用源函数概念来处理。当然这并不表示作者同意此种观点。

在非线性声学领域中还存在若干有争议的问题，例如声散射声及辐射压力等问题。这些问题产生的原因看来不仅是在物理上，也许还有数学上的原因。如果引入间断性的声场，则会出现虚假的声散射声。在对某些展开项进行不同取舍时，会得到不同的瑞利辐射压力等等。因此，某些数学上的简化，在线性声学中可能是容许的，而在非线性声学中则不容许，因为后者处理的属于次级效应，这些不合理的简化会带来人为的源函数。

非线性声学主要采用逐步近似方法来处理问题，大部分内容仅限于二级近似。这样得到的方程总是将低阶波作为高阶波的源函数，而在线性声学中各阶波之间是独立的。可是在推导空化气泡振动方程时，除了个别作者以外，大部分工作都不采用逐步近似方法，而是引入一些简化假设，从而将定解问题适定的偏微方程组化归非线性的常微分方程。如果这些简化假定与原问题一致，则问题依然是适定的，否则将使问题成为超定的。

非线性边值问题也是一个有待发展的问题。在线性边值问题中我们早已知道，各阶谐波的定解问题的陈述是相互不交叉的，而在非线性声学领域中，不仅在方程中各阶谐波是交叉的，而且在边界条件中亦然，这就给数学处理带来很大的不方便，有时甚至出现困难。

非线性参数 B/A 是描写介质非线性的一个特征量，近年来某些作者主张将它用来作为超声成象的特征参数，对于超声诊断可能会增加一定的信息。

近代物理学中的孤子和混沌现象在声波和振动领域也陆续观察到，这不仅会推动非线性声学的发展，而且使已和物理学分道扬镳多年的声学在这个方面将会“分久必合”。

限于篇幅，本书没有涉及随机非线性声学及非线性振动等方面的问题。

参 考 文 献

钱祖文，物理，20(1991)，261.

Beyer, R. T., 1984, Nonlinear Acoustics in Fluids, Benchmark Papers in Acoustics Series, Van Nostrand Reinhold Company.

Beyer, R. T., 1974, Nonlinear Acoustics, Department of the Navy, Sea System Command.

Blackstock, D. T., 1972, Amer. Institute of Physical Handbook, third edition, McGraw-Hill Book Company, 3—183.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., 1959, Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics Vol. 6, Pergamon Press.

Rudenko, O. V. and Soluyan, S. I., 1977, Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics Consultants Bureau.

Stephens, R. W. B. and Leventhall, H. G., 1976, Acoustics and Vibration Progress, Vol 2, Chapman and Hall.

Зарембо Л. К. и Красильников В. А., 1966., Введение в Нелинейную Акустику, Издательство Наука.

第一章 连续介质力学和热力学初步

经典声学是连续介质力学的一个分支，它是研究机械扰动的产生、接收及其在连续介质中传播的一门学科，因此我们首先介绍这方面的有关基础知识．连续介质力学分为弹性力学和流体力学，前者研究的介质是固体，后者是液体和气体，这里只介绍后者．我们引入流点(流体质点)的概念，流点是这样的一个流体团，其中必须包含大量的流体分子，以使得其大小比分子之间的平均距离大得多，从而可以将它看成是一个连续体；但流点的尺度又要足够小，以使所有有关物理量在整个流点上看不出变化，从而成为点函数．历史上研究流体力学有两种数学描述体系，即欧拉体系和拉格朗日体系，在非线性声学领域内，两种体系都使用，下面分别介绍．

§1.1 拉格朗日体系

设连续的流体空间被无限个流点所充满，我们取流点在某个初始时刻(例如 $t=t_0$) 所在空间位置的笛卡儿坐标 a, b, c 为自变量，随着时间的变化，流点在空间运动，其瞬时位置为 x, y, z．显然，不同的流点(其起始坐标用 a, b, c 描写)在空间运动到不同的位置，其瞬时位置 x, y, z 依赖于 a, b, c 和 t，即

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c;t) \\ y &= y(a,b,c;t) \\ z &= z(a,b,c;t) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

同样地，流体力学中各种物理量均取决于流点的位置和时间，从而恒可表示为 a, b, c, t 的函数．通常将 a, b, c 称为拉格朗日空间坐标，而将 $a, b, c; t$ 称为拉格朗日变量．下面将导出拉格朗日体系下的连续性方程和运动方程．

连续性方程

连续性方程实为质量守恒定律。设空间任一流点在初始时刻 $t=t_0$ 的坐标为 a，b，c，它所占据的体积元为 $dV_0=dadbdc$，其质量为 $dm_0=\rho_0 dadbdc$，ρ_0 是它在 $t=t_0$ 时的密度。在 t 时刻，它运动到 x，y，z 位置，其体元变为 $dV=dxdydz$，其密度为 ρ，质量为 $dm=\rho dxdydz$。对于任一流点，由于质量守恒，故有

$$\rho_0 dadbdc=\rho dxdydz$$

从数学分析可知，体元 $dadbdc$ 变到 $dxdydz$ 有如下关系：

$$dxdydz=|J|dadbdc$$

$|J|$ 为雅可比函数行列式，且

$$|J|=\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

式中 $x_a=\dfrac{\partial x}{\partial a}$，余类推。于是拉格朗日变量下的连续性方程可表示为

$$\rho_0=\rho\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} \tag{1.1.2a}$$

引入流点沿三个直角坐标方向的位移 ξ，η，ζ，它们都是 a，b，c；t 的函数，且有

$$\left.\begin{aligned} x&=a+\xi \\ y&=b+\eta \\ z&=c+\zeta \end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}$$

代入（1.1.2a）式，很容易得到

$$\rho_0=\rho\begin{vmatrix} 1+\xi_a & \xi_b & \xi_c \\ \eta_a & 1+\eta_b & \eta_c \\ \zeta_a & \zeta_b & 1+\zeta_c \end{vmatrix} \tag{1.1.2b}$$

退化到二维情况下的连续性方程为

$$\rho_0 = \begin{vmatrix} 1+\xi_a & \xi_b \\ \eta_a & 1+\eta_b \end{vmatrix} \quad (1.1.4)$$

同理，一维情况下的连续性方程是

$$\rho_0 = \rho(1+\xi_a) \quad (1.1.5)$$

运动方程

这里我们首先讨论理想流体。所谓理想流体是指，它在运动中不出现机械能的损耗，在这种流体中，流点只是在压力的作用下运动，不存在其它外力。以后将会看出，理想流体是实际流体在雷诺数很大时的近似。在这种情况下，与非线性对流项的贡献比较，耗散对流动的影响可以忽略不计。非理想流体的运动方程将留待§1.4中讨论。

设有一块流体，其体积为 τ，包围这块体积的表面积为 S，根据牛顿第二定律

$$\int \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial E^2} dv = -\int_s P\boldsymbol{n}dS \quad (1.1.6)$$

式中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ 为位置向量，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x，y，z 方向的单位向量。根据高斯定理，有

$$\int_s P\boldsymbol{n}dS = \int \nabla P d\tau \quad (1.1.7)$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为表面 S 的单位法线向量，由表面向外是正方向。将上式代入(1.1.6)式得到

$$\int_\tau \left(\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial t^2} + \nabla P\right) d\tau = 0$$

由于积分体积 τ 的任意性，要使上式始终成立，只有被积函数为零，于是

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial t^2} = -\nabla P \quad (1.1.8)$$

或写成方程组的形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

将上面的三个式子分别乘以 $\frac{\partial x}{\partial a}$，$\frac{\partial y}{\partial a}$，$\frac{\partial z}{\partial a}$，…，相加后得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial a}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial b}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial c}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10a}$$

将(1.1.3)式代入(1.1.10a)式，且将偏微商 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ 写成 ξ_{tt}，$\frac{\partial \xi}{\partial a}$ 写成 ξ_a 等等，则上式可改写为

$$\left.\begin{aligned}\xi_{tt}(1+\xi_a)+\eta_{tt}\eta_a+\zeta_{tt}\zeta_a &= -\frac{1}{\rho}P_a\\ \xi_{tt}\xi_b+\eta_{tt}(1+\eta_b)+\zeta_{tt}\zeta_b &= -\frac{1}{\rho}P_b\\ \xi_{tt}\xi_c+\eta_{tt}\eta_c+\zeta_{tt}(1+\zeta_c) &= -\frac{1}{\rho}P_c\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10b}$$

上式即为拉格朗日体系下的运动方程组．对于二维情况，上式退化为

$$\left.\begin{aligned}\xi_{tt}(1+\xi_a)+\eta_{tt}\eta_a &= -\frac{1}{\rho}P_a\\ \xi_{tt}\xi_b+\eta_{tt}(1+\eta_b) &= -\frac{1}{\rho}P_b\end{aligned}\right\} \tag{1.1.11}$$

一维情况下的运动方程为

$$\xi_{tt}(1+\xi_a) = -\frac{1}{\rho}P_a \tag{1.1.12}$$