电磁学中的数学

〔美〕D．C．斯廷逊 著
王吕曜 刘天惠 译

国防工业出版社

电磁学中的数学

〔美〕 D.C. 斯廷逊 著

王昌曜 刘天惠 译

国防工业出版社

内容简介

本书系统地阐述电磁学中的数学。作者归纳了电磁学中一些最基本的问题并以它们为例子详细地介绍数学分析方法，因而可以将这些基本方法推广应用于具体的工程问题中去，为进一步深入研究更复杂的电磁学理论奠定数学基础。这是本书别具一格的特色。另外的特点是，每章结尾附有大量的习题并把它们当作教材内容的补充。

本书是美国有关专业高年级大学生和研究生的一种教材，阅读本书要有基本的电磁学知识和高等数学基础。它不但可供从事电磁学方面工作的科研人员、工程师、技术员和有关大学生为进一步提高理论水平作为一种良好的进修材料或参考书，而且对于研究应用数学的数学工作者和数学爱好者来说也有相当参考价值。

Intermediate Mathematics of Electromagnetics
Donald C. Stinson
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976

*

电磁学中的数学
〔美〕D. C. 斯廷逊 著
王昌曜 刘天惠 译

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^1/_{32}$ 印张$9^3/_4$ 248千字
1982年3月第一版 1982年3月第一次印刷 印数：0,001—7,200册
统一书号：15034·2314 定价：1.25元
科技新书目14-118

译 者 序

本书是美国有关专业高年级大学生和研究生的一种教材，它系统地介绍了电磁学中的数学。由于内容有一定深度，为便于了解全书概况，特将各章内容作一概括的介绍。

第一章首先提出正交函数和傅立叶级数有关概念。其次，简单介绍物理、化学和工程中普遍采用的一种常微分方程——斯特姆-刘维尔方程。此外，介绍电磁学中一些常用的具有正交特性的特殊函数。

第二章引进格林函数和狄拉克δ符号函数的概念。进而介绍求斯特姆-刘维尔方程在各种边界条件下的格林函数的一般方法。此外，讨论了格林函数的各种表示形式。

第三章解决当遇到无界区域（间）情况或二、三维空间情况时利用傅立叶变换技术求微分方程（一维空间为常微分方程，二、三维空间为偏微分方程）格林函数的问题；并且研究解的特点及相互关系。

第四章介绍一般电磁方程（麦克斯韦方程）并研究其合适解法。引入磁流密度和磁荷密度两个辅助量是为了采用对偶原理。另外，用张量数学研究媒质的各向异性。同时，通过引入矢量磁位和矢量电位将麦克斯韦方程转化成辅助位方程，从而可以求出其解及场量。本章还讨论高级电磁问题中取矢量位的问题。

第五章介绍笛卡儿坐标、柱面坐标和球面坐标下的简正模，这些模实际上是由拉普拉斯方程和赫姆霍兹方程在无源情况下的解（即它们的齐次式的解）得出来的。而且，通过电磁学中若干最基本问题，介绍在这三种坐标系下且在有界和无界空间中求拉普拉斯方程和赫姆霍兹方程在有源情况下的格林函数的具体

步骤。

第六章讨论波在无界空间中通过各种性质媒质时的传播情况，并且通过电磁学中若干最基本问题介绍求解方法。本章实质上就是针对电磁学中这些最基本问题介绍解麦克斯韦方程的方法。

第七章讨论电磁学中电线源、电偶极子、磁线源和磁偶极子在各种性质半空间中的辐射情况。这些是电磁学中所遇到的几种最基本辐射情况。

附录中列出一些常用的关系式，并且对狄拉克δ符号函数和特殊函数作进一步的说明与补充。

由于译者水平所限，定有不妥之处，请广大读者批评指正。

序　　言

本书介绍电磁学方面的大部分数学，并且把它们应用于一些典型的问题中。前三章叙述正交函数、格林函数和傅立叶变换。第四章叙述理想与非理想媒质的电磁方程。第五章叙述拉普拉斯方程与赫姆霍兹方程在笛卡儿坐标系、柱面坐标系和球面坐标系下的简正模及格林函数。最后两章讨论波在无界和有界空间的理想和非理想媒质中的传播。

习题是教材整体的一部分，它们详细地反映了每章的内容。本书列出习题的全部解答，以使学生们能够立即判断出解的正确性。此外，本书前部分所选择的许多习题，还出现在本书后部分较复杂问题的部分解中。

本教材是在阿里佐纳大学编写的，最初作为电磁学方面几门研究生课程的补充。因此它不仅适用于大学高年级专业课程，而且还适用于低年级研究生电磁学方面的课程。阿灵顿特克萨斯大学电气工程专业的高年级大学生和低年级研究生曾采用过本教材，并且效果良好，只是对高年级大学生来说进度较慢。本书不但可以作为电磁学和应用数学方面课程的参考书或补充材料，而且还适合于学生自学。

最后，作者向阿灵顿特克萨斯大学的 A. E. 塞利斯 先生在几门课程中采用本教材表示谢意。

D. C. 斯廷逊

目　　录

第一章 正交函数与预备数学

1.1 正交函数与傅立叶级数概述

解决应用物理和工程中大多数问题，需要正交函数的概念。正交函数表现为斯特姆-刘维尔方程的解，此方程是工程中最基本的方程之一，它将在下面对傅立叶级数作少许介绍之后讨论。有关函数正交性的概念不过是 n 维空间中矢量正交性概念之推广。例如，让我们定义矢量

$$\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$$

式中 $\boldsymbol{a}_i$ 是 i 方向上通常的单位矢量，x_i 是 $\boldsymbol{f}$ 在 i 方向上矢量分量的幅值。在三维空间中，n 为 3，等等。如果想求 x_j，则由于所选坐标系的正交性及相随的单位矢量的正交性，就能十分容易地求出来。于是

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{a}_j=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=\sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij}=x_j \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克尔 δ。此例说明，我们能简单地求出一个特殊矢量分量的幅值。下面我们需要另外一项，即矢量 $\boldsymbol{f}$ 的模方 N。已知 N 的值，就可以使 $\boldsymbol{f}$ 归一化，即求出 $\boldsymbol{f}$ 方向上的单位矢量 $\boldsymbol{a}_f$。当我们已知

$$N=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i\cdot\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j=\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} x_i x_j \delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

就能求得 $\boldsymbol{f}$ 的单位矢量

$$\boldsymbol{a}_f=\frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{N}}$$

除非其中一个求和被积分所代替，前述有关矢量方面的全部概念都适用于函数。因此，如果我们有一个函数 $f(x)$，它定义在区间（a，b）上，则能把它展开成如下的一个正交函数组 $u_i(x)$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x) \tag{1-1}$$

式中 c_i 类似于 x_i，$u_i(x)$ 类似于 a_i。因而，现把求和扩展到无限大的整数，且把 $u_i(x)$ 的正交性表示如下

$$N\delta_{ij}=\int_a^b u_i(x)u_j(x)dx \tag{1-2}$$

式中 N 是 $u_i(x)$ 的模方。于是，我们采取十分类似于通常求 x_j 的方法求 c_j

$$\int_a^b f(x)u_j(x)dx=\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x)u_j(x)dx=c_jN$$

令 $i\to j$，得

$$c_j=\frac{1}{N}\int_a^b f(x)u_j(x)dx \tag{1-3}$$

下面我们将看到，式（1-2）中被积函数应该含有一个加权函数 $w(x)$。这里我们用 1 代替 $w(x)$ 以避免不必要的繁琐。

现在让我们转向作为这些引导概念一个特例的傅立叶问题[1]。此问题就是由下列 $2n+1$ 个正弦、余弦项之和来近似表示定义在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x)$：

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos kx+\sum_{k=1}^{n}B_k\sin kx$$

所要解的就是如何选择未知系数 A_k 和 B_k。这里的正弦、余弦函数 $\cos kx$ 和 $\sin kx$ 都是正交函数，它们满足下列关系：

---

〔1〕 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Inc., New York, 1949, p.2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{2\pi\delta_{kl}}{\epsilon_k} \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2 & k>0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = \pi\delta_{kl}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx = 0$$

式中 ϵ_k 是诺伊曼数。为了解答这个问题，傅立叶曾定义一个误差项

$$\Delta_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

并考虑均方差

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n^2(x) dx$$

的最小值。由此得下列两个关系

$$A_k = \frac{\epsilon_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$(1-4)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

推导式（1-4）的步骤留给学生作为习题。如果我们考虑误差项 $\Delta_n(x)$ 随同关系式(1-4)，则可看出，当 $n\to\infty$ 时误差项等于零，因而得到关系

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \tag{1-5}$$

式中系数 A_k、B_k 由式(1-4)给出。比较式（1-5）与式（1-1）及式(1-4)与式(1-3)，我们可看出，一个函数进行通常的正交函数展开类似于进行熟知的傅立叶级数展开。对本特例来说，在傅立叶级数展开式(1-5)中需要 $\sin kx$ 和 $\cos kx$ 两个正交函数组。这就有由式(1-4)所给的两组系数 A_k 和 B_k。我们立即可看出，因为在本特例中展开 $f(x)$ 需要两个正交函数组，所以象式（1-1）那样假定能由一个正交函数组来展开是不适合一般情况的。现在我们

将考虑这样一个问题，即一个任意函数能否展开成一个任意正交函数的级数。因而，必须解决的首要问题是如何确定一群函数是否正交。我们能够从斯特姆-刘维尔方程的研究中得到用来确定一个正交函数组的一般理论，此方程将在下节讨论。

1.2 斯特姆-刘维尔方程

在物理、化学和工程中，大多数有用的常微分方程是二阶的，并能用一般形式来表示：

$$L(u)+\lambda wu=0 \tag{1-6}$$

式中微分算子L定义为

$$L(u)=(pu')'-qu \tag{1-7}$$

p、q[2]和w（$w\geqslant 0$）诸量一般是x的函数，而λ是个常数。下面我们将看到函数$u(x)$是个本征函数，常数λ是其相应的本征值。式(1-7)中的撇号“$'$”是指对x的导数，而x未必是$u(x)$的自变量。让我们稍为离开主题来讨论本征函数的概念。在较低级的数学课程中所讨论的一般线性常微分方程都是常系数的，因此其解是由带若干任意常数的几项所组成。这些任意常数能够在特定问题下由给出的特殊边界条件来确定。可是，考察在应用数学领域中所遇到的一般微分方程，发现系数不再是常数。并且通解往往是以无限级数的形式求出来的。此外，发现把特殊的边界条件应用到特定问题中不能得到一个非零特解，除非解中的某些常数取特殊值。这些特殊的或特有的值被称为本征值，其特殊的解被称为本征函数。为了说明这些概念，让我们考虑把长L、质量线密度m和张力T的振动弦作为一个简单的例子。若令x为沿未扰动弦长度方向的变量，$u(x,t)$为点x和时间t的扰动位移，则u的运动方程为

〔2〕 q的符号有时宁可取正号而不取负号。参见G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc., New York, 1966, p. 331.

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1-8}$$

这是个二阶线性偏微分方程，其解可用分离变量法求得。可是，该方程是由达兰贝尔（1747）引入如下的变量代换来找出初始解的

$$\xi=x+\alpha_1 t \qquad \eta=x+\alpha_2 t$$

因而方程(1-8)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{1-9}$$

倘若 $\alpha_1+\alpha_2=0$ 并 $\alpha_1\alpha_2+(T/m)=0$。方程(1-9)的解是

$$\begin{aligned}u&=f(\xi)+g(\eta)\\&=f\left(x\pm\sqrt{\frac{T}{m}}\,t\right)+g\left(x\mp\sqrt{\frac{T}{m}}\,t\right)\end{aligned} \tag{1-10}$$

因为我们还没有给定关于弦两端的任何条件，所以解(1-10)代表两个行波。如果我们加上弦在 $x=0$，L 两端固定的边界条件，并采用分离变量法，则得方程(1-8)的通解

$$u(x,t)=[A\cos\beta t+B\sin\beta t]\left[C\cos\frac{\beta x}{\alpha}+D\sin\frac{\beta x}{\alpha}\right]$$

式中 $\alpha=\sqrt{T/m}$。$u(0,t)=0$ 的边界条件使 C 等于零。可是，不能用使 D 等于零来满足 $u(L,t)=0$ 的边界条件，这样一来解成为无效解。唯一可供选择的是令 $\sin(\beta L/\alpha)=0$，这表示

$$\frac{\beta L}{\alpha}=m\pi \qquad m=1,2,\cdots$$

因此，我们看到，这与熟知的常微分方程相比大不相同，常微分方程是采取给常数 A、B、C、D 选择特殊值的方法来满足边界条件，而解 $u(x,t)$ 除非参数 α 和 β 取特殊值否则就不能给以确定。对于 α 和 β 的每个特殊值，我们得到方程(1-8)的一个特解。那么，其最一般的解是如下一个无穷级数

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos \frac{m\pi\alpha}{L} t + B_m \sin \frac{m\pi\alpha}{L} t \right] \sin \frac{m\pi x}{L}$$

方程(1-8)的通解就是上面这个本征函数的级数，该本征函数有一群伴随着的本征值 $m\pi/L$。由此可知，若其中 α 和 β 的值异于本征值 $m\pi/L$，则方程（1-8）的解必定是无效(零)解[3]。

现在让我们返回到一般方程（1-6），并指出函数 $u(x)$ 都是正交函数，即具有式(1-2)所示的那种特性。我们还会发现，式(1-2)中的正交性定义不足以一般地包括所有满足斯特姆-刘维尔方程的函数。因为函数 $u(x)$ 满足斯特姆-刘维尔方程(1-6)，所以具有其相应本征值 λ_i 和 λ_j 的两个特定的本征函数 $u_i(x)$ 和 $u_j(x)$ 分别满足方程(1-6)，因此

$$L(u_i) + \lambda_i w u_i = 0$$

$$L(u_j) + \lambda_j w u_j = 0 \qquad (1-11)$$

现在我们应用标准方法（此方法也用来推导标量或矢量形式的两个格林恒等式），用 u_j 乘第一个方程，用 $-u_i$ 乘第二个方程，两式相加，随后在区间 (a, b) 上积分，得

$$\int_a^b [u_j L(u_i) - u_i L(u_j)] dx$$

$$= (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b w u_i u_j dx = [p(u_j u_i' - u_i u_j')]_a^b \qquad (1-12)$$

将式(1-7)的 $L(u_i)$ 和 $L(u_j)$ 代入上面的第一式中，就得到第三式。由于一般的边界条件

$$[p(u_j u_i' - u_i u_j')]_a^b = 0 \qquad (1-13)$$

使第三式等于零。当写成这种形式时，注意有各种条件能满足正交所需的边界条件，例如

$$p u_j u_i']_a = p u_i u_j']_b$$

$$p(a) = p(b) = 0$$

---

[3] H. Sagan, *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961, Chap. 5.

$$p(a)=0=u_i(b)$$
$$u_j(a)=u_i(b)=0$$
$$u_i'(a)=u_j'(b)=0$$

当满足这些边界条件时，我们就得到正交的表达式

$$\int_a^b wu_iu_jdx=0(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$

只要 $\lambda_i\neq\lambda$，上述表达式的右边就等于零。大多数有意义的情况是 $u_i\neq u_j$ 且 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 的情况，因此其正交条件是有效的。但是，两种有意义的情况例外，它们往往出现在 $u_i\neq u_j$ 而 $\lambda_i=\lambda_j$ 的场合中。其第一种情况，由于 u_i 和 u_j 的本征值相等，u_i 和 u_j 都是方程（1-6）的退化解。第二种情况，由于相同的本征值 λ_i，u_i 和 u_j 是方程（1-6）的两个线性无关的解。这后一种情况导出一个含有郎斯基多项式的表达式。

如果考虑第一种情况，这里本征函数都是退化函数，则我们发现，在高于一维的电磁学问题中能够遇到这种情况。例如，本征函数 $u_{12}=\sin(\pi x/a)\sin(2\pi y/b)$ 和 $u_{21}=\sin(2\pi x/a)\sin(\pi y/b)$ 分别对应于本征值

$$\lambda_{12}=\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \text{ 和 } \lambda_{21}=\left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

一般说来，除 $a=b$ 外本征值 λ_{12} 与 λ_{21} 不同。当 $a=b$ 时，两个本征值相等，而 $u_{12}\neq u_{21}$。因此本征函数都是退化的。这时可看出，不管 λ_{12} 和 λ_{21} 是否不同或相同，本征函数 u_{12} 和 u_{21} 都是正交的。既然边界或边界条件稍稍改变不会改变问题的物理本质，所以我们明了，由上述退化所引起的困难只是数学上的不足而不是一些异常的物理现象。然而，物理上的退化问题在客观世界中是比较常见的，它不但常常出现在电磁学问题[4]中而且还出现在

〔4〕 R. Wangsness, *Introduction to Theoretical Physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963, p.193.

经典力学[5]和量子力学[6]问题中。那么这种情形就是，几个特殊状态或模也许具有相同的能或者占有相同的能级。

另一种例外而有意义的情况出现在 $u_i \neq u_j$ 时，因为由于相同的本征值 λ_i，u_i 和 u_j 是方程(1-6)的两个线性无关的解。换句话说，u_j 并不是方程（1-6）的一个通解而是两个线性无关解中的一个解 U。如果我们令另一个线性无关解是 V，则得

$$\int_a^b wUVdx = \frac{0}{0}$$

尽管，这积分是不定的，求其值没有多大意义，还是让我们考虑当 $u_i = U$，$u_j = V$ 并忽略上下限时式（1-12）中的第一式和第三式。于是

$$\int [VL(U) - UL(V)]dx = p(VU' - UV') = pW(V, U)$$

式中 $W(V, U)$ 是 V 和 U 的郎斯基多项式[7]。如果郎斯基多项式等于零，则 U 和 V 就不是方程（1-6）的线性无关解。如果我们把式（1-7）中 $L(V)$ 和 $L(U)$ 的表达式代入上述积分的左边，则得

$$\int [p(VU' - UV')]' dx$$
$$= \int [pW(V, U)]' dx = pW(V, U) \neq 0$$

可惜，因为我们不知道其右边，所以这个含有郎斯基多项式的表达式对我们用处不大。事实上，因为在式（1-11）的第二式中 $\lambda_i = \lambda_j$，所以可期望其右边等于零。然而，这种困难是由于我们在式（1-11）中隐含的假定（$\lambda_i \neq \lambda_j$）所产生的。当式(1-11)中

---

[5] R. Wangsness, *Introduction to Theoretical Physics*, p.314.

[6] R. Wangsness, *Introductory Topics in Theoretical Physics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963, p.232.

[7] H. Margenau and G. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1943, p.130.

$\lambda_i=\lambda_j$时，式(1-12)中第二式就不再出现了，因为我们由$u_i=U$及$u_j=V$得到

$$VL(U)-UL(V)=0=[pW(V,U)]'$$

因而

$$pW(V,U)=c \tag{1-14}$$

式中c对x是个常数。我们讲述上面所遇到的困难之理由是为了强调斯特姆-刘维尔方程不是特别适用于求郎斯基多项式或求模方。求模方非常类似于我们刚才所讨论的情况，只是现在$u_i=u_j=U=V$或$u_i=u_j=AU+BV$。因为式(1-12)中的第二式给我们一个正确的一般模方表达式

$$\int_a^b wu_i^2dx=N$$

并且给我们一个一般正交表达式

$$\int_a^b wu_iu_jdx=N\delta_{ij} \tag{1-15}$$

所以此时我们发现，式(1-2)的模方表达式不够一般化。

如果我们再考虑式(1-12)中第一式，则发现

$$\int_a^b u_jL(u_i)\,dx=\int_a^b u_iL(u_j)dx \qquad i\neq j$$

算子L称为埃尔米特算子。同时，本征函数u_i和u_j可能为复数，这时必须修正上述表达式和式(1-11)。可是，本征值λ_i和λ_j依旧是实数。有关自伴算子和埃尔米特算子的详细细节可以在别的文献[8]中找到。

1.3 正交函数

本节我们考虑在电磁学理论中经常出现的一些正交函数。假定学生通晓这些函数和这些函数所满足的各种微分方程以及解这

[8] 同上，pp. 255，328. 还可参见 Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chap. 9。