

航空燃气轮机振动和减振

晏 丽 堂 编著

30672105

国防工业出版社

V231
19

30672105

航空燃气轮机振动和减振

晏砾堂 编著

41257/14



国防工业出版社



C0002230

内 容 简 介

本书以航空燃气轮机振动和减振问题为主线,阐述了高速旋转机械动力学的基本原理、分析方法和减振技术。这些原理、方法和技术可推广应用到各类工业旋转机械中去。书中内容包括:整机振动的简便估算方法;转子支承系统的临界转速和不平衡响应;自激振动和稳定性;弹性支承特性和设计;挤压油膜阻尼器的工作原理;带挤压油膜阻尼器转子动力特性计算方法以及高速转子的本机平衡等共十四章。

本书可作为高等院校有关机械专业、动力专业等学生或研究生的教材或参考书。亦可供从事旋转机械教学、设计、研究、生产和维修等教师、科研和技术人员参考。

航空燃气轮机振动和减振

晏朝堂 编著

责任编辑 林国方

*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张11³/₈ 300千字

1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷 印数: 001—800册

ISBN 7-118-00433-2/V·36 定价: 9.25元

序 言

整机振动和减振是高速旋转机械的主要问题之一。目前这方面的教材和参考书籍还很少,远远不能满足广大科技人员的需要。编者试图为从事有关旋转机械工作的科技人员提供一本重要参考书。

本书的编写以航空燃气轮机振动和减振问题为主线,推论到各类旋转机械。希望将一些研究航空燃气轮机整机振动和减振的技术介绍和应用到各类旋转机械中去。书中既有早已成熟目前还能应用的理论和方法,也包含国内、外新近的有关科研成果。

本书以工程应用为目的,理论尽量联系实际和应用,并为读者运用基本原理。定性、定量地综合分析和解决振动问题打下基础。书中编排基本上是由浅入深、由简到繁,便于读者掌握。

学习本书之前要有理论力学、材料力学和数学基础,特别是矩阵基础以及一般工程技术知识。本书适于作为大、专院校有关机械专业高年级学生或研究生的教材或参考书。也适合具有大、专水平从事有关旋转机械的科研、技术工作人员参考。

书后附有部分有关参考资料,供读者查阅。

参加本书审校的有齐午、严厉、林斌和庞中辉等。由于编者水平有限、编写时间短促,错误、欠妥之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 发动机振动概述	1
§ 1 发动机振动的重要性	1
§ 2 发动机振动的产生	1
§ 3 发动机振动的测试	3
§ 4 减小发动机振动的方法	5
第二章 估计发动机振动的简易方法	7
§ 1 无阻单自由度振动法	7
§ 2 无阻二自由度振动法	14
§ 3 有阻单自由度振动法	20
第三章 转子的临界转速概念	26
§ 1 概述	26
§ 2 转子的临界转速现象	27
§ 3 几种重要因素对转子临界转速现象的影响	33
§ 4 转子旋转与不旋转时的振动	52
§ 5 转子过临界时的质心转向现象	57
第四章 转子动力特性实验测试法	61
§ 1 概述	61
§ 2 实验设备和仪器	62
§ 3 转子动力特性的测量方法	66
§ 4 转子质心转向现象的观察和测定	69
§ 5 转子临界转速测定法	73
§ 6 模型转子实验设备仪器举例	76
第五章 单转子系统临界转速计算法	78
§ 1 转子系统的计算模型	79
§ 2 单元和单元传递矩阵	80
§ 3 Myklestad和Prohl传递矩阵计算法	84
§ 4 Riccati传递矩阵法	90

§ 5 直接解高次方程法	92
第六章 单转子不平衡响应的计算法	97
§ 1 坐标的选取	98
§ 2 单元传递矩阵	99
§ 3 用传递矩阵计算单转子响应的方法	107
§ 4 用Riccati法计算单转子响应的方法	113
第七章 复杂转子的临界转速和响应计算	116
§ 1 多转子系统计算中的几个问题	117
§ 2 计算复杂转子振动的子结构传递矩阵法	121
§ 3 考虑等截面轴段质量的单元传递矩阵	136
§ 4 子结构传递矩阵——Riccati法	145
§ 5 影响系数——Riccati法	146
第八章 转子临界转速和响应的有限元分析法	149
§ 1 概述	149
§ 2 简化模型与坐标系	149
§ 3 元素的运动方程	153
§ 4 单转子系统的运动方程	159
§ 5 单转子系统的临界转速和不平衡响应	160
§ 6 模态综合法简介	164
第九章 发动机转子系统的自激振动和稳定性	170
§ 1 概述	170
§ 2 转轴材料内阻激起的振动和失稳	171
§ 3 花键联轴器引起的自激振动和失稳	183
§ 4 带滑动轴承的转子的自激振动	188
§ 5 流体封严装置引起的自激振动	192
§ 6 叶轮偏心进动时周向气体力引起的自激振动	193
§ 7 转子内部积液引起的自激振动	197
§ 8 转子与固定件间的干摩擦引起的自激振动	198
§ 9 转轴刚性异性引起的失稳	202
§ 10 自激振动的判断和避免	204
第十章 发动机中采用的弹性支承	208
§ 1 概述	208

§ 2 弹性支承的结构和类型	209
§ 3 弹性支承转子的临界转速特性	214
§ 4 弹性支承的刚度和强度	219
§ 5 变刚性的弹性支承	229
§ 6 弹性支承的设计步骤	235
§ 7 几种弹性支承的有关参考数据	236
第十一章 挤压油膜阻尼器	239
§ 1 概述	239
§ 2 挤压油膜阻尼器工作原理和构造	240
§ 3 挤压油膜阻尼器的雷诺方程	244
§ 4 常见的阻尼器工作条件和相应的雷诺方程	252
§ 5 “短”、“长”阻尼器的油膜压力分布和油膜力	255
§ 6 阻尼器的四项刚度系数和四项阻尼系数	264
§ 7 固定坐标系的雷诺方程和油膜力	268
§ 8 无定心阻尼器和有限长阻尼器	271
§ 9 挤压油膜阻尼器的设计	272
第十二章 带阻尼器转子系统的动力特性计算	277
§ 1 带阻尼器的刚性转子的稳态特性	278
§ 2 带阻尼器的柔性转子的稳态特性计算	284
§ 3 带阻尼器的柔性转子的稳定性计算	292
§ 4 带阻尼器的柔性转子的瞬态响应计算	296
第十三章 高速转子的本机平衡	302
§ 1 概述	302
§ 2 不平衡量的测试和刚性转子的平衡	303
§ 3 柔性转子的本机平衡	308
第十四章 简易本机平衡法	336
§ 1 概述	336
§ 2 几种测试不平衡向量的简易方法	337
§ 3 简易本机平衡法	343
§ 4 支承刚性异性转子系统的简易平衡法	345
参考资料	353

第一章 发动机振动概述

§ 1 发动机振动的重要性

发动机振动又称整机振动，是指整台发动机装在试车台架上或飞机的安装架上时，发动机和机架整个系统的振动。同一台发动机其所用机架不同，振动也不相同。有时发动机振动一词也包括发动机的主要零、部件的振动，多数情况下则不包括零、部件的振动。本书研究的是整台发动机和机架系统的振动。

通常把发动机比做飞机的心脏，发动机振动就好比是脉搏。发动机出了故障就好象飞机患了心脏病，严重时会引起飞行事故，甚至机毁人亡。

发动机振动是难免的，但振动大了会使飞行人员不适、疲劳，甚至无法工作；会使仪表失灵；会引起各种零件的损坏。根据经验，发动机中许多零件、附件以及飞机上的一些仪表、零件等的提前损坏常常与发动机振动有关。因此发动机振动应加以控制。即使发动机性能很好，在工厂试车中如发动机振动超过规定指标，发动机就不允许出厂。在飞机飞行中发动机振动超过规定时，如飞机上装有多台发动机，还可用另外的发动机继续飞行，否则就应立即着陆，进行检修。

发动机振动所以特别重要，除了它能使零件损坏，飞行人员疲劳不适之外，正如脉搏失常是人的病兆一样，发动机振动失常还透露出了发动机中有潜伏故障的信息。如不及时加以检查、排除，就有造成严重恶果的可能。

§ 2 发动机振动的产生

发动机结构复杂，零件很多，工作情况多变，能激发起发动机振动的力和因素很多。不仅不同类型发动机中各种激振力的大

小不同、性质各异,就是同一型号发动机中各台发动机的激振力的情况也有差别。这些激振力主要来自转子的不平衡和临界转速,其次是零件产生的激振力。例如各种齿轮的轮齿撞击,轴承制造误差、磨损或缺陷,传动轴和齿轮的不平衡,各种旋转零件装配不当,紧度、间隙或同心度超差等都能产生激振力。另一类激振力是由气体产生,例如进气道中气流畸变,压气机放气或喘振,燃烧室燃烧不稳定或发生振荡燃烧,喷油嘴个别堵塞或损坏、燃油管设计不当或油管振坏引起的不正常燃烧等都会产生对发动机激振的力。涡轮螺旋桨发动机因桨叶数目有限,桨叶后气流不均或遇到发动机上某些零、组件阻碍也能激起发动机振动。此外,发动机中还有多种因素可能引起自激振动和参数振动等。由于激振力是各式各样的,它们的大小不同,频率迥异,再加以发动机中某些结构的非线性,产生的发动机振动就非常复杂。振动频率是多种频率的混合,频带很宽。

发动机中也存在着多种阻振力,可减小振动。它们是零、组件之间的摩擦力,结构材料的内阻力,滑油等的液体阻力,空气和燃气的气动阻力等。由于航空发动机绝大多数采用滚动轴承,轴承中滑油的阻力很小,相对于滑动式轴颈轴承来说,滚动轴承可以说是一种无阻尼轴承。为此有不少航空发动机采用了人工阻尼器——挤压油膜阻尼器,以减小发动机振动。所有的激振力和激振因素都是迫使发动机振动,激振力越大,激起的振动也大。各种阻振力则力使减小振动。各种激振力,阻振力也并不是全都存在,其大小也不是恒定不变。但对于一定型号的发动机来说,因为结构形式,采用材料、工艺方法等都是同样的,只是零件所用材料的均匀程度和热处理上有细微差别,尺寸有一定公差,发动机工作条件也允许在一定范围内变化。所以对于一定型号的发动机来说,正常情况下各种力包括激振力、阻振力和零件的弹性力等都是在一定范围以内,故表现出来的发动机的各种振动成分的大小和频率范围都是在一定的范围内变化的。这种范围的大小可以经过对许多台典型发动机的振动测试和

分析得出来。不同型号的发动机得出的结果不同，就是不同的仪器和测试的方法作出的结果也有差别。正如人的脉搏一样，男、女、老、少并不完全一样，但各有一定的范围。超出了常规的范围，对人来说可能是病的征兆，对发动机来说，发动机振动出了常规意味着发动机故障或是事故的前兆。所谓振动超过了规定范围，一般来讲都是振动偏大。振动过大固然会造成危害。但也应注意到，振动忽然过小也不是好兆头。这可能是振动阻力加大，或某种新的阻振力产生。可能是某些零件发生了摩擦，或某种零件出现了裂纹，在零件未断开之前，裂纹处产生了摩擦以减小振动。所以振动忽然异常减小只是暂时现象，大的故障可能随之而来。有时发动机总振动不很大，而其成分分配异常，这也是某种零件可能出现故障的迹象。

§ 3 发动机振动的测试

随着航空事业的发展，对发动机振动测量的要求越来越高，振动测量的项目也越多。不仅发动机新品出厂，旧品翻修后验收都要测试发动机振动以检查是否符合规定范围，就是在飞机飞行中也常测量发动机的振动数据，以了解发动机是否工作正常。

振动测试设备分传感器、二次仪表、记录和分析设备。传感器有位移传感器、速度传感器和加速度传感器等类型。位移传感器主要用于监测风扇转子和压气机转子等的振动，当前用得较多的是涡流式传感器。这种是非接触式，因为是在高频范围内使被测金属接近激励振荡线圈，根据涡电流损失来测定线圈的电抗变化，所以在滑油或其它化学物质等环境下仍能使用。速度传感器过去在发动机整机振动测试中用的很多，因其有运动零件，不适于作高频范围的测量。而且其横向刚性不高，在较大横向振动下容易严重失真，产生大量低频波，测量误差大，且容易损坏。速度传感器的应用已渐减少，目前正在广泛采用压电晶体加速度计。这种传感器体积小、重量轻、无机械运动件不易损坏，适用频率范围高，灵敏度高。

作整机振动测试时,过去传感器位置多在压气机机匣上,主要测水平方向,有时也测垂直方向的横向振动,后来也装在进气机匣和涡轮机匣上,以进行多点测量。为了更好地测出发动机振动,监视发动机的工作,要求传感器安装位置尽量靠近振源中心,最好有传感器装在发动机内部。测振频率范围过去是在发动机工作转速附近,即频率范围为 $45 \sim 1500\text{Hz}$ 。其目的是测出转子不平衡力等引起的振动。为了便于分析找出各种引起发动机振动的原因,有利于排除故障,现在测振频率范围加宽到从 1 到 25000Hz ,或至少从 5 到 10000Hz 。

测试仪器一般包括前置放大器、运算网络、滤波器、指示仪表、示波器或记录示波器等,有时还用跟踪滤波器。分析仪器用频谱分析仪、多功能分析仪、实时分析仪。更完善一些的则是采用小型计算机为中心的包括数据处理、显示等的数字讯号分析技术。

为确保飞机飞行安全,对发动机振动值应加以限制。限制数据视发动机型号而不同,由试验和分析得出。现代航空发动机有的规定限制振动加速度,有的规定限制振动位移,也有规定限制振动速度的。这与发动机转速高低,使用的测振仪表系统以及工厂习惯和经验有关。有人研究过当以航空发动机振动强度作为判据时,在振频为 $10 \sim 750\text{Hz}$ 范围以振动速度作为判据较合适。对于谐波振动建议限制振动速度为 $30 \sim 60\text{mm/s}$ 。对于复杂振动限制的速度取为 $v = (\pi/2)v_m$, 其中 v_m 是振动速度的算术平均值。如果高频振动成分很多、较大,就应限制振动加速度。如发动机转速低或低频振动为主时,则应限制振动位移量。

在民航机上普遍采用发动机振动监测技术。军用机上采用振动监测的也日益增多。监测主要是监测发动机转子引起的振动。因为转子是发动机的主要部件,是发动机振动的主要振源。转子既是比较容易发生故障,而一旦发生故障又是容易引起重大飞行事故。当然如果某型发动机已知其某种零件容易振动损坏,也可对该种零件的振动进行监测。振动监测所需的仪器设备基本上与

地面测振用的相同。但传感器要尽量靠近要监测其振动的零、部件。视具体情况和需要，传感器有必要小型化、耐高温或滑油浸蚀等。其它仪器设备也宜小而轻，便于机载。此外还需要报警系统。

由于航空事业的发展，航空发动机的振动测试日益显得重要。发动机故障振动诊断也已提上日程。所谓发动机故障振动诊断，就是通过测试出发动机的振动信号以诊查出发动机中某些故障产生的部位和原因，以便采取相应的排除措施。测量发动机振动的作用就和中医诊病摸脉一样。有经验的中医在了解一些症状之后一旦摸清人的脉相就能判断出人的病症，然后可对症下药，药到病除。发动机诊断与此很相似，也希望一旦测出发动机的振动信号，就能判断出发动机中的故障所在。这就要事前研究清楚发动机中一些与振动有关的故障所对应的振动特征。这主要是要研究清楚某些零件或故障引起的振动特性曲线和振动频率，这种频率叫特征频率。比如在双转子发动机中，高、低压转子不平衡力激起的振动频率应分别等于高、低压转子的转速。某些齿轮激起的振动频率与该齿轮齿数及转速有关。其它故障如轴承损坏、振荡燃烧、各种自激振动、参数振动等其频率和振动特性曲线也各有特点。当将各种振动特征研究清楚后，通过测振和微处理机分析、处理，也就能象某些中医用电子计算机诊病一样很快能显示出发动机中某些故障所在。

§ 4 减小发动机振动的方法

发动机振动过大会引起种种危害，故必须设法减小。由于发动机中激起发动机振动的力和因素很多，首先应注意减少激振因素，减小各种激振力。这就需要仔细设计，仔细加工，严格控制材料，认真执行工厂各种生产规程和管理制度。发动机使用也要严格按照技术规范进行。例如装配不当就很容易引起发动机的较大振动；某些发动机停机后因热气上升，冷气下沉，轴上、下部热膨胀量不同，轴要发生热弯曲，一般发动机停机后半小时左右

(视具体发动机而有所不同)轴的弯曲最厉害,此时如再开车,就会引起发动机较大振动。

除了要求仔细设计、生产和使用外,现代发动机中还采用了一些有效的减振措施。措施之一是采用弹性支承。它的刚性比轴的刚性低许多,所以又叫低刚性弹性支承。它不仅可将转子系统的临界转速降低,还使转子成为“刚性”转子,将能引起大振动的转子的“弯曲临界”移到工作转速以上,工作中不会遇到“弯曲临界”。而通过低阶临界时,转子基本不弯曲,不会引起发动机的大振动。

挤压油膜阻尼器是六十年代首先在航空发动机上采用的一种减振装置。它构造简单、重量轻、减振效果好,很适于在航空发动机上应用。所以现代航空发动机应用挤压油膜阻尼器的日多。它不仅可用来减小转子的振动以顺利通过临界转速,还可减小其它零、组件的振动,以延长发动机寿命。

航空发动机因转速高、工作温度高,叶片与盘的联接等结构都采用松动式。其次,为了减轻发动机重量,现代航空发动机都采用了柔轴设计,生产中原来应用的在平衡机上进行的转子低速平衡,误差很大,难以保证在发动机工作状态下载转子的平衡性。所以新近研制的航空发动机多采用了本机平衡法。即在发动机工作状态下再对转子进行平衡,这样就大大提高了转子在工作时的平衡性,有效地控制了发动机的振动。

关于这些有效的减小发动机振动的方法将在以后有关各章中介绍。

第二章 估计发动机振动的简易方法

前已提到发动机结构复杂，激振力繁多，因而发动机振动复杂。要详细研究发动机的振动，找出精确的计算方法是很困难的。下面我们先讨论一些估计发动机振动的简易方法。这些方法虽嫌粗略不能用它们来分析求出发动机振动的准确数据，但它能帮助我们解释某些振动现象，了解一些振动基本概念，定性地分析、估计出振动的结果。这种结果可作相对比较之用，在生产实际中对分析问题、解决实际问题有一定的价值。

§ 1 无阻单自由度振动法

最简单的分析方法是将整台发动机简化成一个集中质量 m 。机架质量远比发动机的小，可忽略不计，将机架看成有刚性 k 而无质量的弹性体。发动机中激振力虽多，但最主要的是转子的不平衡力。此力不论在垂直或水平方向都是一种简谐力，设为 $p_0 \sin \omega t$ 。 ω 是转子的角速度， t 是时间。发动机中如无人工阻尼，自然阻尼很小，可忽略不计。这样就将发动机机架系统简化为一个具有简谐激振力 $p = p_0 \sin \omega t$ 作用的无阻单质量的单自由度系统如图 2.1 所示。发动机仅作上下振动。

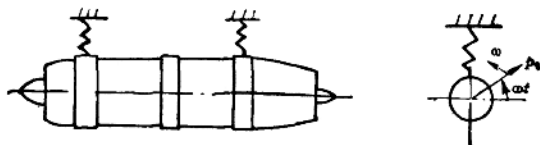


图2.1 发动机简化成单自由度振动系统

发动机振动时，除有不平衡力作用外尚有机架的弹性力作用。后者的方向恒与振动位移方向相反。根据牛顿第二运动定律可列

出振动微分方程。

$$m\ddot{x} + kx = p_0 \sin \omega t \quad (2-1 a)$$

式中 x —— 发动机振动位移；

p_0 —— 发动机转子的不平衡力；

$\ddot{x}$ —— x 上的点表示 x 对时间求导，两点表示二次导数，即加速度。

当 $p_0 = 0$ ，即不存在长时作用的激振力，此时发生的振动为自由振动。由数学分析知振动为

$$x = A \sin \omega_n t \quad (2-2)$$

式中 A —— 振幅；

ω_n —— 自由振动频率。

将式 (2-2) 及其二次导数代入式 (2-1 a) 得

$$A(k - m\omega_n^2) = 0 \quad (2-3)$$

上式表明有两种可能： $A = 0$ 或 $(k - m\omega_n^2) = 0$ 。前者说明不会发生振动；后者则表明如有振动 ($A \neq 0$) 则必然有 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 即自由振动圆频率（也常称固有频率）为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-4)$$

而且单自由度系统的自由振动必为简谐振动如式 (2-2) 所示。振幅 A 为不定值，它取决于初始条件。

由式 (2-4) 可知自由振动频率不仅与发动机质量 m 有关，且与机架刚性有关。

当 $p_0 \neq 0$ 时，将发生强迫振动。因 $p_0 = q\omega^2$ ， q 为发动机转子的不平衡量，式 (2-1 a) 可写成

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = (q\omega^2/m) \sin \omega t \quad (2-1 b)$$

因激振力为简谐力又无阻尼，发动机将作与激振力同相位同频率的简谐振动

$$x = A \sin \omega t \quad (2-5)$$

将式 (2-5) 代入式 (2-1 b) 解之得

$$A = \frac{q\omega^2/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2-6)$$

可见当 $\omega = \omega_n$ 时, $A = \infty$, 即发生共振。为减小发动机振动, 除尽量减小激振力 p_0 之外还应使 ω 远离 ω_n 。因 ω 与 m 取决于发动机设计, 不能任意变动, 故应在选取机架刚性 k 上注意, 使 ω_n 与 ω 相差较大。

发动机振动时传给飞机的力称外力。由图 2.1 看出是

$$F = kx$$

由式 (2-1 a) 和 (2-2) 知 $kx = (p_0 + m\omega^2 A)\sin\omega t$ 因为 p_0 相对于 $m\omega^2 A$ 来说很小, 且 p_0 又是不便测知的数值, 为方便计略去 p_0 , 故得

$$F \approx m\omega^2 A \sin\omega t \quad (2-7 a)$$

上式表明发动机振动时传到飞机上去的力是交变的简谐力, 它将引起飞机及其上面的仪表、零件等振动。

发动机振动传给飞机的最大力为

$$F_{\max} \approx m\omega^2 A \quad (2-7 b)$$

如发动机无振动, 其传给飞机的横向力仅是发动机的重量(不计转子的不平衡力) mg 。发动机因振动而传给飞机的力往往是发动机重量的若干倍, 这个倍数称之为发动机振动过荷系数, 通常以 K 表示

$$K = \frac{m\omega^2 A}{mg} = \frac{A\omega^2}{g} \quad (2-8)$$

可见振动过荷系数也是振动加速度与重力加速度的比值。为了实用上的方便用全幅 $s(\text{mm})$, ($A = s/20$), 频率 $f(\text{Hz})$, ($\omega = 2\pi f$), 重力加速度 $g = 981(\text{cm/s}^2)$, 上式于是为

$$K \approx \frac{sf}{500} \quad (2-9)$$

这就是发动机振动过荷系数的计算式。将测出的 s 、 f 值代入便可算出 K 值。现今许多航空发动机就是应用上式来计算 K 值, 并以此来评价发动机的振动大小的。不同型号的发动机都规定有在

某几种条件下允许的几种 K 值。 K 值是无纲量的, 但习惯上常用 g 为单位, 这实际上是指发动机的振动加速度。

实际发动机中存在多种多样的激振力。有的是简谐变化的, 也有的不是。但只要是周期性变化的力就可将它按付里叶级数展开, 分解成许多个不同频不同相的简谐力:

$$\begin{aligned} p(\omega t) &= p_0^* + p_1 \sin(\omega t + \phi_1) + p_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \cdots \\ &\quad + p_i \sin(i\omega t + \phi_i) + \cdots \\ &= p_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sin(i\omega t + \phi_i) \end{aligned} \quad (2-10)$$

式中 p_0^* 为常数, 它不引起振动, 故激振力不考虑它。由于通常高频成分, 即 i 很大时的 p_i 较小, 所以一般只取前面几项至十几项就够了。这样, 取其中任一项来看, 激振力都是简谐力。

发动机虽结构复杂, 但在宏观上可视为线性系统。一个存在多种激振力的线性系统的振动, 是由各个激振力激起的振动迭加起来的。

两个同频但不同幅、不同相的振动迭加起来为

$$x = x_1 \sin \omega t + x_2 \sin(\omega t + \phi) \quad (2-11)$$

展开得

$$x = (x_1 + x_2 \cos \phi) \sin \omega t + x_2 \sin \phi \cos \omega t$$

上式中如令

$$A \cos \alpha = x_1 + x_2 \cos \phi, \quad A \sin \alpha = x_2 \sin \phi \quad (2-12)$$

则得

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (2-13)$$

求得

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{(x_1 + x_2 \cos \phi)^2 + (x_2 \sin \phi)^2} \\ \alpha &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_2 \sin \phi}{x_1 + x_2 \cos \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

可见迭加后仍是频率不变的简谐振动, 只是振幅和相位有所改变。

两个频率、振幅、相位均不同的振动迭加可写为

$$x = x_1 \sin \omega_1 t + x_2 \sin(\omega_2 t + \phi) \quad (2-15)$$