高等学校教学用书

微分几何

王申怀 刘继志 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微分几何

王申怀 刘继志 编

北京师范大学出版社

责任编辑　王文湧

高等学校教学用书

微分几何

王申怀　刘继志　编

*

北京师范大学出版社出版

全 国 新 华 书 店 经 销

北京师范大学印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：11　字数：268千

1988年9月第1版　　1988年9月第1次印刷

印数：1——4 000

ISBN7-303-00036-4/O·2

定价：2.65

内 容 提 要

本书是近年来北京师范大学数学系本科学生所用的微分几何讲义加以改编而成的。全书共分六章，主要介绍了曲线论，曲面的第一，第二基本形式，曲面的基本定理及曲面的内在几何。每节后附有一定数量的习题，每章后附有复习题及小结，并附有习题解答。

本书可作为大专院校本科生教材，也可作为中学教师业务进修用书或可供其它科技工作人员参考。

出 版 说 明

北京师范大学是一所具有八十多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的。为了加强教材建设，加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，编写出版一套教材。编委会在研究当前学科发展的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部1984年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论。组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订。

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学（物理、天文、无线电等专业用）。

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学系统性较强。每章有小结，每节（或几节）后配有习题。每章有总复习题，习题安排由易而难，层次清楚。书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业。

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“＊”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去。

这套教材可供高等师范院校本科生（或专科）、教育学院数学系、函授（数学专业）、在职中学教师进修等使用。

前　言

本书基本上根据1984年原教育部颁布的中学教师进修高等师范本科《微分几何教学大纲》编写的，部分章节作了较为深入的叙述，以适应其它高等院校数学系本科生的需要，因此本书既可作为中学教师进修用教材，也可作为师范院校数学系本科生的教材。

本书共分六章，第一章介绍向量代数及向量分析，作为学习微分几何的预备知识；第二章介绍曲线论，仅限于讨论曲线的局部性质，包括曲线的曲率，挠率等概念以及曲线论基本定理。在本章最后一节详细地讨论了平面曲线的性质；第三章介绍曲面的第一基本形式及其与第一基本形式有关的曲面几何性质，这是属于曲面内在几何的内容。本章最后介绍了等距对应和等角对应；第四章介绍了曲面的第二基本形式，着重讨论了曲面上的各种曲率，包括法曲率，主曲率，中曲率，高斯曲率等。同时引出曲面上的一些重要的曲线，如曲率线，渐近曲线等，并在§7、§8两节中单独讨论了可展曲面与极小曲面；第五章介绍曲面论的基本公式，即高斯公式与魏因加尔吞公式以及曲面论的基本定理；第六章介绍了曲面的内在几何。这是第四章的继续，着重介绍的是测地线，常曲率曲面，高斯－波涅公式以及曲面上的平行移动等。

学习本书的基础知识是解析几何与数学分析，并需要用到一些常微分方程及线性代数的初步知识，有关这些内容在一般的教科书中都可以找到。

此外，在每一节后都配备了一定数量的习题。有些习题是帮

助读者理解正文所述的概念，有些习题是帮助读者掌握正文中所述的公式。另外在每章后面都配有复习题及小结，以便自学者能对该章有一个概括的了解。在本书最后附有部分习题的解答或提示。这里需要强调一点，本书所配备的习题都是一些基本练习，一般都不太难（除去有*号者外），它们是全书的有机组成部分，对理解正文有极其重要的意义，所以读者对习题不可忽视。

本书初稿曾在1983年春季在北京市职工业余大学数学班试教过一次，并经过修改后印成讲义在北京师范大学数学系本科生中教过两遍。根据这几次试讲的经验，全课程讲授时间约为70学时左右，亦即每周以4学时计算，一学期之内是完全可以讲完的。

本书编写过程中自始至终都是本人与刘继志同志共同商讨的。初稿完成后，陈绍菱教授仔细审阅了全部手稿，并提出了许多改进意见，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中一定有许多不当之处，也可能有许多缺点或错误，盼望读者批评指正。

王申怀

一九八七年四月

目　录

第一章　预备知识

§1. 向量代数复习

在空间解析几何中，我们已经学习过向量代数，这里仅作简单扼要的复习。

我们把一个既有大小又有方向的量称为**向量**或称**矢量**．例如：力、速度、加速度等都是向量．一条有向线段就是一个直观的向量．

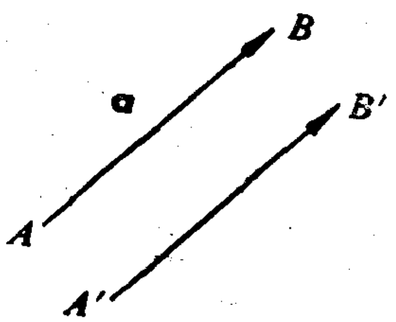
图　1.1

我们把只有大小（而无方向）的量称为**数量**．例如：长度、时间、温度等．在取定单位以后，它们均可用一个实数来表示．

设 A, B 是空间的两点，A'，B' 是空间的另外两点，且有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 等长而同向（即平行且方向一致，见图1.1），则 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 在大小和方向这两个要素上完全一样．很自然地我们把它们看成相等的量，即作为同一个向量．因此向量只是表示空间两点的位差，而无特定的位置．一个向量可以自由平移，今后为了讨论问题的方便，如有必要常把几个向量移到同一始点——坐标原点．

一般我们用两个字母和一个箭头的记号 $\overrightarrow{AB}$ 来表示一个向量，或用一个黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 来表示它，有时也用一个字母和一个箭头 $\vec{a}$ 来表示．因此图1.1中两个向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相等的，我们

记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

表示向量长度的数值称为向量的**模**或称向量的**长度**，用记号$|\overrightarrow{OA}|$或$|\boldsymbol{a}|$表示，模等于1的向量称为**单位向量**。模等于零的向量称为**零向量**。记作$\boldsymbol{0}$，在不会引起误解的情况下，零向量也可简记作0，模相等而方向相反的向量称为**负向量**或**反向量**。$\overrightarrow{OA}$的负向量可以记作$-\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{a}$的负向量可记作$-\boldsymbol{a}$.

下面复习向量的代数运算.

（一）向量的加法

以两个向量为邻边所作的平行四边形之对角线所表示的向量称为该两向量的和，这种运算**叫做向量的加法**。（或称为平行四边形法则）如图1.2所示，若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，那末$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，容易看出向量的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与点$O$位置的选取无关.

向量加法满足以下运算律：

（1）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

（2）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

特别地对于零向量，有

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

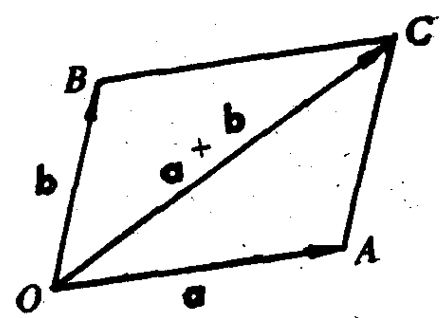

图 1.2

（二）向量的倍积（或称数乘向量）

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$仍是一个向量，它的模是$|\boldsymbol{a}|$的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；它的方向，当$\lambda>0$时，与$\boldsymbol{a}$相同；当$\lambda<0$时，与$\boldsymbol{a}$相反。这种运算称为向量的**倍积或数乘向量**。

向量的倍积满足以下运算律：

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为两个向量，k，l为实数.

（1）$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$.

（2）$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$。

（3）$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$。

当然，我们还认为$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}k$。特别是零乘任何向量都是一个零向量，即$0\boldsymbol{a}=0$。

有了倍积的概念以后，我们可以把任何一个非零向量写成它的模和单位向量的倍积。例如，向量$\boldsymbol{a}$可以写成$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$，其中$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\ (|\boldsymbol{a}|\neq 0)$，它是$\boldsymbol{a}$上的一个单位向量。

我们还可以证明，两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是：存在两个非零的实数λ，μ，使

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0.$$

同样，三个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是：存在不全为零的实数λ，μ和ν，使

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0.$$

（请读者自己补证之）。

（三）向量的内积（或称点积，数量积）

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的内积是一个数量，它的大小是它们的模和它们夹角φ（$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）的余弦的乘积，用$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$或$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$来表示，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

向量的内积满足以下运算律：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。（交换律）

（2）$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$是实数。（结合律）

（3）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。（分配律）

有了内积的概念，容易证明两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$垂直的充要条件是它们的内积为零，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。显然由内积的定义立刻可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，或记作$\boldsymbol{a}^2$。

下面我们利用空间的直角坐标系来研究向量的运算，在本书里除非特别声明，空间所用的坐标系总是右手笛氏直角坐标系。

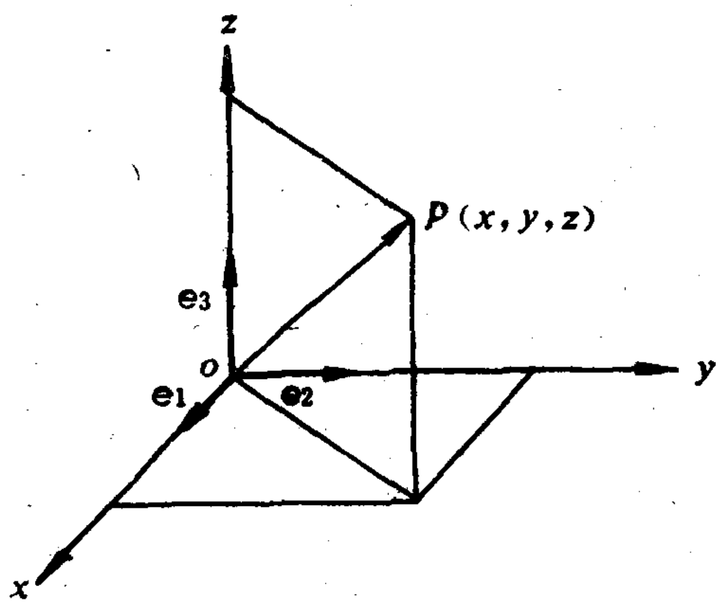

图 1.3

在空间直角坐标系的三个坐标轴上分别取三个单位向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$。其中每个向量的起点为原点，方向与它们所在轴的方向一致（图1.3）。称$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$为**坐标向量**或**基向量**，简称为**基**。

设空间一点$P(x, y, z)$，这里x，y，z是P点的坐标。那末，由空间直角坐标系的建立可知向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$。如果记$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3. \tag{1.1}$$

这样，我们就把一个向量$\boldsymbol{a}$分解成三个向量$x\boldsymbol{e}_1$，$y\boldsymbol{e}_2$与$z\boldsymbol{e}_3$的和。在分解式（1.1）中的三个有序的实数x，y，z称为向量$\boldsymbol{a}$的**分量**或**支量**或**坐标**。为了区别点P的坐标（x，y，z），我们记

$$\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}.$$

今后我们总是用圆括号表示点的坐标，用花括号表示向量的分量。

显然$e_1=\{1, 0, 0\}$，$e_2=\{0, 1, 0\}$，$e_3=\{0, 0, 1\}$，并且有：

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad (i, j=1, 2, 3), \tag{1.2}$$

其中记号δ_{ij}称为克朗内克尔（Kronecker）记号。

命题1.1 设向量$a=\{a_1, a_2, a_3\}$，$b=\{b_1, b_2, b_3\}$，则

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{1.3}$$

证明： 将a，b分别写作

$$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

和
$$b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3,$$

再利用（1.2）式，便知（1.3）式成立。 ∎

（四）向量的外积（或称**叉积**，**向量积**）

向量a与b的**外积**是一个向量，记作$a\times b$。它的模是a和b的模与其夹角φ的正弦的乘积，它的方向垂直于a及b，且a，b与$a\times b$构成右手系。从定义可知

$$a\times b=|a||b|\sin\varphi\, e,$$

其中e是垂直于a及b的单位向量，且a，b，e构成右手系。

显然，$|a\times b|$表示以a，b为邻边所作平行四边形的面积，并且两非零向量平行的充要条件是$a\times b=0$。

容易验证，对于基向量e_1, e_2, e_3下式成立：

$$\begin{aligned}&e_1\times e_1=0,\ e_2\times e_2=0,\ e_3\times e_3=0,\\ &e_1\times e_2=e_3,\ e_2\times e_3=e_1,\ e_3\times e_1=e_2.\end{aligned} \tag{1.4}$$

向量的外积满足以下运算律：

（1）$(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$。$\lambda$是实数。

（2）$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$；
$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。（分配律）

（3） $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$。（反交换律）

命题1.2 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2\\&\quad+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

证明：因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=(a_1b_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2+a_1b_3\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3)\\&\quad+(a_2b_1\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2+a_2b_3\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\\&\quad+(a_3b_1\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1+a_3b_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2+a_3b_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

再利用(1.4)式及反交换律便得（1.5）式。 ∎

命题1.3 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为三个向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

公式（1.6）是向量**双重外积**的计算式，由此可以看出向量的外积是不满足结合律的。（请读者自己证明）

（五）向量的混合积

两个向量的外积与第三个向量再作内积，则所得的数量称为三个向量的**混合积**．即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$。

我们把它记作

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

由向量外积与内积的定义可知，混合积的几何意义：

$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积。

由此可知，三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，

$\boldsymbol{c})=0$.

命题4.1　设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$, 则

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

（请读者自己证明）

利用（1.7）式及行列式的性质可知：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})&=-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

即三个向量轮换次序时混合积不变；三个向量中交换其中两个的次序，则混合积相差一个符号。并且从（1.8）式还可以得出

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

例 1　已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$. 试证 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性相关，即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 并由此推出柯西—施瓦茨（Cauchy—Schwarz）不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right).$$

证明：设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 φ，由内积的定义及 $|\cos\varphi|\leqslant1$，立即可得 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 显然等号成立的充要条件为 $|\cos\varphi|=1$. 因此向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线的，或说 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是线性相关的，所以可写作 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda$ 是实数）。再利用 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\sum_{i}^{3} a_i^2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\sum_{i}^{3} b_i^2}$ 及(1.3)式便知Cauchy—Schwarz不等式成立。 ∎

例 2 试证拉格朗日 (Lagrange) 恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \qquad (1.9)$$

证明： $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})$

$=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{d}$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}).$ ▮

这个拉格朗日恒等式以后我们经常用到.

例 3 试证

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$$

证明： $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$=-\{[\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{d}-[\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{c}\}$

$=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}$

$=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$ ▮

由于向量的加法，倍积与内积的概念对于平面上的向量也均适用，因此也可以用向量来处理一些平面几何的问题. 下面举例说明. （注意，外积的运算必须涉及到空间的向量.）

例 4 试用向量证明**圆幂定理**：自圆外一点 P 向圆引一割线交圆于 Q，R 两点，则

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PT}^2,$$

其中 $\overrightarrow{PT}$ 是切线长.

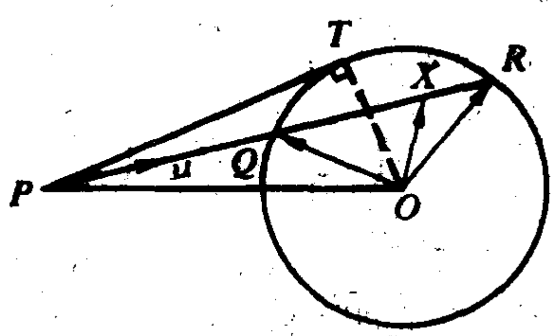

图 1.4

证明： 如图 1.4 所示. 设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l (即 PQ) 上的单位向量. $|\overrightarrow{PQ}|=\rho_1$, $|\overrightarrow{PR}|=\rho_2$. 那末 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\rho_1\boldsymbol{u}$;

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\rho_2\boldsymbol{u}.$$

(点 O 是圆心) 设 X 是直线 l 上的动点，令 $\overrightarrow{PX}=x\boldsymbol{u}$，则

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OP}+x\boldsymbol{u}.$$

如果 X 点在圆上，当且仅当 $|\overrightarrow{OX}|^2=r^2$ (r 是圆的半径). 即