高 等 学 校 教 材

运筹学及其在电力系统中的应用

华北电力学院 徐绳均 张国立 牛东晓 合编

水利电力出版社

(京)新登字115号

高 等 学 校 教 材

运筹学及其在电力系统中的应用

华北电力学院 徐绳均 张国立 牛东晓 合编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

四季青印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 18.25印张 412千字

1995年5月第一版 1995年5月北京第一次印刷

印数0001—1000册

ISBN 7-120-02336-5/TM·608

定价 10.35 元

内 容 提 要

本书共分十章，第一章介绍运筹学发展简史及模型的构造，第二章至第十章分别阐述线性规划、非线性规划、动态规划、网络分析技术、目标规划、最优决策、统筹方法、排队论、存贮论等运筹学的各主要分支及其在电力系统中应用示例。各章均有习题，书后并附有最优控制原理的应用附录。

本书可供高等学校电力技术经济、电力工程管理以及电力系统及其自动化发电与配电专业研究生及高年级本科生作为学习运筹学及最优化方法的教材，也可作为电力系统管理干部培训及有关科学技术人员的学习参考用书。

前　言

近半个世纪以来，运筹学作为一门为最优决策提供科学依据的学科，得到了迅速的发展。在军事运筹、工业管理、经济活动分析、系统优化、经济规划等多方面得到广泛应用并取得了巨大的效益。电力工业由于自己的特点，其主体是大机组、大电网联合供电，因此以全局最优为目标，采用运筹学方法对建设及运行进行优化更有其广阔的活动天地。为适应管理现代化的要求，目前国内各高等工科院校的管理工程、技术经济、系统工程等专业普遍开设了运筹学、数学规划等课程。电力专业的学生到了研究生阶段，要大量接触到系统分析、整体系统优化等问题，需要能结合电力工业实际运用运筹学知识的技能，因此需要有一本简明的但又有一定深、广度的教材，结合电力工业实际，向他们介绍运筹学的基本概念，分析解决实际问题的基本思路和方法。

本书参照《全国管理、系统工程及财经专业本科生、研究生适用的运筹学教学大纲》，结合我们教学及科研工作体会编写而成。编写中力求结合电力工业实际，可供电力类及技术经济、管理工程类专业研究生及高年级本科生使用，也可供有关领域的实际工作者参考。希望能以较少的篇幅和学时，帮助他们开拓在分析解决问题时的视野和能力。

全书包含了运筹学的各主要分支和一些主要分析方法。近年来一些学者引进最优控制的理论与方法来进行优化规划，扩大了运筹学分析问题的思路。因限于篇幅，不能对最优控制的理论作全面介绍，仅将有关内容缩编成一个附录，供读者参阅。

全书由张国立编写第二、三、四、五章，牛东晓编写第六、七、八、九章及附录，徐绳均编写第一、十两章并统稿。中国科学院计算中心罗百昌研究员仔细审阅全稿并提出了许多宝贵意见，编者表示深切的谢意。

限于我们的水平及编写时间，书中必定有许多不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1993 年 4 月

目　　录

第一章 概 论

第一节 运筹学的发展简史及研究对象

早在本世纪30年代就有人开始从事在经济领域中应用近代数学方法的研究，例如美国经济学家列昂惕夫（W. W. Leontief）用近代数学方法研究经济系统的平衡及投入与产出的关系，提出了投入产出分析，建立了投入产出表及其数学模型；原苏联的康托洛维奇（Л. B. Канторовиг）提出了生产组织与计划的数学方法，创立了最优计划理论等。

运筹学作为一门独立学科，是在第二次世界大战中产生和发展起来的。当时英国面对着占优势的德国空军的巨大压力，如何运用手中有限的空军力量及雷达等防空手段来抑制德军的空袭，英国组织了以勃兰克特（Blackett）为首的一批科学家进行研究，取得了效果，以后又推广到其他各军事部门。当时称为Research in military operations，或Operational research，本义是军事行动的研究。在美国参战后，因它与欧洲大陆间隔宽阔的大西洋，需要远隔重洋运送大量装备、人员，而在战争前期德国的潜艇部队很活跃，给海上运输造成重大损失，为此，英、美也组织科学家研究在广阔海域上如何利用有限的反潜力量最大限度抑制德军的潜艇部队，以及用有限数量的水雷有效封锁德方海域等问题，结果使德方潜艇损失成倍增加。后来美国也将这种研究推广到其他军事部门。大战结束后他们继续进行这种研究，并将战时“以有限资源去获得最大效果”的经验与方法应用于治愈战争创伤和恢复经济上，逐步推广到民用事业各部门，取得了很大效果。1951年美国的金贝尔（Kimball）总结归纳这些经验与方法，出版了运筹学方法（Methods of Operations Research）一书，奠定了运筹学作为一门独立学科的基础和地位。美国于1952年成立全国运筹学学会，英国则于1954年将原有的运筹学俱乐部改组为运筹学学会，并且在许多大学中成立相应的专业，使运筹学的研究及应用发展更为迅速。50年代末，美国曾利用网络技术改进北极星导弹的研制协调工作，使之约提前二年制成并节省了大量人力物力。1959年国际运筹学会（IFORS）成立。50年代末期，大容量、高速度的电子计算机软硬件研制进展突飞猛进，使得以前计算能力的障碍被突破以后，运筹学的应用便普及深入到各行各业。许多大公司设立运筹学小组或在智囊小组中包含运筹学专家。各国除了专业的运筹学杂志（OR）外，在各种专业性杂志（例如美国电力电子工程师协会会刊IEEE）上也常常有关于运筹学的文章发表。

在50年代末期，我国在中国科学院数学研究所、力学研究所相继建立运筹学研究室，并于1958年建立运筹学研究会。华罗庚教授、钱学森教授大力倡导，并在运筹学的理论研究和实际应用方面做了许多工作，例如统筹方法的研究、物质调运的图上作业法、纺织行业的质量控制等，并将运筹学的教学及研究工作推向高等院校和各行各业。

运筹学作为一门学科，它的研究对象是什么？英国运筹学学会曾经为运筹学下了一个

定义，即运筹学是运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、资金等大型系统的指挥或管理中出现的复杂问题的一门学科。美国的经济学百科全书则称运筹学是将科学分析运用于解决军事计划、工业管理、经济分析、公用政策等各种领域中出现的典型问题决策过程的方法。我国将 Operations Research (OR) 译为运筹，是取义于《史记》中刘邦赞扬张良的话“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，含意是运用筹划，出谋献策，以智取胜。因此，有人也简单地将其归纳为运筹学是为决策者提供最优决策的数学方法，它包含的面非常广泛而方法又十分灵活。一般情况下，人们把各种行业规划、经营管理、运用中涉及最优决策的理论分析、模型构成、解法的研究成果都归入运筹学，可运用于诸如有限资金、资源的合理运用，人力、物力的最优分配，传输环节的合理设计和调度，维修、服务系统的最优设置，原料、备品、产品的最佳库存量，设备的最佳更新期限，厂址的最佳选择，企业投资和经营的最佳策略等多种领域。这些问题大多可表述为在某些限制因素(约束条件)下，确定一些待决定的参数(决策变量)的取值，使得全系统的某一项或某些综合指标(目标函数)达到最满意值(最优值)。当决策研究中受到某种特定限制，采用了某种特定的方法时，便构成了运筹学的某一相应分支。例如当决策目标及限制条件均可用决策变量的线性函数表示时，便构成线性规划；当目标函数或限制条件中含有非线性函数时，便构成非线性规划；当待决策的变量只能取整数值时，便构成整数规划；当确定一个多时段或多阶段过程的决策优化时，便构成动态规划；有时决策中希望达到的目标不止一个，就构成多目标规划。此外，运筹学还包括应用随机过程理论分析一个按一定规律对到达的顾客进行某种服务的系统效能及其优化的排队论；应用图论及网络分析法对生产或建设过程的组织管理进行优化的网络技术与统筹法；研究国民经济各部门之间或部门内部平衡关系及某一项投入所能获得的产出的投入产出分析；研究生产过程中合理的仓贮原材料、备品等数量的存贮论；研究设备合理报废及更新年限的更新论；研究一个多元件串、并联的复杂系统工作稳定可靠性的可靠性理论；以及研究在确定性或随机性因素条件下对一个复杂过程进行决策的方法的决策论等。这些分支的主要部分将在本书中阐述。

第二节 运筹学的模型

利用模型对我们尚未充分了解的事物进行研究是我们常用的方法，例如对于新产品的试制，先制造一个样品(样机)进行试验研究，改进后再定型生产；或者制造一个结构相同但缩小了的模型机，测试其各方面性能，进行研究、改进。研究电力系统发展方案及运行方式时利用动态模拟进行仿真，测试其在正常运行及故障条件下的工作状况也是这种性质的模拟。这一类以实物构成模型进行研究的方法叫物理模拟。物理模拟的优点是比较形象、直观、有时用来模拟一些难于运用数学形式来表达的现象、过程较为方便，它的精度受到模拟条件和测试手段的限制。缺点是往往需要较大的投资，不便作多参数选择、多方案的研究，对某些研究对象(例如一个社会经济系统)也无法用物理模拟来研究。另一种模拟称为数学模拟，它将待研究的对象或过程的特性及其与有关因素间的关系等抽象为一个数学模型，研究它的变化规律及如何达到优化。在电子计算机性能日益完善的条件下，利用其极

高的运算能力，可以用不太大的代价对研究对象作多方面、多方案的详尽研究，并能达到很高的精度。许多行业开发了各种用途的计算机辅助设计CAD系统。当然实际事物千变万化，有时也难于用一个数学函数来表述待研究对象或过程的特性，或者影响因素过多，使数学模型过于复杂而难于求解，限制了数学模拟的应用，这是它的局限性。

运筹学就是一种利用数学模拟进行科学决策的方法。运用运筹学首先遇到的问题就是要建立数学模型(建模)。把实际问题抽象为一个数学模型时，大体要经过下列几个步骤：

(1) 对原始问题进行分析，收集数据。例如研究地区供电方案时，有几种电源可以考虑，它们的建设条件，资金及费用耗用情况，方案中有没有随机性因素等。数据的收集与分析表面上看是繁琐的简单劳动，但在构模中起重要作用。有时某些部门对一些待决策的方案事先有所偏好，使提供的原始数据有利于所偏好的方案，在这种情况下模型结构无论多么完美都没有多大意义。基本数据应当客观真实，并经过充分分析。

(2) 确定采用的决策变量。决策变量是在决策过程中可以人为变动以达到最优决策的参量，例如各电厂的容量、输电线的回路数等。如果没有决策变量，决策过程不受人为控制，则也无所谓最优决策了。

(3) 明确目标，构造目标函数。对一个决策对象，目标是什么？如果有多种目标，它们的主次关系如何？这是首先应当明确的。这似乎不应有什么问题，但实际上往往不同部门有不同的看法和要求，例如修一个大型水力枢纽，电力部门认为发电是主要目标，水利部门认为防洪或灌溉是主要目标，各自又有不同的评价方法。这时就需要统筹兼顾，找到一个综合客观的评价标准，找出目标与各决策变量的关系，建立适当的目标函数。

(4) 确定影响决策的各种限制条件。例如资金的限制，原料、设备供应条件的限制，人力、施工力量的限制，市场对产品需求的限制等，这就是所谓约束条件。

(5) 综合构模。对问题综合分析后，写出数学模型，现举例如下。

某地区预计到某年用电负荷将增加120万kW，用电量将增加75亿kW·h，为满足用电需要，可建设火电厂或水电厂来满足，它们的各种指标见表1-1。

表1-1　　备选电厂的指标

备选电厂	单机容量(万kW)	允许装机台数	每台机组投资(百万元)	资金回收率(折旧率)(%)	年运行费用(百万元/亿kW·h)	负荷率
火电厂	20	5	400	0.12	4.2	0.7
水电厂	35	4	700	0.05	1.2	0.4

选择决策变量为火电厂及水电厂装机台数 x_1、x_2，它们的相应发电量为 x_3 及 x_4。

约束条件有

$20x_1+35x_2\geqslant1.15\times120$（式中系数1.15为供电要求的备用系数）

$x_3+x_4\geqslant75$

$$x_3=0.7\times8760\times\frac{20}{10000}x_1，\text{即}\quad x_3-12.264x_1=0$$

$$x_4=0.4\times8760\times\frac{35}{10000}x_2，\text{即}\quad x_4-12.264x_2=0$$

$0 \leqslant x_1 \leqslant 5$，$0 \leqslant x_2 \leqslant 4$，$x_1$、$x_2$ 均为整数

$x_3 \geqslant 0$，$x_4 \geqslant 0$

目标函数选为年计算费用最小，即

$$\begin{aligned} \min Z &= 400 \times 0.12x_1 + 700 \times 0.05x_2 + 4.2x_3 + 1.2x_4 \\ &= 48x_1 + 35x_2 + 4.2x_3 + 1.2x_4 \end{aligned}$$

这是一个线性的混合整数规划。

有了模型以后，就可以进行优化，寻求最优解。

在上例的构模中，进行了一系列的简化。在将具体问题抽象为数学模型时，必定要进行一些简化，这是不可避免的。如把电厂的费用简化分解为与投资成比例的固定费用和与发电量成比例的可变费用两项之和，这是实际工作中常用的。这种简化归并，忽略了一些次要因素，简化了模型，突出了主要矛盾，使其易于求解。但简化时不能忽略必须考虑的重要因素。如前例中，没有考虑投资流，而水、火电厂这方面差异很大，水电厂需要提前几年投入大量资金；前例中目标函数只是静态地看一年的计算费用，没有考虑资金的时间价值；方案中只考虑电源，没有分析与之相关的输电线路费用，也没有考虑水、火电厂本身厂用电率的重大差别；火电厂的燃料费用合并于电厂年运行费内，不便于分析燃料价格变动对方案优选的影响等。因此，上例只是为了表示数学模型结构的一个示例，离实际应用还有很大距离。

在构模中往往会遇到一些不确定因素，例如实际负荷可能与预计的不一致，原料(燃料)价格可能有较大变动等，为此，运筹学发展了一套弹性分析的方法——灵敏度分析，可以分析各种因素变动对优化结果的影响及原结果在客观因素变化范围多大时仍是有效的。

有时同一个问题从不同角度分析可以构成不同的数学模型。例如上例中我们只考虑费用最省，是单目标规划，如果还对环境保护、水利灌溉、防洪等有要求，就可构成多目标规划；上例中只关心某一指定年份的最佳方案，是一个静态规划，如果要求适应若干年负荷不断增长变化下供电方案是最佳的，就是一个动态规划；在上例中为保证供电可靠性，把装机容量在用电负荷的基础上增加一个固定的备用系数，这是确定性规划，如果考虑负荷变化和机组事故的概率组合，在一个预定供电可靠性指标下求算出装机最佳方案，就构成一个随机性规划。这些都可根据实际需要来确定。一般地说，能够满足使用要求的最简单的模型就是好模型，模型不见得越大、越复杂就越好。

由于现实问题往往十分复杂，构造的数学模型不一定能一使用就是成功的，需要在使用过程中反复修改、完善，使之更切合实际情况，符合使用要求。有时一些实际工作部门对应用运筹学进行决策抱怀疑态度，而宁愿按自己的经验进行决策，对这种情况不能简单地认为是对运筹学的无知，而要作具体分析。有时这往往是因为所构造的数学模型不够完善，没有包括他们按经验认为是重要的因素，因而不能令他们信服，这时就应改进模型。有时确实因各种影响因素过于复杂，难于构造出合适的数学模型，这时综合有关专家经验进行决策还是一个可取的方法。因为在专家经验中包含着对一些影响决策的复杂因素的定性认识和定量估计。有时因各种因素的制约难于找到理想的最优解，或者不同部门对“最优”的看法相互对立而不好统一，这时可以考虑改“最优”准则为“满意”准则，各方面

都满意的方案就是好方案。当然，如果经过努力可以找到各方面认同的数学模型，进行优化决策，这是最理想的。在定量基础上的优化决策总比定性决策更完善一些。

由于数学模型在运筹学中的重要地位，运筹学本身的一些理论研究工作也是围绕着数学模型进行的，例如：

（1）结合实际情况应用新的数学方法，采用新的评价标准，构造新的模型或决策方法，例如线性规划的数据包络分析法，由单目标规划过渡到多目标规划，应用现代控制论构成优化模型，应用模糊数学方法构成决策模型等。

（2）在现有理论基础上改进构模技术，使之适应更多的实际问题，例如按排队论方法研究新的到达和服务规律下服务系统的效能。

（3）在现有模型下寻求更快速有效的算法，例如线性规划的单纯形解法是丹齐格（G. B. Dantzig）在1947年创立的，以后国内外都有人研究更快速的算法，如印度的卡马卡（Karmarkar）算法等，丹齐格及其他人还研究了大系统优化的各种算法。

第三节　电力系统中运筹学的应用情况及展望

运筹学在电力系统中已获得较广泛的应用。

应用最早、最有成效的是数学规划。早在50年代末、60年代初国内外即有应用线性规划进行电力系统电源优化规划的工作出现。60年代计算机软硬件迅速发展，计算能力迅速提高，逐渐解决了电源规划中变量多，要求计算机内存容量大，计算速度高的困难，使之逐步完善。70年代、80年代，在IEEE的PAS（电力设备及系统）分册、最优化学报（Journal of Optimization, Theory and Application）、运筹学杂志（OR）、电世界（Electrical World）等杂志上发表了许多有关电力系统优化规划的文章，IEEE还在其年会上有此方面的专题小组或举行专题年会。这些文章涉及线性规划、二次规划、混合整数规划、动态规划等在电力系统长远规划、短期计划、生产调度优化、输电网络规划等各方面的应用，讨论了电厂能源供应有或无限制、是否存在抽水蓄能电厂等各种情况，并且有结合各国实际的研究结果报导，如伊朗的400kV系统规划、印度的水电发展计划、阿尔及利亚的能源和核电规划等。参加这些讨论的有美国、加拿大、原苏联、巴西、瑞典、伊朗以及国际原子能机构等的专家。许多研究机构和大学编制了有关能源规划、电力系统规划、网络规划的专用程序包，例如美国通用电气公司的最优发电规划程序包（OGP）、麻省理工学院的电力系统发电容量扩建分析系统（EGEAS）、国际原子能机构委托橡树岭国家实验室研制的电力系统自动规划模型（WASP）、阿尔贡国家实验室的电力公司费用及可靠性研究模型（RELCOMP）、德国的马克能源规划模型（MARKAL）等。其中的WASP模型因被世界银行采用作为其向第三世界能源项目贷款可行性研究的评价工具，得到了广泛应用。

我国的高校及研究机构在这方面也进行过许多工作。例如北京水利电力经济研究所、西安交通大学、清华大学都研制了电力系统优化规划程序包，电力科学院研制了输电网络规划程序包。在三峡工程开发研究中应用这些软件对远景电力系统规划作了详尽分析。有的单位还用数学规划对火电厂厂内热力系统参数优化、热电厂供热网络优化作了研究，还有

人利用模糊数学研究了火电厂厂址选择等等。

目前前列程序包大都可以在固定的或随机的负荷模型下，在各种技术条件下动态地研究电力系统的优化规划及运行。但仍因计算能力的限制，整型变量数目不能太多（不超过几百个）。大型系统发电、输电各环节间联系很复杂，各种模型优化时多是分别进行电源优化、网络优化，而不是对整体系统同时进行优化。近年来国外开始研究人工智能和专家系统在电力系统规划和经济运行等方面的应用，发展很快。电力系统是一个复杂的联合体，优化时要考虑的问题很多。利用专家的知识、经验建立智识库，由专家系统自动推理、决策无疑是很理想的，这方面工作方兴未艾。

其他方面也有许多人进行过应用运筹学的研究，例如法国利用现代控制理论编制了一个国家投资模型(MNI)，用来进行能源项目的规划。有人应用网络分析和统筹法编制电厂设备安装及检修计划，达到提高工效、缩短工期的效果，有人利用投入产出分析研究电价，提出了建议等。还有人应用排队论研究水库调度，把来水视为顾客到达，用水视为服务，应用随机过程理论和排队论方法研究水库最优调度，思路很吸引人。但因发电用水率随蓄水量变化，水文条件既有随机性又有季节性，水库调度既希望发电量大，又希望汛末蓄水位高等多种因素的制约，这方面的研究要达到实用还有许多工作要做。总的来说，运筹学是一门手段灵活、多样，应用广泛的学科，电力系统是一个内部紧密联系的复杂系统，其优化的效益及潜力十分巨大，运筹学在电力系统中的应用有着广阔的前景。

第二章 线 性 规 划

线性规划是运筹学中形成最早、应用最广泛的一个重要分支，它的结构简单，理论完整，方法成熟，可以用来解决工程技术、军事、经济等许多领域提出的大量问题。另一方面，线性规划的发展还促进了运筹学中其它许多分支的发展。

本章将比较详细地介绍线性规划的基本理论和求解方法。

第一节 基本模型及解法

一、线性规划的一般数学模型

【例 2-1】 某工厂生产 A、B 两种产品。生产 1t A 产品可获利 300 元，生产 1t B 产品可获利 400 元。生产 1t A 产品或 B 产品需要的原料数及占用设备时间如表 2-1 所示。工厂每天可得原料 60 t，设备每天至多工作 16 h。问每天生产 A 产品和 B 产品各多少吨，才能使该厂获得最大利益?

表 2-1 每吨产品占用原料及设备时数

产品品种	原料 (t)	占用设备 (h)
A	3	2
B	6	1

解 决策人可以控制的因素是每天生产 A 产品和 B 产品的产量，它们的每一组值就是一个生产方案。

设每天生产 A 产品和 B 产品分别为 x_1、x_2t。依题意，该厂每天获利可用 x_1、x_2 的函数 f 来表示，即

$$f(x_1,x_2) = 300x_1 + 400x_2$$

由于可利用的原料及设备时间有限，因此 x_1、x_2 还应满足

$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 60 \quad \text{(原料限制)}$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 16 \quad \text{(设备时间限制)}$$

最后，还存在着明显的非负限制，即

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

从而问题化为求

$$f(x_1,x_2) = 300x_1 + 400x_2 \tag{2-1}$$

在条件

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leqslant 60 \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

下的最大值。

【例 2-2】 某电厂混合燃烧三种不同种类的燃料，其特性和价格见表 2-2。要求混合后每千克燃料含灰分不超过 60g，发热量不低于 20000kJ。问混合比例为多少时，才能使

该厂所花燃料费最低？

表 2-2 每千克燃料的特性及价格

燃料种类	灰 分 (kg)	发热量 (kJ)	价 格 (元)
第一种	0.02	30000	10
第二种	0.04	22000	6
第三种	0.08	16000	2

解 设 x_1，x_2，x_3 分别为每千克混合燃料中三种燃料的重量，单位为千克，用 $f(x_1, x_2, x_3)$ 表示燃料费，根据题意，该问题可化为求

$$f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 \tag{2-3}$$

在条件

$$\left.\begin{aligned} &0.02x_1 + 0.04x_2 + 0.08x_3 \leqslant 0.06 \\ &30000x_1 + 22000x_2 + 16000x_3 \geqslant 20000 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

下的最小值。

由式(2-1)～(2-4)可以看出，例 2-1、例 2-2 的数学表示式在形式上是一样的。还有许多实际问题的数学表示式在形式上也和它们一样。这类问题的共同特点如下：

(1) 每一个问题都用一组变量 x_1，x_2，…，x_n 表示。它们的每一组可能取得的值就是一个方案。决策的目的就是要在所有可能的方案中找出最优者。x_1，x_2，…，x_n 通常称为决策变量。

(2) 有一个判别方案好坏的函数〔如式(2-1)和式(2-3)〕，它们是 x_1，x_2，…，x_n 的函数，记作 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。根据实际问题不同，最优方案应使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 达到最大值或最小值。$f(x_1, \cdots, x_n)$ 通常称为目标函数。

(3) x_1，x_2，…，x_n 之间存在一定的关系，如式(2-2)和式(2-4)，一般称它们为约束条件，常常用等式或不等式来表示。

(4) 目标函数及所有约束条件均是 x_1，x_2，…，x_n 的线性函数，因此称这类问题为线性规划问题。

由上面的讨论，我们可以给出这类问题的一般数学描述。

所谓线性规划问题就是求

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2-5}$$

在条件

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 (\text{或} \geqslant b_1, \text{或} = b_1) \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 (\text{或} \geqslant b_2, \text{或} = b_2) \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m (\text{或} \geqslant b_m, \text{或} = b_m) \\ &x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

下的极大值(或极小值)问题。

线性规划问题常简写为

$$\left.\begin{aligned} & \max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ & x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

式（2－7）称为线性规划的一般形式。如约束条件中有等式或大于等于 b_i 等其它情况时，我们总可以采用一些简单的数学方法将其变换为式(2－7)所示的一般形式。

二、线性规划的标准形式及向量表示

为了便于线性规划问题的求解，需将一般形式转成下列标准形式，即

$$\left.\begin{aligned} & \max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ & x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

上面的标准形式有以下三个特点：

（1）都是求目标函数最大值问题；

（2）约束条件均为等式；

（3）全部变量均为非负。

任意形式的线性规划问题均可化为上述标准形式。现分几种情况叙述如下：

（1）若要求目标函数为最小值，即 $\min f$，可令 $f'=-f$，则以 f 为目标函数的最小值问题与以 f' 为目标函数的最大值问题在同样的约束条件下有完全相同的最优解，且 $\min f = -\max(-f)$。

（2）若 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$，则引进 $x_{n+1} \geqslant 0$，可使上式变成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$$

并称 x_{n+1} 为松弛变量。

（3）若 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i$，则引进 $x_{n+1} \geqslant 0$，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i$$

x_{n+1} 也称为松弛变量。

（4）若某个 x_i 无非负限制，可令

$$x_i = x_i' - x_i'', x_i' \geqslant 0, x_i'' \geqslant 0$$

（5）若某个 $x_i \geqslant b$（$x_i \leqslant b$），可令

$$x_i' = x_i - b(x_i' = -x_i + b), x_i' \geqslant 0$$

经过上述步骤，总可将所给线性规划问题化为标准式，当然标准形式规划问题中的决策变量增加了，读者还应清楚新问题与原问题解之间的关系。

为使式(2－8)的数学表示及今后某些问题的推导、证明更加简练，式(2－8)常用向量、矩阵表示为

$$\left.\begin{aligned} &\max f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{cX} \\ \text{s.t.}\quad &\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{O} \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

式中：$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 分别为 n 维列向量及 n 维行向量；$\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量；$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵。即

$$\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, \boldsymbol{c} = (c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,\cdots,b_m)^T, \boldsymbol{O} = (0,0,\cdots,0)^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots\ \vdots\quad\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$$

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 还可写成

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{b} \tag{2-10}$$

以列向量 $\boldsymbol{P}$ 表示的约束条件，即式 (2－10) 的几何意义可用图 2－1 说明。

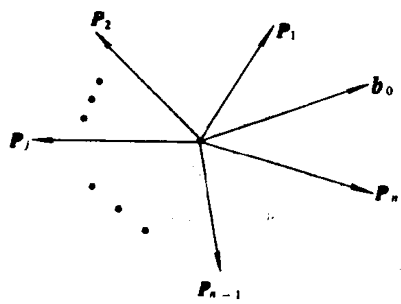

图 2－1　约束条件的几何意义

图中的 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_n$ 存在如下关系：$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_n$ 在各自方向上伸缩 x_1，x_2，…，x_n 倍以后再叠加起来，如果刚好等于 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 就是所求的一个解。若这样的解有无穷多个，则其中满足 $\boldsymbol{cX}$ 为最大的解就是我们所要求的最优解。

三、线性规划问题的图解法

有 n 个决策变量的线性规划问题叫 n 维线性规划问题。这里以二维线性规划问题为例介绍图解法。应当指出，现实生活中很少遇到只有两个决策变量的线性规划问题，但由于图解法形象直观，容易理解，而且能从这种方法中总结出解多维线性规划问题的一般规律，为后面的单纯形法提供一个直观图形，因此在讲一般线性规划问题解法之前先讲图解法。首先介绍几个概念。

定义 2.1　在线性规划问题式(2－9)中，称满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{O}$ 的点 $\boldsymbol{X}$ 为可行解，全部可行解组成的几何图形(可行解集合)称为可行域。

定义 2.2　使目标函数值为最大的可行解称为最优解。

【例 2－3】　求例 2－1 所论问题的最优解，即求解线性规划问题

$$\left.\begin{aligned} &\max f(x_1,x_2) = 300x_1 + 400x_2 \\ \text{s.t.}\quad &3x_1 + 6x_2 \leqslant 60 \\ &2x_1 + x_2 \leqslant 16 \\ &x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

解 第一步，在平面上画出可行域 D。具体做法是：画出直线 $3x_1+6x_2=60$，$2x_1+x_2=16$，$x_1=0$，$x_2=0$。这些直线构成可行域的边界。实际上每条直线都将平面分成两部分，很容易确定满足不等式的点在哪一侧。本例中，可行域 D 为图 2-2 中阴影部分。

第二步，画目标函数等值线，即画 $300x_1+400x_2=k$ 的直线。它是以 k 为参数的直线族，直线离原点越远，k 值越大，我们的目的是在 D 内找使 $300x_1+400x_2$ 取最大值的点。由图 2-2 可以看出，直线 $3x_1+6x_2=60$ 与直线 $2x_1+x_2=16$ 的交点 b 即为可行域 D 内使 $300x_1+400x_2$ 取得最大值的点。

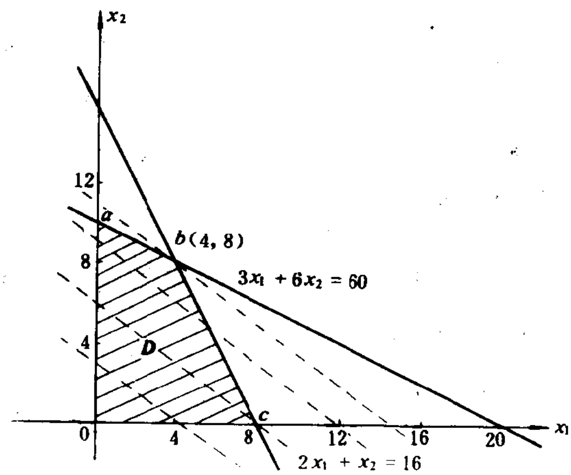

图 2-2 例 2-3 的可行域

第三步，求解方程组

$$\left.\begin{aligned}3x_1+6x_2&=60\\2x_1+x_2&=16\end{aligned}\right\}$$

得到

$$x_1=4, x_2=8$$

这就是最优解。即每天生产 A 产品 4t，B 产品 8t，该厂获利最多。最大利润为

$$\max f(x_1,x_2)=300\times4+400\times8=4400(\text{元})$$

在本题中，若生产 1tA 产品和 B 产品分别获利 400 元、200 元，则目标函数 $f(x_1,x_2)=400x_1+200x_2$ 与可行域的边界 $2x_1+x_2=16$ 平行。因此，最后可得线段 bc 上的任意点均为最优解，对应的最大利润为 3200 元。

为更好地理解线性规划问题解的情况，再举一例。

【例 2-4】 用图解法求解线性规划问题

$$\left.\begin{aligned}&\max f(x_1,x_2)=x_1+x_2\\ \text{s.t.}\quad &x_1-2x_2\leqslant 2\\ &2x_1-x_2\geqslant 0\\ &x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

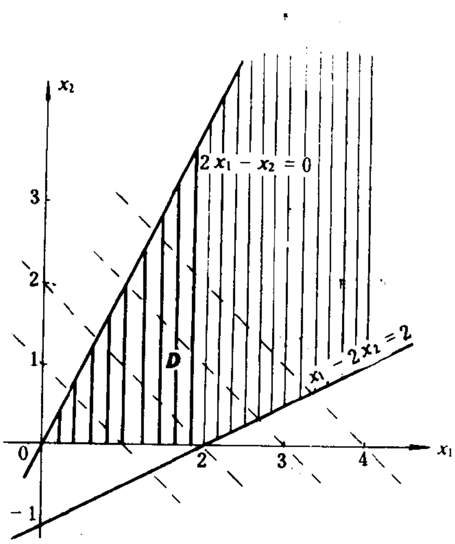

图 2-3 例 2-4 的可行域

解 第一步，画出可行域 D 如图 2-3 所示。显然 D 是无界区域。

第二步，画出目标函数等值线族：$x_1+x_2=k$。由图 2-3 易见，直线离原点越远，k 值越大，即目标函数值越大，而直线 $x_1+x_2=k$ 不论 k 值多大，始终与 D 相交，因此，本例目标函数无最大值，也即该线性规划问题没有最优解。

由上面的讨论不难看出以下结论。

(1) 二维线性规划问题其解有以下几种情况：