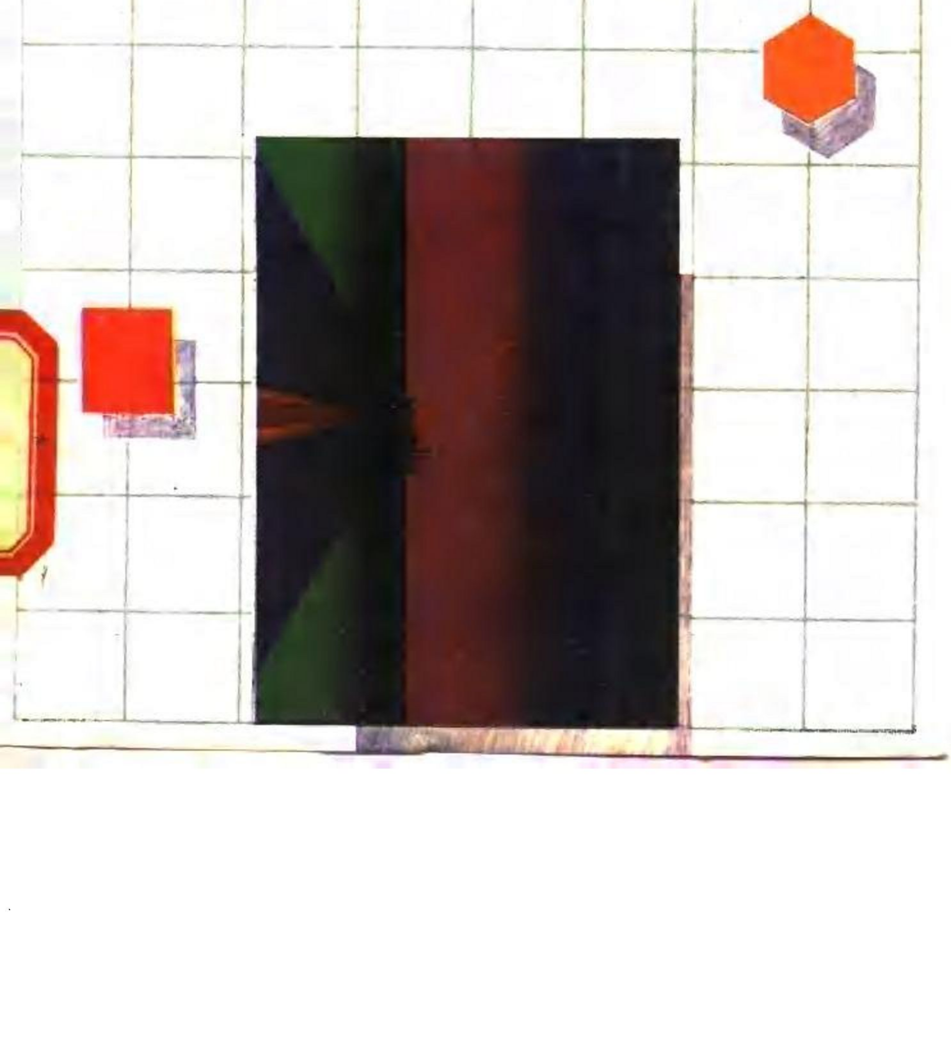
數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Methods of Mathematical Abstraction and Analysis of Abstraction Degrees

數學抽象方法與抽象度分析法

徐利治　鄭毓信　著



数学方法论丛书

数学抽象方法与抽象度分析法

徐利治　郑毓信　著

江 苏 教 育 出 版 社

1990·南京

数学方法论丛书

数学抽象方法及抽象度分析法

徐利治　郑毓信　著

出版发行：江苏教育出版社

（南京中央路165号，邮政编码：210009）

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：淮阴新华印刷厂

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 4.25　字数 90,300

1990 年11月第 1 版　　1990年11月第 1 次印刷

印数 1-2,000 册

ISBN 7—5343—1171—3

G・1031　　　定价：1.65元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤　胡世华　胡国定　程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主　编：徐利治

副主编：朱梧槚　萧文强

编　委：（按姓氏笔画为序）

王兴华　王鸿钧　朱梧槚　刘凤璞

吴学谋　吴望名　欧阳绛　郑毓信

赵振威　徐利治　唐复苏　萧文强

出 版 说 明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹（Leibniz)、庞加莱(Poincare)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚（Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理

的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去，特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称《丛书》)，并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其它两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

前　言

这本小册子的主要意图，是希望从定性和定量的广泛角度对数学抽象的问题作出较为全面和深入的分析。由于数学的研究活动和教学活动主要地都是在抽象的一定层次上进行的，因此，本书的论题具有重要的理论意义和现实意义。

抽象性通常被认为是数学的基本特性。本书首先从抽象的内容、方法和量度这样几个方面对数学的抽象性进行了分析，这不仅清楚地表明了数学与其它自然科学相比的特殊性质，而且也提供了关于数学的一个较为恰当的定义。

本书第二部分以较大的篇幅论述了关于数学抽象的方法论。通过大量例子的剖析，我们总结出了关于数学抽象的九条方法论原则。尽管这并不是一张完整的清单，但由于其中包括了数学抽象的一些最基本、最重要的形式，因此，我们相信，读者可以由此得到一定的启示和帮助。

本书第三、第四部分给出了关于数学抽象的定量分析，其中用到了偏序集和图论等分支的基础知识。尽管书中只是给出了抽象度分析法的一些最基本的概念和思想，但由所列举的实例即可看出，这一方法有助于揭示具有丰富内涵的数学理论的内在结构，从而对于数学研究和数学教学都具有普遍意义。

本书的论题固然重要，但从总体上说，我们只是进行了一些探索性的研究。特别是，书中的不少概念和方法多半是由笔者（单独或合作地）独立发展起来的。书中的部分内容

曾以论文的形式发表过，细心的读者可以发现，这些内容在本书中已经得到了进一步的发展和深化。我们还在本书的结束语中提出了几个值得继续思考的问题，希望能引起读者的兴趣并能作深入的研究。

本书的选材限于数学范围，但是，书中所给出的方法和理论在很大程度上也适用于数学以外的广泛领域。事实上，数学化正是现代科学技术发展的一个重要特点，数学思维则更在人类的创造性活动中发挥着越来越大的作用，因此，可以断言，随着人类文明的不断进步，数学方法与数学方法论的研究成果必然会在更大的范围内起到积极的作用。

江苏教育出版社的同志们倡议并组织了这套《数学方法论丛书》，为国内数学教育界提供了一批可供参考的读物，这是很有远见卓识的。我们高兴地看到，《丛书》的第一辑（共六册）出版以来，受到了广大读者的欢迎以及有关专家、学者的普遍好评。在这一方向上继续作出努力就是我们和《数学方法论丛书》第二辑全体作者和译者们的共同愿望。由于本书仓促成稿，考虑不周之处敬希读者指正。最后，特向为本书的出版付出细致劳动的朱梧槚同志及责任编辑同志致以诚挚的谢意。

徐利治　郑毓信

1990年5月

目录

一 数学抽象的一般分析

1.1 数学抽象的特殊内容、方法与量度

所谓抽象，通常是指从具体事物中抽取出相对独立的各个方面、属性及关系等等的思维活动；而被抽象出来的诸方面、属性及关系等，即以其“抽象性”而与具体事物的“具体性”相对立。由于数学抽象是一种特殊的思维活动，因此，除一般的共性外，数学抽象又具有自己的特殊性质，对此，我们将从抽象的内容、方法及量度等几个方面来分别讨论。

1．数学抽象的特殊内容

抽象性通常被认为是数学的一个基本特性。例如，苏联著名数学家A.д.亚历山大洛夫在《数学——它的内容、方法和意义》一书中就曾这样写道：“抽象性在简单的计算中就已经表现出来．我们运用抽象的数字，却并不打算每次都把它们同具体的对象联系起来．我们在学校中学的是抽象的乘法表——总是数字的乘法表，而不是男孩的数目乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价钱等等．”“同样地在几何中研究的，例如，是直线，而不是拉紧了的绳子，并且在几何线的概念中舍弃了所有性质，只留下在一定方向上的伸长．总之，关于几何图形的概念是舍弃了现实对象的所有性质只留下其空间形式和大小的结果．”①显然，亚历山大洛夫的这一

①A.д. 亚历山大洛夫：《数学——它的内容、方法和意义》，第一卷，1958年版，科学出版社，第1页．

论述不仅指明了数学的抽象特性，而且也在一定程度上指明了数学抽象的特殊内容。这就是说，一切数学对象都是抽象思维的产物；另外，就其最基本的意义而言，数学抽象则就是指由具体事物中抽取其量的方面、属性或关系。

对于所说的“量”，我们必须有正确的理解。严格地讲，量是一个哲学概念，也即是量与质这一哲学基本范畴中的一个环节。其中，质是指一事物区别于他事物的内部规定性；量则是指事物存在的规模、方式以及发展的程度、速度等，从而就是与质的规定性直接相对立但又是互相补充的。

例如，任何具体事物都具有自己特殊的物理性质、化学性质……这些质的问题就构成了各门自然科学特定的研究对象；另外，由于任何质都必然表现为一定的量，因此，为了从事定性的研究，我们又必须辅以定量的分析，而数学所从事的则正是纯粹的量的研究。

与其它自然科学一样，数学也有一个历史发展的过程。这一过程事实上也就是“量”的概念不断得到扩展和演变的过程。例如，从历史的角度看，“数”和“形”曾是“量”这一概念的两个最基本的含义。正因为如此，也就有如下的说法：“数学是研究数量关系和空间形式的一门科学”；相应地，代数（算术）与几何则就被认为是数学的两个主要内容。然而，应当强调的是，随着实践的发展，“量”的概念早已突破了这一历史的局限性。因此，如果在今天仍然机械地去坚持上面的说法就是不妥当的。一般地说，“量”的概念必将随着实践的发展展示出更为丰富的内容。从而，关于数学的较为合理的说法就是：数学是量的科学；而这也就清楚地表明了数学抽象的特殊内容：数学是从量的侧面反映客观实在的，即在数学的抽象中我们完全舍弃了事物的质的内容而仅仅保留了它们的量的属性。显然，这种特殊的抽象内容也就是数学与其它自

然科学的根本区别所在。

由下面的实际例子，我们即可清楚地看出定量分析与数学研究的重要意义。

例1 门捷列夫于1869年2月17日发现的元素周期律是化学发展史上的一次重要革命：它揭示了看来毫无联系的各种化学元素之间所存在着的深刻的内在联系，从而为现代的无机化学奠定了基础.门捷列夫是如何作出这一发现的呢?对此，门捷列夫本人曾总结道："为了正确进行推论，不仅需要了解元素质的标志，而且需要认识它的量的标志，即可计量的标志。当某些特性能够计量的时候，这些特性就不再带有主观随意性，并使对比具有客观性."① 由此可见，门捷列夫之所以能作出上述发现，其重要原因之一就是他十分重视定量的分析以及量和质的辩证关系.门捷列夫写道："当我考虑物质的时候……总不能避开两个问题：多少物质和怎样的物质……因此自然而然就产生出这样的思想：在元素的质量和化学性质之间一定存在着某种联系，物质的质量既然最后成为原子的形态，因此就应该找出元素特性和它的原子量之间的关系."② 这样，定量的分析最终就导致了元素周期律的发现：化学元素的性质随元素原子量的增加而呈周期性的变化.

例2 万有引力定律的提出是牛顿的重要贡献。牛顿是在23岁时作出这一重要发现的。他写道："就在这一年，我开始想到把重力引申到月球的轨道上，并且在弄清怎样估计圆形物在球体中旋转时压于球面的力量之后，我就从开普勒关于行星公转的周期与其轨道半径的二分之三方成比例的定律中，推得推动行星在轨道上运行的力量必定与它们到旋转中

①凯德洛夫：《伟大发现的一天》，俄文版，第331页。

②转引自凌永乐：《化学元素周期律的形成和发展》，科学出版社，1979年版，第39页。

心的距离的平方成反比例：于是我把推动月球在轨道上运行的力与地面上的重力加以比较，发现它们差不多密合."① 牛顿所说的计算是这样的：

由月亮围绕地球运行的周期$T_1 = 27.3$天$= 2.36\times 10^6$秒，以及地球到月亮的距离$D_1 = 3.8\times 10^8$米，可以算得月亮在轨道上运动的速度为

$$v_{月} = \frac{2\pi D_1}{T_1}$$

月亮的向心加速度为

$$a_{月} = \frac{v^2_{月}}{D_1} = \frac{4\pi^2 D_1}{T_1^2} = 0.0027米/秒^2.$$

如果以D表示行星到太阳的距离，以T表示行星绕太阳运行的周期，由同样的计算即可算得其向心加速度为

$$a = \frac{4\pi^2 D}{T^2}.$$

进而，行星所受向心力即为

$$F = ma = \frac{4\pi^2 Dm}{T^2}$$

由开普勒第三定律：$\frac{D^3}{T^2} = K$，即$T^2 = \frac{D^3}{K}$,代入上式即有

$$F = \frac{4\pi^2 Km}{D^2}.$$

这就是说，太阳对行星的吸引力应与太阳与行星之间的距离的平方成反比.

其次，如果假设太阳对行星的吸引力与地球对它上面的物体以及地球对月球的吸引力是同一性质的力，后者也就应当与物体与地球的距离的平方成反比，进而则有

①丹皮尔：《科学史》，商务印书馆，1979年，第222页。

$$\frac{a_{月}}{g}=\frac{R^2}{D_1^2},$$

其中R为地球半径，g为地面上自由落体加速度。

由于$D_1=60R$，由此就可算得

$$a_{月}=9.8\times\left(\frac{1}{60}\right)^2=0.0027米/秒^2.$$

由于两种计算所得出的结果是“密合”的，这就使得牛顿确信太阳对行星的吸引力与地球对月亮的吸引力是同一种力，而这也就是地球吸引苹果或使石头落地的那种力．这样，数学的计算就直接帮助牛顿作出了万有引力定律这一重要的发现．（这也就如同牛顿本人所说：“数学家的任务就是要找出这种正好能使一个物体在一定轨道上以一定速度运行的力．”①）

具体地说，通过将引力公式中的常数归因于太阳的质量M并把$4\pi^2K$改写成GM，上述引力公式$F=\frac{4\pi^2Km}{D^2}$就变成了

$$F=G\frac{Mm}{D^2}.$$

再加以普遍推广，牛顿最终就得出了如下的万有引力定律：任何两个质点之间的相互吸引力的大小与它们的质量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比，其方向则沿两个质点的联线方向。

2．数学抽象的特殊方法

由人类文化学及发生认识论的研究可以知道，无论就人类整体或个体而言，在较低下的水平上，即可看到数学思维的“雏型”，诸如关于“数量的多少”及“外形上的差异”的直观判断．但是，这种直观的判断显然不能被看成是真正的数学思

①塞耶：《牛顿自然哲学著作选》，上海人民出版社，1979年，第16页。

维，因为，在这些活动中，人们并没有能够由具体事物中抽取出量的方面、属性和关系，并形成相对独立的数学对象。另外，正如人们所清楚地了解的，在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义，我们都只能依靠相应的定义去进行（演绎）推理，而不能求助于直观。由此可见，纯粹数学的研究对象，事实上是"纯粹的量"，而这种纯粹的量则是借助于明确的定义逻辑地得到"建构"的。

例如，在从事几何的研究时，人们常常利用直观的图形或模型。但是，无论是教师或学生都清楚地知道，我们所研究的并非是黑板上所画的那个三角形，也不是那个木制的三角尺，而是"一般的"三角形。由于这种"一般的"三角形与"没有大小的点"、"没有宽度的线"、"没有厚度的面"等一样，都只是抽象思维的产物，而并非客观世界中的真实存在；又由于在严格的数学研究中我们只能依靠相应的定义去进行推理，而不能求助于直观，因此，数学的抽象思维事实上就是一种"构造性"的活动，而这种构造性活动则又是借助于明确的定义得以完成的（对此将特称为"逻辑建构"）。

数学抽象的这种构造特性，不仅清楚地表明了数学抽象与一般抽象相比在方法上的特殊性，而且也是数学能够成为一门科学的一个必要条件。因为，只有借助于所说的"逻辑建构"，数学对象才能由内在的思维活动转化为"外部的"独立存在，相应的数学结论也才能摆脱思维活动所必然具有的"个体性"，而获得作为科学知识所必需具有的"普遍性"。例如，同一个数学概念（诸如"平行线"）在不同的人那里完全可能具有不同的"心理图像"；但是，数学中所研究的则是由这一概念的定义所能推出的逻辑结论，从而是一种"客观的"知识。

按定义方式的不同，对数学对象的"逻辑建构"可以作出

如下的区分：第一，有些数学对象是借助于其它的对象明显地得到定义的，从而，它们就是所谓的“派生概念”。例如，圆可以定义为“到定点（圆心）的距离等于定长的点的轨迹”；抛物线可以定义为“到定点（焦点）与定直线（准线）距离相等的点的轨迹”，等等。第二，那些更为基本的对象，即所谓的“初始概念”，则是借助于相应的公理系统“隐蔽地”得到定义的。例如，传统的几何题材在希尔伯特那里得到了如下的处理：

“设想有三组不同的对象：第一组叫做点……”希尔伯特这样来引进几何学的研究对象。然后，希尔伯特指出，这些对象的性质在于它们之间的相互关系，对此可以用“在……之上”、“介于……之间”、“合同于”、“平行于”、“连续”这样一些概念进行刻画；而这些概念的严格涵义则取决于以下的五组公理①：

第一组（1—8），联结公理。如：

I_1 给定两点A、B，总有一线a存在，使A、B在其上。

第二组（1—4），次序公理。如：

II_1 如果点B介于A、C之间，那么A、B、C是同一直线上的三个不同点，而且点B也介于C、A之间。

第三组（1—5），合同公理。如：

III_2 如果两线段都合同于第三线段，那么第一线段也合同于第二线段。

第四组，（欧几里得）平行公理。

IV　在一平面上通过已知直线外一点，至多只能引一条直线，使与已知直线不相交（即平行）。

第五组（1—2），连续公理。如：

V_1（阿基米德公理）　如果AB和CD是任意两条线段，那

①详见克莱因：《古今数学思想》，第四册，上海科学技术出版社，1981年，第81—83页。

么，在直线上存在若干个点A_1，A_2，……，A_n，使得线段AA_1、A_1A_2、A_2A_3、……、$A_{n-1}A_n$都合同于CD，并使B介于A和A_n之间。

最后，由这些公理出发，希尔伯特借助于逻辑演绎展开出了几何理论。显然，在这样的处理下，上述公理（假设）事实上就是相应数学对象（点、线、面）的“隐定义”。因为，后者的性质即是由这些公理唯一决定的，从而，就只是借助于这些公理所说的对象才得到了“建构”。

由于派生概念是借助于初始概念得到定义的，而又正如希尔伯特的几何公理系统所清楚地表明的，这些公理作为初始概念的“隐定义”所刻画的则是各个初始概念的相互关系，因此，从这样的角度看（也即从理论的高度去进行分析），数学的研究对象就并不是单个的概念，而是具有丰富内涵的概念体系，也即是所谓的“数学结构”。

综上可见，与前述的“数学是量的科学”的“定义”相比，以下的说法就是更为恰当的：数学是通过相对独立的（数学）结构的建构，并以（数学）结构为直接对象从事客观世界量性规律性研究的。

3．数学抽象的特殊量度

除去抽象的内容和方法以外，数学抽象的特殊性还表现在抽象的量度上：数学抽象所达到的高度远远超出了其它科学中的一般抽象。

具体地说，尽管一些基本的数学概念具有较为明显的直观意义，但数学中又有很多概念并非建立在对于真实事物的直接抽象之上，而是较为间接的抽象的结果，即是在抽象之上进行抽象，由概念去引出概念。例如，1、2、3等概念无疑是建立在对于真实事物的直接抽象之上的；但是，那些较大的数则显然不可能是直接抽象的结果，而是建立在已有