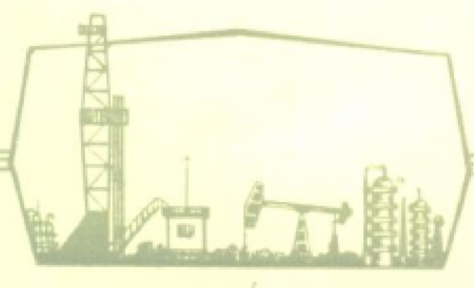
高等学校教学用书

# 电法测井

下册

张庚骥 编著



石油工业出版社

# 电法测井

## 下册

张庚骥 编著



石油工业出版社

## 内 容 提 要

本书介绍了在电法测井响应的计算中经常用到的几种方法：有限元素法，积分方程法和逐次逼近法。在有限元素法中，着重介绍了"前线解法"这个有效的解题方法。给出了目前普遍使用的积分方程，又推导出了以电位$U$为未知函数的积分方程，在非点电极条件下它比前者优越。在用逐次逼近解法求积分方程的一阶近似时，导出了几何因子。

本书可作为高等学校测井专业高年级学生选修课教材，或研究生用教科书，也可供测井技术人员和科研人员阅读。

# 电 法 测 井

## 下 册

张庚骥 编著

*

石油工业部教材编译室编辑（北京902信箱）

石油工业出版社出版

（北京安定门外安华里二区一号楼）

地质出版社印刷厂排版

北京顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092毫米 16开本 12 1/4印张 295千字 印2.001—3.500

1986年8月北京第1版 1989年8月北京第2次印刷

ISBN 7-5021-0391-0/TE · 380（课）

定价：2.20元

# 前　　言

电法测井在估计含油气饱和度方面起着其它方法所不能起的作用。怎样根据电法测井响应正确地计算出各个部分的电阻率或介电常数的数值是摆在电法测井理论研究面前的一个重要课题。这就是所谓的“逆问题”——由响应推断出各部分的参数（如电阻率）。目前解决这个“逆问题”的方法还是从解决“正问题”着手。先求出参数为已知的条件下的测井响应，并把这些响应绘制成图版。有了这些图版就可以根据响应查出参数。

为了根据参数计算响应，目前发展起了各种数值计算方法。有限元素法是其中比较成熟的方法。在一般的参考书中，有限元素法要求解的函数是电位。本书除了介绍这部分内容外，又给出了一个对偶的方法。它求解的函数不是电位而是电流势。这个电流势能描述电流的分布。“等电流势线”就是电流线，它与“等位面”正交。这种对偶方法的优点是显然的，因为电流线比等位面更能清楚地描述场的特征。在有限元素法线性代数方程的解法方面，本书介绍了一种非常有效的方法——“前线解法”。这一部分材料主要来源于参考文献〔6〕，但对其中某些部分做了些修改，使之更适合于解决电法测井的问题。例如电极上点的等位条件用这种方法处理就极简便。

除了有限元素法外，目前得到广泛应用的另一种方法是积分方程法。第一个关于稳流电场的积分方程是 Альпин[11]。在 1964 年提出的。它的未知函数是边界上的隐电流源密度。本书提出了另一种积分方程，它的未知函数是电位本身。在点电极条件下两种积分方程的计算效率差不多，但在非点电极（绝大多数电极系都是由非点电极组成）条件下，后者的计算效率比前者高。本书还介绍了以电流势为未知函数的对偶形式的积分方程。在这部分中用到了“磁流”和“磁流线圈”的概念。这种对偶形式积分方程的优点也是根据它的解可以画出电流线。

本书第三章介绍了有限元素法和积分方程法在交流电测井中的应用。材料主要来源于参考文献〔5〕、〔14〕和〔16〕。

在每一种积分方程后面都附有例题。这些都是用传统的解析方法可以求解的问题。把积分方程用在这些问题上得到了和解析解一致的结果。

本书还介绍了积分方程的一种近似解法——逐次逼近法，并且从一阶近似中得出了几何因子，使得这个在感应测井中起过很大作用的概念能够移植到直流电测井中来。关于感应测井，书中提出了“纵向阶跃介质中的横向几何因子”和“横向阶跃介质中的纵向几何因子”的概念。

本书由尚作源同志和林可期同志审查，林可期同志主要负责其中与数学和物理有关的内容。他们对书的内容提出了宝贵意见。在此一并表示感谢。

由于作者水平所限，书中的缺点和错误一定不少。欢迎读者批评、指正。

# 目　录

# 第一章　利用有限元素法求电阻率测井的响应

视电阻率 $\rho_a$ 的计算可归结为场的计算。在上册第二章中我们看到：利用解拉普拉斯(Laplace)方程求解电场只在极少数条件下才有可能，即介质电阻率只沿轴向或只沿径向阶跃变化时才有可能。在径向和轴向都不均匀的介质中我们只能用数值解法求解。有限元素法就是这样一种方法。

## 第一节　将求定解问题归结为求泛函极值问题

在测井中遇到的介质大都具有旋转对称性。由于这种对称性，三维问题便退化成二维子午面$(r, z)$上的问题。这个子午面除去电极系（包括任何有旋转对称性的电极系，如三侧向、七侧向、双侧向、普通电阻率法的电极系等，但不包括贴井壁的电极系，如微电极，微侧向等）所占的面积后剩下的面积称为求解区$\Omega$。$\Omega$应当向$r$和$z$方向无限延伸。但是在数值计算中，没有可能也没有必要这样做。我们在$r$方向和$z$方向上都为$\Omega$设置一个边界：$r \leqslant r_\infty$和$|z| \leqslant z_\infty$，$r_\infty$和$z_\infty$都是有限数，但是我们称它们为无限远边界。只要$r_\infty$和$z_\infty$足够大，令无限远边界处的电位$U$等于零而引起的误差就小于允许值。这样，求解区$\Omega$就变成一个有限的区域，它的边界用$\Xi$表示，有时介质和电极系还具有对$z=0$平面的反射对称性，这时电场的分布便也从而具有反射对称性。我们可以进一步将$\Omega$缩小到$z \geqslant 0$的半子午面范围内，如图1—1所示。这时$\Omega$的边界$\Xi$可以分为以下几个部分：（1）金属电极表面；（2）无限远边界；（3）电极系的绝缘环；(4)对称面$z=0$；(5)$r=0$的边界。

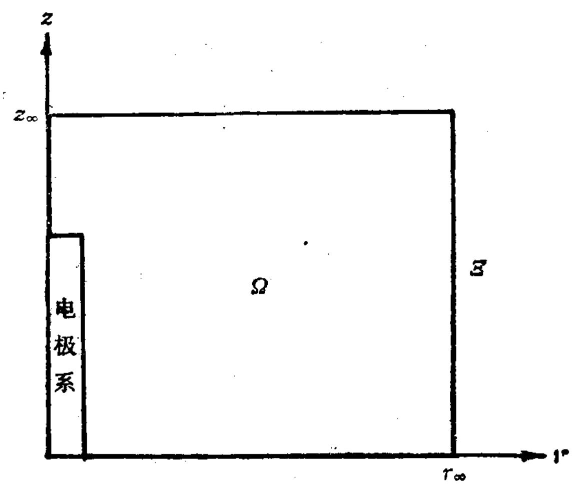


图 1—1　有反射对称性时的求解区

所要解决的定解问题是：求出一个连续而且适当光滑的函数$U$，它满足以下各条件：

（一）在$\Omega$内满足方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r \frac{\partial U}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1-1)$$

式中　$\sigma$——介质的电导率。

方程的左端$=-r\mathrm{div}\vec{j}$，$\vec{j}$是电流密度。在$r \neq 0$处，方程（1—1）等价于电流密度散度为零的条件。这个条件比 Laplace 方程更加普遍。在整个求解区，包括不同介质的边界处，它都得到满足。在$\sigma=$常数的地方，它就是Laplace方程。为考虑方程（1—1）在边界面附近的表现形式，在两介质分界面附近作一扁柱形的闭曲面，其顶面和底面在边界面两

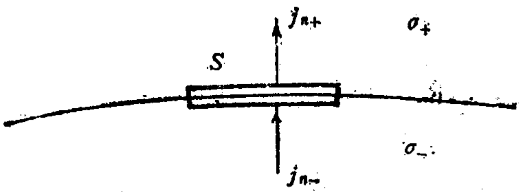



图 1—2 两介质边界面的边界条件

侧，并且平行于边界面，它们的线性尺度是一级无限小；顶面和底面间的距离是三级无限小。如图1—2所示。根据方程（1—1），在闭曲面内 $\mathrm{div}\vec{j}=0$。利用高斯(Gauss)定理，并考虑到侧面的面积同顶面和底面相比是无限小，其贡献可以忽略，得

$$(j_n)_+S=(j_n)_-S$$

式中 $S$——顶面和底面的面积；

$n$——边界面的法线矢量，对边界面的两侧有同一指向；

记号“＋”和“－”分别表示有关量在边界面两侧所取的值。由上式可得

$$\left(\sigma\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+=\left(\sigma\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- \qquad (1-2)$$

这就是$U$所应满足的边界条件。以上推导表明：如果$U$满足方程(1—1)，则在边界面处边界条件（1—2）式便自动满足，不需要把后者当成一个条件单独提出来。

在$r=0$处，方程（1—1）变成

$$\frac{\partial U}{\partial r}=0 \qquad (1-3)$$

这也正是在$r=0$处$U$所应满足的边界条件。

（二）在边界$\Xi$的不同部分，$U$应满足不同的边界条件。

在恒压电极表面以及在无限远边界，$U$服从完全约束条件：

$$U=\text{已知常数} \qquad (1-4)$$

其中在无限远边界，这个已知常数是零。

在恒流电极表面上，$U$服从不完全约束：

$$U=\text{未知常数} \qquad (1-5)$$

（1—4）和（1—5）式统称第一类边界条件。

在恒流电极表面$\Xi_A$上

$$2\pi\sigma_m\int_{\Xi_A} r\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=I_A \qquad (1-6)$$

式中 $\sigma_m$——泥浆电导率；

$I_A$——恒流电极所供电流，是一已知量；

$n$——边界$\Xi$的外法线。

（1—6）式的积分是在恒流电极表面$\Xi_A$上进行，

在绝缘边界

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0 \qquad (1-7)$$

绝缘边界包括电极表面上的绝缘环和对称面$z=0$（如果有的话）。

（1—6）和（1—7）式统称第二类边界条件。

以上是定解问题中函数$U$所应满足的全部条件。这个定解问题可归结为求泛函极值的问题。

所考虑的泛函是

$$\Phi(U)=\Phi_1(U)-\Phi_2(U) \tag{1—8}$$

式中

$$\Phi_1=\pi\iint_{\Omega}\sigma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]rdrdz \tag{1—9}$$

$$\Phi_2=\sum_E I_E U_E \tag{1—10}$$

式中 $I_E$和$U_E$——电极的电流和电位

（1—10）式的求和是对所有电极进行。

现在来看看 $\Phi_1$和 $\Phi_2$ 的物理意义。在空间中取出一小块体积，它的顶面和底面都是等位面，面积是$dS$，相距$dl$；侧面平行于电流线。如图1—3所示。顶面和底面间的电位差是

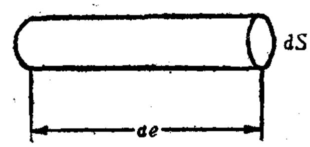



图 1—3 空间中的微小体积

$$dU=|\mathrm{grad}U|\,dl$$

流过顶面和底面的电流是

$$dI=\sigma|\mathrm{grad}U|\,dS$$

所以小体积内消耗的电功率是

$$dW=dU\cdot dI=\sigma(\mathrm{grad}U)^2dV$$

式中

$$dV=dS\cdot dl$$

考虑到$U$的旋转对称性，$|\mathrm{grad}U|$在以$z$为轴，以$dr$ $dz$为截面积的圆环上取同一数值。所以在这样环上的功耗为

$$dW=\sigma(\mathrm{grad}U)^2\cdot 2\pi rdrdz$$

$$=2\pi\sigma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]rdrdz$$

在$\Omega$内对$dr$和$dz$求积分，即得到求解区的功耗$W$：

$$W=2\pi\iint_{\Omega}\sigma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]rdrdz$$

将此式和（1—9）相比较，$\Phi_1$的物理意义就清楚了：它是求解区功耗之半。$\Phi_2$的物理意义是清楚的：它是电极所供的功率。根据公式（1—8），$\Phi$的物理意义是：$\Omega$内功耗之半与电极所供功率之差。

用$\varkappa$代表服从第一类边界条件（1—4）和（1—5）的连续并且适当光滑的函数的集合。下面的命题将定解问题和求泛函$\Phi$极值的问题等同起来：

在集合$\varkappa$中，满足方程（1—1）和第二类边界条件（1—6）和（1—7）的函数使（1—8）式所给的泛函$\Phi$取极值；反之，在集合$\varkappa$中，使泛函$\Phi$取极值的$U$必然满足方程(1—1)和第二类边界条件（1—6）和（1—7）式。

我们只证明命题的后半部分，即方程（1—1）和条件（1—6）和（1—7）的必要性。充分性的证明更容易。

设电位函数$U$有一变化$\delta U$。因此而造成的$\Phi$的变化是

$$\delta\Phi=2\pi\iint_{\Omega}\sigma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\delta\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]rdrdz$$

$$-\sum_{A}I_{A}\delta U_{A}$$

在 恒流电极上$\delta U$等于零，所以求和是对恒流电极进行。因为$U$使$\Phi$取极值，所以

$$\delta\Phi=0$$

$\delta U$代表两个函数$U'$和$U$之差

$$\delta U=U'-U$$

同样，$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)$代表两函数偏导数之差：

$$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{\partial U'}{\partial r}-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(U'-U)=\frac{\partial}{\partial r}\delta U$$

同理

$$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\delta U$$

把这两个式子代入上式后得

$$\delta\Phi=2\pi\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r\frac{\partial U}{\partial r}\delta U\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma r\frac{\partial U}{\partial z}\delta U\right)\right]drdz$$

$$-2\pi\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]\delta U drdz$$

$$-\sum_{A}I_{A}\delta U_{A} \tag{1—11}$$

上式第一个积分的被积函数是二维散度。根据二维的 Gauss定理，它可以变成边界 $\Xi$ 上的线积分：

$$2\pi\int_{\Xi}\sigma r\frac{\partial U}{\partial n}\delta UdS \tag{1—12}$$

以下分几种条件讨论这个积分：

（一）在恒压电极表面以及无限远边界，由于函数 $U$ 是集合$\varkappa$中的函数，应满足边界条件（1—4）式，所以$\delta U=0$，从而表达式（1—12）等于零。

（二）由于条件（1—5），函数$U$ 在恒流电极表面取常数值 $U_A$，其变化量也取常数值$\delta U_A$。将表达式（1—12）同（1—11）中第三项的相应项结合起来，得

$$\left(2\pi\sigma_m\int_{\Xi_A}r\frac{\partial U}{\partial n}dS-I_A\right)\delta U_A \tag{1—13}$$

为了使$\delta\Phi=0$，必须

$$2\pi\sigma_m\int_{\Gamma_A}r\frac{\partial U}{\partial n}dS-I_A=0$$

因为不然的话，我们令$\delta U$只在所涉及的恒流电极表面上取值$\delta U_A\neq0$，而在其余的地方取值0，则$\delta\Phi\neq0$。〔$\delta U$ 这样的取值破坏了它的连续性。为了保证 其连续性，可以设计一

个连续函数$\delta U$的序列，并令序列的极限值是上面设计的$\delta U$（它是不连续的）。用极限法可以证明上述等式不成立是不行的。〕

上述等式就是条件（1—6）。

（三）在绝缘环以及对称面处，（1—11）的第一项对$\delta\Phi$的贡献是

$$\int_{\Xi_I} \sigma r \frac{\partial U}{\partial n} \delta U dS$$

重复上面的道理，为使$\delta\Phi=0$，必须

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0$$

这就是条件（1—7）式

再看（1—11）式的第二个积分。再重复一下上面的道理，得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r \frac{\partial U}{\partial r}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}\right)=0$$

这就是方程（1—1）。

这样就完成了命题后半部分的证明。前半部分的证明步骤与此相似，而且更容易，这里就不给出了。

这个命题是说，定解问题的解$U$使$\Omega$中的功耗之半与电极所供功率之差达到极值。当这个差达到极值时，$\Omega$中所损耗的功率等于电极所供给的功率。这是因为

$\Omega$中的功耗$=2\Phi_1(U)$

$$=2\pi \iint_{\Omega} \sigma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] r dr dz$$

$$=2\pi \iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r U \frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma r U \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] dr dz$$

$$-2\pi \iint_{\Omega} U\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r \frac{\partial U}{\partial r}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] dr dz$$

根据公式（1—1），第二个积分$=0$。将二维的Gauss定理施用于第一个积分，得

$$2\Phi_1(U)=2\pi \int_{\Xi} \sigma r U \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

由于在绝缘边界（包括对称面和$r=0$的边界）$\partial U/\partial n=0$，以及在无限远边界$U=0$，被积函数只在金属电极表面不等于零。由于在电极表面上$U$是常数，可以提到积分号外，得到

$$2\Phi_1(U)=\sum_E U_E\left[2\pi\sigma_m \int_{\Xi_E} r\frac{\partial U}{\partial n} dS\right]=\sum_E U_E I_E$$

式中求和是对所有电极进行的，包括恒流电极和恒压电极。

以上讨论也适用于线性元件组成的网络。设网络中$A$点经电导$G_1,\cdots,G_n$与节点1，…，$n$相联，并且与电流为$I$的恒流电源相联。网络中功率损耗之半是

$$\Phi_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}G_i(U_A-U_i)^2+\text{不含}U_A\text{的项}$$

恒流源所供的功率是

$$\Phi_2=U_AI+\text{不含}U_A\text{的项}$$

为使$\Phi=\Phi_1-\Phi_2$取极值，必须

$$\frac{\partial\Phi}{\partial U_A}=0$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{n}G_n(U_A-U_i)-I=0$$

这就是关于$A$点的Kirchhoff方程。这就是说，$\Phi$取极值和各节点电位满足 Kirchhoff 方程是等价的。

网络中的功耗又可以写成

$$2\Phi_1=\sum_n G_n(U_j-U_k)^2$$

求和是对所有电导进行。$i$，$j$是$G_n$两端节点编号。由于

$$G_n(U_j-U_k)^2=G_{jk}U_j(U_j-U_k)+G_{kj}U_k(U_k-U_j)$$

式中

$$G_{jk}=G_{kj}=G_n$$

上面的求和可以变成对节点求和：

$$2\Phi_1=\sum_j U_j\sum_k G_jk(U_j-U_k) \tag{1—14}$$

式中，$k$——代表与节点$j$有电导相联的节点。

由于每个节点都满足 Kirchhoff方程，有

$$\sum_k G_{jk}(U_j-U_k)=I_j \tag{1—15}$$

式中，$I_j$——恒流电源或恒压电源供给节点$j$的电流。如果节点$j$不与电源相接，则$I_j=0$。把（1—15）式代入（1—14）式，得

$$2\Phi_1=\sum_i U_iI_i$$

## 第二节　描述稳流场的电流方式

稳流场服从两个基本原则，即：场强是无旋的；在电源以外，电流密度是无源的。在介质边界面处的边界条件就体现着这两个原则。场强切线分量连续相当于第一个原则；电流密度法线分量连续相当于第二个原则。公式（1—1）就是第二个原则的具体表达形式。第一个原则——场强是无旋的——在上一节中没有单独提出来。其实它隐含在“场强等于电位负梯度”这一假设之中。仿此，我们可以令源点外电流密度等于某个矢量的旋度。这样，“电流密度无源”这个原则便自动满足。然后再对场强（它等于如此定义的电流密度乘上电阻率）施加无旋的条件。

我们仍然只考虑对井轴有旋转对称性的情况。在此前提下，场强和电流密度的$\phi$分量为零。用$j_r$和$j_z$分别代表电流密度$r$分量和$z$分量。令

$$j_r=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial z} \tag{1—16}$$

$$j_z=\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial r}$$

则显然有

$$\mathrm{dir}\,\bar{j}=0$$

这是因为，$J$等于某个矢势的$\phi$分量乘以$r$，即

$$J=rY_\phi \tag{1—17}$$

公式（1—16）等价于

$$\bar{j}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{curl}\bar{Y} \tag{1—18}$$

我们称$J$为电流势。在均匀介质中，座标原点上的电源在某点$(r,z)$所造成的电流势等于$z$轴上某一点$(0,z_0)$（为了明确起见，令$z_0>0$）与点$(r,z)$的联线绕$z$轴旋转所生成的锥面对电源点所张立体角乘$I/4\pi$，$I$是电源的电流。即

$$J=\frac{I}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) \tag{1—19}$$

根据公式（1—16），我们有

$$j_r=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial z}=\frac{I}{4\pi}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$j_z=\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial r}=\frac{I}{4\pi}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

这正是均匀介质中点电极所形成的电流密度。有趣的是，在从电源出发的所有直线上$J$为常数，也就是说，电流线和“等$J$线”一致。在$r=0$，$z>0$这条线上，$J=0$；在$r=0$，$z<0$这条线上，$J=I$。

在求解区$\Omega$内，场强旋度为零，即

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=0$$

由此得

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial r}\right)\right]=0 \tag{1—20}$$

式中　$\rho$——介质的电阻率

在介质的均匀部分，$\rho=$常数，（1—20）等价于

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\bar{Y}=0 \tag{1—21}$$

公式（1—20）保证了边界面处场强切线分量连续这个条件。而电流密度法线分量连续这个条件则由函数$J$在边界面处的连续性来保证。这是因为，根据后面的道理，电流密度法线连续等价于$\partial J/\partial t$（$t$代表切线方向）连续，而后者的连续性则由$J$的连续性保证，以后不同介质边界面的边界条件就不单独提出来了。

在点$(r_0,z_0)$处形成一个局部直角座标系$r',z'$，它们与原来座标的相应轴的夹角是$\theta$，

如图1—4所示。座标变换公式是

$$r'=(r-r_0)\cos\theta+(z-z_0)\sin\theta$$
$$z'=-(r-r_0)\sin\theta+(z-z_0)\cos\theta$$

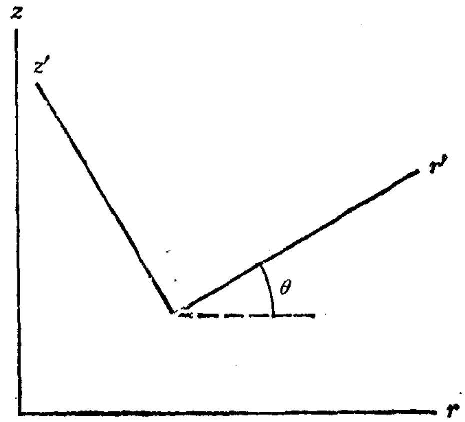



图 1—4

从而得

$$-\frac{1}{2\pi r_0}\ \frac{\partial J}{\partial z'}=\frac{1}{2\pi r_0}\left(\frac{\partial J}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial J}{\partial z}\cos\theta\right)$$
$$=j_z\sin\theta+j_r\cos\theta=j_r'$$
$$\frac{1}{2\pi r_0}\ \frac{\partial J}{\partial r'}=\frac{1}{2\pi r_0}\left(\frac{\partial J}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial J}{\partial z}\sin\theta\right)$$
$$=j_z\cos\theta-j_r\sin\theta=j_z'$$

如果$z$轴是由$r$轴起按反钟针方向旋转90°而得，则以上两式表明：$J$在某方向上的导数除以$2\pi r$就等于由此方向起按反钟针方向旋转90°方向上电流密度的分量。

在金属电极表面和无限远边界，$j_t=0$，这里t代表切线分量。根据上述原则，有

$$\frac{\partial J}{\partial n}=0 \qquad (1-22)$$

就是说，$J$在金属电极表面和无限远处所应满足的边界条件和电位$U$在绝缘环、$r=0$的边界以及对称面上所应满足的边界条件一样。

同样，在绝缘环、$r=0$的边界以及对称面上，由于$j_n=0$，得

$$\frac{\partial J}{\partial t}=$$

换句话说，在这些边界处

$$J=\text{常数} \qquad (1-23)$$

这样，在绝缘环、$r=0$的边界和对称面上，$J$所满足的边界条件又和$U$在金属电极表面和无限远边界所满足的相同。条件（1—23）式也是电流线所应当满足的。因为对电流线来说，$j_n=0$（$n$是垂直于电流线的方向），这一条件当然成立。电流线于是便成了“等$J$线”。

现在求金属电极$A$所供的电流$I_A$

$$I_A=2\pi\int_{S_A} rj_n dS=\int_{S_A}\frac{\partial J}{\partial t}dS=J_2-J_1 \qquad (1-24)$$

式中 $n$——求解区$\Omega$的内法线。

公式（1—24）是说，电流$I_A$等于电极$A$前后两绝缘环的$J$值之差。$J_2$代表它前面一个绝缘环的$J$值，$J_1$代表它后面一个绝缘环的$J$值。按照上面说到的$J$在某方向上的偏导数除以$2\pi r$等于由该方向反钟针旋转90°所得方向上$\bar{j}$的分量这一原则，前和后是这样规定的：当人站在$\Omega$内，面向前方时，电极系在他的右侧。为了以后讨论的方便，我们称保持电极系在右侧的方向为正方向。后面设有电极的绝缘环称为第一绝缘环。如果我们取上半个子午面为求解区$\Omega$的话，它是$r=0$的边界；而如果取下半个子午面为$\Omega$的话，它是对称面。

公式（1—24）表明：由第一个绝缘环起，沿着正方向走，每经过一个金属电极$J$值就增加一个等于该电极所供电流的数值。

到现在为止一直没涉及到电位$U$。按照$U$的定义，它等于由某点到无限远电场力所做的功。由于场强的无旋性〔公式（1—20)〕，积分路径可以任意选。为了求电极的电位，我们选求解区的边界$\Xi$为积分路径。

$$U_V=\int_{\Xi_V}\rho j_t dS=\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_V}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS \qquad (1-25)$$

式中 $n$——$\Omega$的外法线；

$\Xi_V$——由电极起到无限远的一段边界。

按照上面所说的规则，$t$是正方向，所以积分应沿正方向进行。

有了以上准备之后，我们可以提出对偶方式的定解问题：

求一个连续而且适当光滑的函数$J$，它满足以下各条件：

（一）在求解区$\Omega$内，满足方程（1—20)；

（二）在绝缘环、$r=0$的边界以及对称面上，满足条件（1—23）式；

（三）恒流电极两侧绝缘环$J$值之差等于该电极所供电流，即满足条件（1—24)式，其中$I_A$是恒流电极所供电流；

（四）在金属电极表面以及无限远边界满足条件（1—22)式；

（五）在恒压电极表面满足条件（1—25）式，其中$U_V$是恒压电极的电位。

在以上边界条件中，条件（1—23）和（1—24）式称为第一类边界条件；（1—22）和（1—25）式称为第二类边界条件。

这个定解问题也可以归结为求某泛函极值的问题。所涉及的泛函是

$$\Phi(J)=\Phi_1(J)-\Phi_2(J) \qquad (1-26)$$

其中的$\Phi_1$也和上节的一样，等于求解区$\Omega$内的功耗之半。利用公式（1—16）得

$$\Phi_1=\pi\iint_{\Omega}\rho(j_r^2+j_z^2)rdrdz$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)^2\right]drdz \qquad (1-27)$$

$\Phi_2$仍然是电极所供的功率，即

$$\Phi_2=\sum_E U_E I_E \qquad (1-28)$$

式中求和是对所有恒压电极进行。

令$\varkappa$代表满足第一类边界条件（1—23）和（1—24）式的连续而且适当光滑的函数的集合。仿照上节，可以证明如下的命题：

在集合$\varkappa$中，满足方程（1—20）和第二类边界条件（1—22）和（1—25）的函数$J$使泛函$\Phi(J)$达到极值；反之，在$\varkappa$中使泛函$\Phi(J)$达到极值的函数$J$必然满足方程（1—20）和第二类边界条件（1—22）和（1—25）式。

现在证明命题的后半部，即条件（1—20），（1—22）和（1—25）式的必要性。充分性的证明更容易。

设函数$J$使泛函$\Phi(J)$达到极值。在$J$之上有一小的变化$\delta J$。由此而引起的$\Phi$的变化量$\delta\Phi$应当为零，即

$$\delta\Phi=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)\delta\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)\delta\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)\right]drdz$$
$$-\sum_{V}U_V\delta I_V=0$$

根据第一类边界条件，在恒流电极上$\delta I$为零，求和是对所有恒压电极进行。由于

$$\delta\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\delta J$$

和

$$\delta\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\delta J$$

代入上式，得

$$\delta\Phi=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial r}\ \delta J\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial z}\ \delta J\right)\right]drdz$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial z}\right)\right]\delta Jdrdz-\sum_{V}U_V\delta I_V$$
$$=0 \tag{1—29}$$

第一个积分的被积函数是二维散度。将二维的 Gauss 定理应用于它，就得到边界$\Xi$上的线积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi}\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial n}\delta JdS \tag{1—30}$$

分别讨论以下几种情况。

（一）在金属电极表面和无限远边界处，为使（1—30）式对$\delta\Phi$的贡献为零，必须

$$\frac{\partial J}{\partial n}=0$$

这就是条件（1—22）。

（二）在绝缘环上，由于$J$是$\varkappa$中的函数，$\delta J$是常数。某一个绝缘环的$\delta J$等于它后面所有恒压电极的$\delta I_V$以及第一个绝缘环的$\delta J_1$之和。由于恒流电极的电流不发生变化，$\delta J$不包含它后面的恒流电极的贡献。将（1—29）式中含有$\delta I_V$的项集中到一起，便得

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_V}\frac{\rho}{r}\ \frac{\partial J}{\partial n}\ dS-U_V\right)\delta I_V$$

086463

式中　$\Xi_V$——由恒压电极起沿正方向到无限远的边界。

为使这一项对$\delta\Phi$的贡献为零，必须

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_V}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS-U_V=0$$

这就是条件（1—25）。

把含有$\delta J_1$（$J_1$是第一个绝缘环的$J$值）的项归并起来，得

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_L}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS\right)\delta J_1$$

式中　$\Xi_L$——从第一个绝缘环（$r=0$的边界）起，到最后一个绝缘环（在有对称性的情况下最后一个绝缘环是对称面$z=0$）的一段边界（包括这两个绝缘环）。

为使这一项对$\delta\Phi$的贡献为零，必须

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_L}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS=0 \qquad (1-31)$$

这个条件表示无限远边界的电位为零。

（三）在$\Omega$内，为使（1—29）式的第二个积分对$\delta\Phi$的贡献为零，必须

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial z}\right)=0$$

这就是方程（1—20）。

这样就完成了定理后半部分的证明。

这个命题是说，定解问题的解$J$使$\Omega$内功率消耗之半与电极所供功率的差值达到极值，反之亦然。当这个差值达到极值时，$\Omega$内的功率消耗等于所有电极（包括恒压电极和恒流电极）所供功率之和。为说明这点，运用分部积分于功耗积分$2\Phi_1$，得

$$\begin{aligned}2\Phi_1&=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\left[\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)^2\right]drdz\\&=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}J\frac{\partial J}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}J\frac{\partial J}{\partial z}\right)\right]drdz\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}J\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial z}\right)\right]drdz\end{aligned}$$

第二个积分由于方程（1—20）而等于零。第一个积分可以化成边界上的积分，从而

$$2\Phi_1=\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}JdS$$

由于在金属电极表面和无限远边界$\frac{\partial J}{\partial n}=0$，所以被积函数只在绝缘环（包括$r=0$的边界和对称面）处不为零。各绝缘环的$J$值等于它后面各电极（包括恒压电极和恒流电极）的电流以及第一个绝缘环的$J_1$之和。把含有某个电极$E$的电流$I_E$以及含有$J_1$的各项归并起来，得

$$\begin{aligned}2\Phi_1=&\sum_E I_E\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_E}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS\right)\\&+J_1\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Xi_L}\frac{\rho}{r}\frac{\partial J}{\partial n}dS\right)\end{aligned}$$

式中　$\Xi_E$—从电极$E$起到无限远的一段边界。

求和是对所有电极进行。根据公式（1—25），第一项括号内的表达式是电极$E$的电位$U_E$；而根据公式（1—31），后一项括号内的表达式为零。因此有

$$2\Phi_1=\sum_E I_E U_E$$

以上结论也同样适用于线性网络。但是线性网络必须用对偶方式描述，即：未知量是电流$I$而不是电位$U$。为保证各节点处电流守恒条件（相当于连续条件下电流密度散度为零的条件），电流$I$都按闭路循环，如图1—5所示。设环流$I_V$流经电阻$P_1$，…，$P_n$。流经$P_j$的还有环流$I_j$，在$P_j$上$I_j$和$I_V$方向相反。网络上的半功耗是

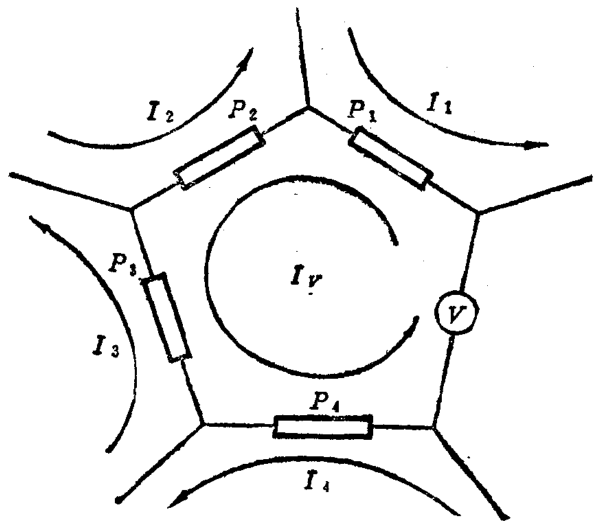



图 1—5　电路中的环流

$$\Phi_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}P_j(I_V-I_j)^2+\text{不含}I_V\text{的项}$$

设环流$I_V$流经恒压电源$U_V$，则它们所供功率是

$$\Phi_2=U_V I_V+\text{不含}I_V\text{的项}$$

当$\Phi=\Phi_1-\Phi_2$取极值时，

$$\frac{\partial}{\partial I_V}\left(\Phi_1-\Phi_2\right)=0$$

由此得

$$\sum_{j=1}^{n}P_j\left(I_V-I_j\right)=U_V$$

这是关于$I_V$所经环路的Kirchhoff方程。就是说$\Phi=\Phi_1-\Phi_2$达到极值和各环路满足Kirchhoff方程是等价的。

当各环路满足Kirchhoff方程时，网络中的功率损耗等于所有电源（包括恒压电源和恒流电源）所供功率之和。证明的方法和前面的相类似，这里就不再重复。

比较一下本节和上节的内容，可以发现，它们象一付对联的上联和下联一样，处处都有对偶关系。上一节有电位$U$，这一节有电流势$J$；上一节$U$在金属电极上取常数值，这一节$J$在绝缘环上取常数值；上一节在绝缘环上有$\frac{\partial U}{\partial n}=0$，这一节在电极上有$\frac{\partial J}{\partial n}=0$；…。甚至$2\Phi_1$的表达式也有对偶关系：上一节有系数$2\pi$，这一节有$1/2\pi$；上一节积分号下有$r/\rho$，这一节有$\rho/r$。对仗得何等工整。上节所采用的描述场的方式是大家所熟悉的，我们称之为电位方式；这一节所用的方式称为电流方式。两种方式互为对偶方式。对计算电阻率测井的响应来说，两种方式同样有效。但电流方式便于绘制电流线（等$J$线）。电流线比等位面更能清楚地显示场的特性。