

微积分学

(第一册)

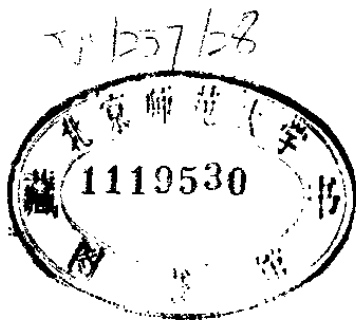
金 甯

河北人民出版社

微 积 分 学

第 一 册

金 甯



河 北 人 民 出 版 社

一九八二年·石家庄

微 积 分 学

第一册

金 弄

河北人民出版社出版 (石家庄市北马路19号)

河北新华印刷一厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 17 1/2 印张 372,000字 印数: 1—3,050 1982年10月第1版
1982年10月第1次印刷 统一书号: 7086·1101 定价: 1.50元

序 言

本书是为没有读过大学的广大科技人员、中学数学教师和社会知识青年进修高等数学而编写的，内容由浅入深、详明直观，只要有高中的数学程度就可看懂，可供自学。为了便于读者学习，对书中的习题都一一给出答案，并对较难的题目做了详细的解答。书中有*号的地方，初读者可先略过不读，待以后逐步掌握。

本书可做业余大学、电视大学和函授大学的试用教材，也可供工科院校的师生教学参考。

本书分四册出版。第一册：一元函数的微分学；第二册：一元函数的积分学，空间解析几何；第三册：多元函数的微分学，无穷级数，含参变量积分与广义积分；第四册：多元函数的积分学，场论，常微分方程。

本书由南开大学周学光教授审阅，胡梦郊副教授审阅了“场论”、“常微分方程”两章，烟学敏、许珍珍和范思根三位同志对本书也提出了一些改进意见。此外，卢桂华同志给本书绘制了全部插图。对以上同志表示衷心的感谢。

作 者

1982 年元月

目 录

序言

第一篇 预备知识

§1 希腊字母与基本公式	(1)
§2 实数与数轴	(18)
§3 绝对值	(22)
§4 数学归纳法	(25)
§5 数学论证中最常用的术语与方法	(27)

第二篇 一元函数微分学

第一章 函数	(32)
§1.1 集合	(32)
习题 1.1	(37)
§1.2 区间 点的邻域	(38)
习题 1.2	(11)
*§1.3 映射	(41)
习题 1.3	(46)
§1.4 常量和变量	(48)
习题 1.4	(49)
§1.5 函数概念	(50)
习题 1.5	(61)

§ 1.6	函数表示法	(63)
习题	1.6	(68)
§ 1.7	映射与函数	(70)
习题	1.7	(72)
§ 1.8	函数的几种特性	(72)
习题	1.8	(77)
§ 1.9	反函数	(78)
习题	1.9	(81)
§ 1.10	基本初等函数	(82)
习题	1.10	(92)
§ 1.11	复合函数初等函数	(94)
习题	1.11	(96)
§ 1.12	应用函数的例子	(97)
习题	1.12	(103)
*§ 1.13	双曲函数	(105)
习题	1.13	(112)
第二章	极限论	(113)
§ 2.1	实践中的极限问题	(113)
习题	2.1	(116)
§ 2.2	数列 “扩充的” 邻域	(117)
习题	2.2	(122)
§ 2.3	数列的极限	(123)
习题	2.3	(136)
§ 2.4	函数的极限	(137)
习题	2.4	(159)
§ 2.5	函数极限的统一定义	(159)

习题 2.5	(163)
§ 2.6 无穷大 无穷小	(163)
习题 2.6	(170)
§ 2.7 关于无穷小量的运算定理	(171)
习题 2.7	(174)
§ 2.8 极限的运算法则	(174)
习题 2.8	(183)
§ 2.9 极限存在的准则 两个重要极限	(185)
习题 2.9	(196)
§ 2.10 无穷小的比较	(197)
习题 2.10	(203)
第三章 函数的连续性	(205)
§ 3.1 函数在一点处的连续性	(205)
习题 3.1	(210)
§ 3.2 函数的间断点	(211)
习题 3.2	(215)
§ 3.3 连续函数的运算	(216)
习题 3.3	(219)
§ 3.4 初等函数的连续性	(220)
习题 3.4	(227)
§ 3.5 连续函数在闭区间上的性质	(227)
习题 3.5	(231)
第四章 导数与微分	(233)
§ 4.1 实践中的变化率问题	(233)
习题 4.1	(240)
§ 4.2 导数概念	(241)

习题 4.2	(248)
§ 4.3 导数的几何意义	(249)
习题 4.3	(254)
§ 4.4 函数的和、差、积、商的导数	(254)
习题 4.4	(260)
§ 4.5 导数基本公式表	(260)
习题 4.5	(265)
§ 4.6 复合函数的导数	(266)
习题 4.6	(274)
§ 4.7 反函数的导数	(276)
习题 4.7	(280)
§ 4.8 相关变化率及对数求导法	(281)
习题 4.8	(285)
§ 4.9 高阶导数	(286)
习题 4.9	(292)
§ 4.10 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(293)
习题 4.10	(301)
§ 4.11 微分概念	(304)
习题 4.11	(311)
§ 4.12 微分的运算 微分形式不变性	(312)
习题 4.12	(317)
§ 4.13 微分的应用	(318)
习题 4.13	(326)
第五章 微分学的基本定理	(329)
§ 5.1 中值定理	(329)

习题 5.1	(338)
§ 5.2 洛比塔法则	(339)
习题 5.2	(353)
§ 5.3 台劳公式	(354)
习题 5.3	(368)
第六章 微分学在研究函数上的应用	(369)
§ 6.1 函数的单调增减性的判别法	(369)
习题 6.1	(373)
§ 6.2 函数的极值的求法	(374)
习题 6.2	(380)
§ 6.3 最大值与最小值的求法	(380)
习题 6.3	(388)
§ 6.4 曲线的凹性及其判定法	(391)
习题 6.4	(394)
§ 6.5 曲线的拐点及其求法	(395)
习题 6.5	(398)
§ 6.6 曲线的渐近线	(398)
习题 6.6	(405)
§ 6.7 描绘函数图形的方法	(406)
习题 6.7	(414)
§ 6.8 弧微分 曲率	(414)
习题 6.8	(422)
§ 6.9 曲率半径 曲率中心	(423)
习题 6.9	(427)
*§ 6.10 方程的近似解	(429)
习题 6.10	(438)
答案与题解	(439)

第一篇 预 备 知 识

§ 1 希腊字母与基本公式

I、希腊字母

字 母	英文读音	中文谐音
A α	alpha	阿尔法
B β	beta	贝塔
Γ γ	gamma	嘎马
Δ δ	delta	得尔塔
E ε	epsilon	艾普西龙
Z ζ	zeta	截塔
H η	eta	艾塔
Θ θ	theta	西塔
I ι	iota	优他
K κ	kappa	卡伯
Λ λ	lambda	兰母大
M μ	mu	米优
N ν	nu	尼优
Ξ ξ	xi	克西

O	o	omicron	奥迷克戎
Π	π	pi	派
P	ρ	rho	漏
Σ	σ	sigma	西格马
T	τ	tau	套
Υ	υ	upsilon	宇普西龙
Φ	φ φ*	phi	夫爱
X	χ	chi	气
Ψ	ψ	psi	普西
Ω	ω	omega	欧米嘎

注* 老体字母

I、基本公式

为了方便读者，将今后学习中用到的一些公式列举如下：

一、初等代数

1、乘法和因式分解

- (1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。
- (2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。
- (3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
- (4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
- (5) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ 。
- (6) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 。
- (7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 。
- (8) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 。

$$(9) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(10) n 为偶数时,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

(11) n 为奇数时,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2、一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

(1) 求根公式

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2) 根与系数的关系

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

(3) 根的判别式

当 $b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, & \text{两个根是实数且不相等.} \\ = 0, & \text{两个根是实数而且相等.} \\ < 0, & \text{两个根是虚数.} \end{cases}$

3、指数

(1) 定义

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ 个 } a} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0).$$

$$a^0 = 1 (a \neq 0), \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0).$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).$$

其中 m, n 是正整数。

(2) 运算规则

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

其中 a, b 是正实数, α, β 是任意实数。

4、对数

(1) 定义 如果 $a^x = N$ ($a > 0, a \neq 1$), 那么 x 叫做 N (真数) 的以 a 为底的对数, 记作

$$x = \log_a N.$$

(2) 恒等式

$$a^{\log_a N} = N.$$

(3) 性质

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N.$$

$$\log_a M^n = n \log_a M.$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

(4) 换底公式

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

5、有限项数项级数

(1) 等差级数

首项为 a_1 ，公差为 d 的等差级数是指下列和式：

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + \overbrace{n-1}^{n-1}d).$$

等差级数的前 n 项的和为

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d],$$

或
$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

(2) 等比级数

首项为 a_1 ，公比为 r 的等比级数是指下列和式：

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

等比级数的前 n 项的和为

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1),$$

(3) 其他用到的级数

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (n-1) + n$$

$$= \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}.$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2.$$

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1).$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

6. 排列组合和二项式定理

(1) 阶乘 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

(2) 选排列 m 个元素中取 n 个的排列种数

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)] = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

(3) 全排列 m 个元素的排列种数

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!.$$

(4) 组合 m 个元素中取 n 个的组合种数

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\ &= \frac{m!}{(m-n)!n!}. \end{aligned}$$

(5) 组合的性质

$$C_m^1 = C_m^{m-1}, \quad C_{n+1}^1 = C_m^{n-1} + C_m^n,$$

(6) 二项式定理

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} + \\&\quad \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n, \\&= x^n + n a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \cdots + \\&\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \cdots \\&= n a^{n-1} x + a^n.\end{aligned}$$

通项公式 第 $k+1$ 项 $T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}.$

二、初等几何的一些公式

以字母 r 或 R 表示半径, h 表示高, s 表示底面积, l 表示母线长,

1. 圆 周长 $= 2\pi r$; 面积 $= \pi r^2$.

2. 圆扇形 面积 $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$. (α 为扇形的圆心角).

3. 正圆柱体 体积 $= \pi r^2 h$;

侧面积 $= 2\pi r h$; 表(全)面积 $= 2\pi r(r+h)$.

4. 正圆锥 体积 $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$; 侧面积 $= \pi r l$;

表(全)面积 $= \pi r(r+l)$.

5. 球 体积 $= \frac{4}{3}\pi r^3$; 表面积 $= 4\pi r^2$.

6. 正截锥体 体积 $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$;

侧面积 $= \pi l(R + r)$.

三、三角学的一些公式

1. 弧度和度的关系

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度}$$

即 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} = 0.01745329 \text{ 弧度},$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.29578^\circ = 57^\circ 17' 45''.$$

2. 弧长公式

在半径为 r 的圆中 (图预 1).

圆心角 θ 所对的圆弧长为 s , 则

$$s = r\theta.$$

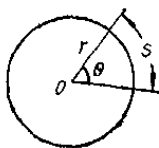


图 预 1

3. 基本关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha.$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$