微积分学

（第一册）

金　霁

河北人民出版社

微积分学

第一册

金 霁

河北人民出版社

一九八二年·石家庄

微 积 分 学

第一册

金 弄

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 17 1/2 印张 372,000 字　印数：1—3,050 1982年10月第1版

1982年10月第1次印刷　统一书号：7086·1101　定价：1.50 元

序　　言

本书是为没有读过大学的广大科技人员、中学数学教师和社会知识青年进修高等数学而编写的，内容由浅入深、详明直观，只要有高中的数学程度就可看懂，可供自学。为了便于读者学习，对书中的习题都一一给出答案，并对较难的题目做了详细的解答。书中有＊号的地方，初读者可先略过不读，待以后逐步掌握。

本书可做业余大学、电视大学和函授大学的试用教材，也可供工科院校的师生教学参考。

本书分四册出版。第一册：一元函数的微分学；第二册：一元函数的积分学，空间解析几何；第三册：多元函数的微分学，无穷级数，含参变量积分与广义积分；第四册：多元函数的积分学，场论，常微分方程。

本书由南开大学周学光教授审阅，胡梦郊副教授审阅了“场论”、“常微分方程”两章，烟学敏、许珍珍和范思根三位同志对本书也提出了一些改进意见。此外，卢桂华同志给本书绘制了全部插图。对以上同志表示衷心的感谢。

作　者

1982 年元月

目　　录

第一篇　预 备 知 识

§1　希腊字母与基本公式

Ⅰ、希腊字母

字	母	英文读音	中文谐音
A	α	alpha	阿尔法
B	β	beta	贝塔
Γ	γ	gamma	嘎马
Δ	δ	delta	得尔塔
E	ε	epsilon	艾普西龙
Z	ζ	zeta	截塔
H	η	eta	艾塔
Θ	θ	theta	西塔
I	ι	iota	优他
K	κ	kappa	卡怕
Λ	λ	lambda	兰母大
M	μ	mu	米优
N	ν	nu	尼优
Ξ	ξ	xi	克西

Ο	ο	omicron	奥迷克戎
Π	π	pi	派
Ρ	ρ	rho	洲
Σ	σ	sigma	西格马
Τ	τ	tau	套
Υ	υ	upsilon	宇普西龙
Φ	φ φ*	phi	夫爱
Χ	χ	chi	气
Ψ	ψ	psi	普西
Ω	ω	omega	欧米嘎

注* 老体字母

Ⅰ、基本公式

为了方便读者，将今后学习中用到的一些公式列举如下：

一、初等代数

1、乘法和因式分解

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

(3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

(4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

(6) $a^2-b^2=(a-b)(a-b)$.

(7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(8) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(9) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

(10) n 为偶数时，

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

(11) n 为奇数时，

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2、一元二次方程 $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

(1) 求根公式

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2) 根与系数的关系

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

(3) 根的判别式

$$\text{当 } b^2 - 4ac \begin{cases} >0, & \text{两个根是实数且不相等.} \\ =0, & \text{两个根是实数而且相等.} \\ <0, & \text{两个根是虚数.} \end{cases}$$

3、指数

(1) 定义

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{个}a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a>0).$$

$$a^0 = 1 \, (a \neq 0). \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a>0).$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}\quad (a\neq 0).$$

其中 m，n 是正整数。

(2) 运算规则

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta},\qquad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}.$$

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta},\qquad (ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}.$$

其中 a、b 是正实数，α、β 是任意实数。

4、**对数**

(1) 定义　如果 $a^{x}=N(a>0, a\neq 1)$，那么 x 叫做 N（真数）的以 a 为底的对数，记作

$$x=\log_{a}N.$$

(2) 恒等式

$$a^{\log_{a}N}=N.$$

(3) 性质

$$\log_{a}(MN)=\log_{a}M+\log_{a}N.$$

$$\log_{a}\left(\frac{M}{N}\right)=\log_{a}M-\log_{a}N.$$

$$\log_{a}M^{n}=n\log_{a}M.$$

$$\log_{a}\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_{a}M.$$

(4) 换底公式

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

5、有限项数项级数

(1) 等差级数

首项为 a_1，公差为 d 的等差级数是指下列和式：

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + \overline{n-1}d).$$

等差级数的前 n 项的和为

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d],$$

或 $$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

(2) 等比级数

首项为 a_1，公比为 r 的等比级数是指下列和式：

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

等比级数的前 n 项的和为

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1).$$

(3) 其他用到的级数

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (n-1) + n$$

$$= \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}.$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2.$$

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1).$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

6、排列组合和二项式定理

(1) 阶乘　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$.

(2) 选排列　m 个元素中取 n 个的排列种数

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

(3) 全排列　m 个元素的排列种数

$$P_m=m(m-1)(m-2)\cdots3\cdot2\cdot1=m!.$$

(4) 组合　m 个元素中取 n 个的组合种数

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$$

$$=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}.$$

(5) 组合的性质

$$C_m^n = C_m^{m-n}, \qquad C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n.$$

(6) 二项式定理

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^k a^k x^{n-k} +$$

$$\cdots\cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

$$= x^n + n a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k} + \cdots\cdots$$

$$+ n a^{n-1} x + a^n.$$

通项公式　第 $k+1$ 项　$T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}$.

二、初等几何的一些公式

以字母 r 或 R 表示半径，h 表示高，s 表示底面积，l 表示母线长.

1. **圆**　周长 $= 2\pi r$；　面积 $= \pi r^2$.

2. **圆扇形**　面积 $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$. （α 为扇形的圆心角）.

3. **正圆柱体**　体积 $= \pi r^2 h$；

侧面积 $= 2\pi r h$；　表（全）面积 $= 2\pi r(r+h)$.

4. **正圆锥**　体积 $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$；　侧面积 $= \pi r l$；

表（全）面积 $= \pi r(r+l)$.

5. **球** 体积 $=\frac{4}{3}\pi r^3$； 表面积 $=4\pi r^2$。

6. **正截锥体** 体积 $=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$；

侧面积 $=\pi l(R+r)$。

三、三角学的一些公式

1. 弧度和度的关系

$$180^\circ=\pi\text{ 弧度}$$

即 $$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}=0.01745329\text{ 弧度},$$

$$1\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}=57.29578^\circ=57^\circ17'45''。$$

2. 弧长公式

在半径为 r 的圆中（图预 1），圆心角 θ 所对的圆弧长为 s，则

$$s=r\theta。$$

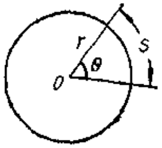

图 预1

3、基本关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$， $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$。

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$， $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$。