轨迹方程

GUI JI FANG CHENG

王林全 编著

轨迹方程

王林全　编著

广西人民出版社

轨迹方程

王林全 编著

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　　广西新华印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　7.375印张　187 千字
1982年9月第1版　　1982年9月第1次印刷
印 数 1—14,100册
书号：7113·437　　定价：0.76元

前　言

解析几何是中学数学课程的重要组成部分。解析几何运用代数、三角知识来研究几何图形的性质，具有综合性。它是研究高等数学的工具，在工程技术和物理学中，也广泛地利用解析几何作为研究工具。

为什么解析几何那么重要？它是怎样产生和发展起来的？

伟大的革命导师恩格斯说过，数学的转折点是笛卡儿变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。

恩格斯把解析几何的产生看成是数学发展的转折点，他高度评价了这门学科产生的意义，这种评价是恰如其分的。

几千年来，我们勤劳的祖先，在劳动生产过程中，逐步认识了各种数，包括正数和负数，有理数和无理数，实数和复数，等等。同样，人们也认识了各种几何图形，包括三角形和多边形，直线图形和曲线图形等等。其中，我们在课本中所遇到的圆、椭圆、双曲线、抛物线等曲线图形，在两千年前的古希腊，已经研究得很详细，得到许多精采的结果。

但是，由于生产条件和思想方法的限制，人们用孤立的、静止的观点研究数学，数和形这两大分支间，缺乏有机的联系，因此数学发展很慢。

直到十七世纪，科学技术的发展需要新的数学工具，只用常量数学，确实难予反映和表述自然界和生产技术中所遇到的数量关系了。

例如，自由落体在下落过程中，它的高度就是变数。如果用数字来刻划炮弹飞行时的位置，这些数也是变数。当时，天文学家开普勒发现，行星沿椭圆轨道绕太阳运动；物理学家伽利略发现，斜抛体沿抛物线轨道运动。这就要求人们研究，沿椭圆，抛物线运动的点，它的位置变化如何用数学表示。生产技术发展还向人们提出各种问题，如变力所做的功，各种形状的几何体表面积和体积的计算，等等。

这些重大的课题，是常量数学所不能解决的，于是，崭新的数学分支——解析几何和微积分就出现了，数学发展，就进入了以变量为其主要研究对象的新时期。

1637年，法国哲学家和数学家笛卡儿（Descartes）发表了“几何学”一书，系统地阐述了用变数观点来研究几何图形的思想方法，这就是解析几何的思想方法。人们把笛卡儿推崇为解析几何的奠基者，他是当之无愧的。

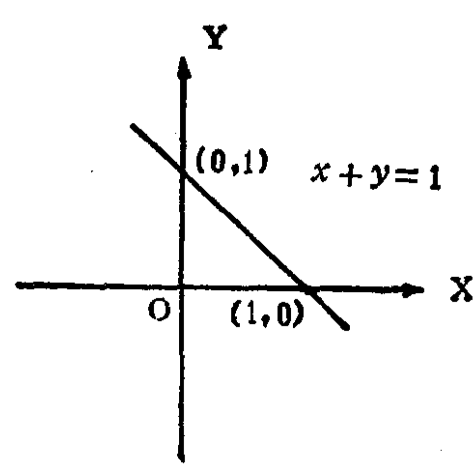
解析几何的出现，在传统数学两大分支——代数和几何之间，架起了一条宏伟的桥梁。几何问题代数化，图形性质坐标化，这就是解析几何的思想方法。它使得运用代数方法研究几何成为可能，同时，借助于几何图形，又可以使我们对函数的研究更加直观具体。

未学过解析几何的读者，可能对方程

$$x+y=1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

没有很大的兴趣，因为方程（1）有两个变数，从代数观点来看，它是不定方程，没有固定解答。

但是，解析几何把（x，y）看作是平面上动点的流动坐标，方程（1）就表示如右图所示的直线，它表示动点沿该直线运动时，其坐标变化的规律，因此



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

有完全实际的意义。

现在，解析几何学的思想方法，已经深入到数学本身和生产技术的很多领域，为了攀登科学技术高峰，我们一定要学好解析几何学，打好数学基础。

这本书是为帮助读者学习平面解析几何而写的，它着力于帮助读者了解解析几何的一个最重要的问题——求动点的轨迹方程问题。

求动点的轨迹方程，是解析几何两大基本问题之一，由于中学生未摸清求轨迹方程的规律，所以历来感到比较困难，近年历次高考及数学竞赛，关于求轨迹方程的问题屡屡出现，考试时为此失分者甚多。

大部分解析几何课本，对求轨迹方程问题，均未作细致的总结和阐述，这样，学生即使做了不少习题，条件稍一变更，又感到疑惑不解，无从着手了。

所有这些，促使作者决心为中学生编写一本辅导读物，帮助读者解决这方面的疑难。这本书主要研究求轨迹方程的思想方法，总结常见各种类型的轨迹问题。作者根据参加近年历次高考复习课教学，以及参加校内外，区、市、省和全国数学竞赛辅导，命题，译卷工作的体会，针对学生常出现的问题，教学的难点，提出自己的看法，希望对读者有所启发。

全书各章节例题比较多，既注意分析解题思路，也注意一题多解。每节附有相当数量的习题，大都同时提出详略不同的解法，读者使用本书时，要结合课本进行学习，对于书中的例题和习题，要尽量自己先做一遍，看了书的解法，还应该问自己，还有没有更好的解法，同时，自己也要不断总结解题经验。

最后，本书能得以问世，要感谢数学教育界的前辈。华南师院副院长、附中校长王屏山同志及华南师院数学系主任曾如阜教授对本书的写作给予热情支持和鼓励。北京师大刘绍学教授审阅

过本书写作大纲，并提出宝贵意见。

广州市教育局郭乃森同志审读过本书第一稿和第二稿，提出相当中肯的意见。最后给审阅定稿。

作者谨向上述同志表示感谢。

由于水平所限，本书谬误疏忽在所难免，敬请读者批评指正。

编者著

目　录

第一章

求轨迹方程的思维方法

第二章

主要类型的轨迹问题

第 一 章

求轨迹方程的思维方法

§1. 明确概念，理清思路

同学们求轨迹方程时，常出现各种错误，其主要根源，就是概念不清。什么叫轨迹？什么叫轨迹方程？如果对上述问题含糊不清，就很难谈得上求轨迹方程了。

作为本章的开始，我们不妨先简要复习一下点的轨迹及轨迹方程两个概念。

（一）点的轨迹

既可把点的轨迹看作动点依一定规则运动所形成的图形，也可以把它看成是平面中具有某种性质的点集。作为轨迹的这种点集，必须具备两个本质特征：

1. 集合中每一个元素都具备某种固有性质；

2. 具有这种固有性质的点，都成为该集合中的元素。

前一个特征，称为集合的纯粹性，即点集中不能混杂不具有这种固有性质的点；后一个特征，称为集合的完备性，[redacted]集中不能漏掉了具有这种固有性质的点。

例1. 试求坐标都为正数，且与原点距离等于定长1的点的轨迹。

分析：有些读者往往会认为所求轨迹是以坐标原点O为圆心，半径为1的圆，如图1—1，或者误以为包括A,B两点在内

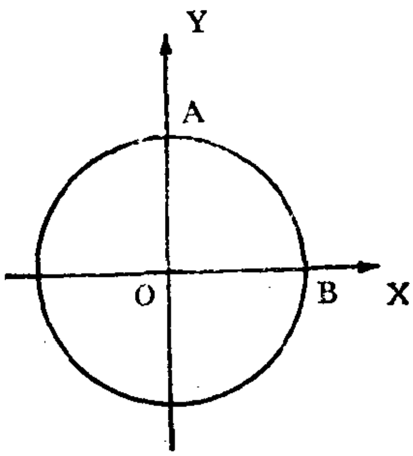


图1—1

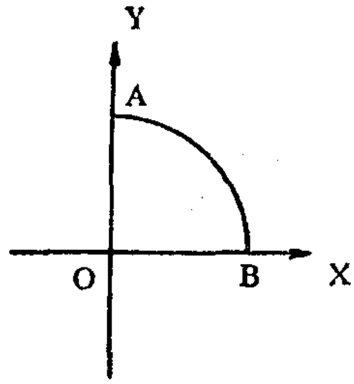


图1—2

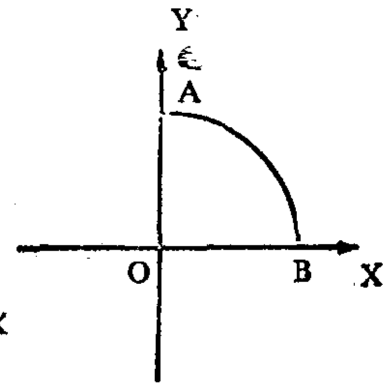


图1—3

的，以O为圆心，半径为1的$\frac{1}{4}$圆周，如图1—2。

虽然图1—1、图1—2所示圆弧上的点，到原点的距离都是1，但是上述图形所示的点集，对于题目所指定的性质，不是纯粹的。图1—1混杂了坐标为负数的点，图1—2也混杂了A，B两点，其中$A(0,1)$，$B(1,0)$，它们的坐标不完全是正数。

因此，图1—1、图1—2所示的点集，都不是所求的轨迹。

解：图1—3所示的点集是在第一象限，以O为圆心，1为半径的$\frac{1}{4}$圆周，除去了坐标轴上的A、B两点，对于题设的条件，既不杂，也不漏，因此它就表示所求的轨迹。

例2．与x轴相切，且半径等于1的动圆圆心的轨迹是什么？画图说明。

解：由于动圆和x轴相切，且圆心到x轴距离总等于1，因此，问题就转化为求到x轴距离等于1的点的轨迹。

显然，所求的轨迹是和x轴平行，且和x轴距离为1的两条平行线l_1和l_2，如图1—4。

注意：

有些读者分析问题往往带有片面性，他们在草图中把动圆画在x轴上（或下）方，往往就不加思考地认为所求的轨迹是直线l_1（或l_2），这就漏掉了一条直线上的点，他们所指出的点集对于题目所示的性质是不完备的，从而不是所求的轨迹。

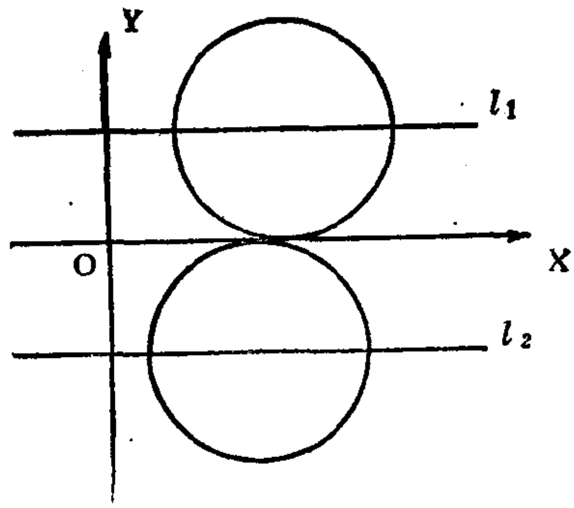


图 1 — 4

通过以上分析，我们把平面上点的轨迹的定义概括如下：

定义：对于平面上的点集，如果 1 ）集合中每一个点都满足某个条件； 2 ）满足该条件的点都属于上述点集。则称上述点集是满足某种条件的点的轨迹。

（二）轨迹方程

同时具有纯粹性和完备性的点集，是所有轨迹的共有属性。但这种纯粹性和完备性，是对于某种条件而言的。不同的轨迹就是不同的点集，它们所满足的条件是各不相同的。直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等，都分别满足不同的几何条件，因此，它们的图形就各有自己的特征。它们都是不同的轨迹，既有共性，也有各自的个性。

解析几何的重要任务之一，就是要用数学语言分别描述各种轨迹各自的几何特点。

各种轨迹的几何特征，既可用语言文字描述，也可以用数学式子描述。用数学式子来描述轨迹，就是建立轨迹方程。

以有序实数对（x，y）表示平面上的点，用含有x，y的方程表示某个平面点集中所有点的共同性质，使我们有可能把平面

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

图形性质的问题，转化为点的坐标所适合的代数方程的性质问题，从而提供了用代数方法处理几何问题的途径。

前面所提到的几种常见的轨迹，如果把它们看作平面上的点集，可作如下表示：

直线L：$\{(x,y): y=kx+b\}$

圆　C：$\{(x,y): x^2+y^2=r^2\}$

椭圆E：$\left\{(x,y): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$

双曲线H：$\left\{(x,y): \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$

抛物线P：$\{(x,y): y^2=2px\}$

上述表示各个点集性质的等式，分别称为各个轨迹的方程。如$y=kx+b$表示直线L上的点集的性质，它就称为直线的方程。

为了简单起见，今后我们就只用方程形式表示某个轨迹，而不必再使用集合的记号。

一般地说，如果一个方程$F(x,y)=0$反映了轨迹C上所有点的共同性质，且方程F和轨迹C之间满足：

1．轨迹C上所有点的坐标适合方程$F(x,y)=0$；

2．坐标适合方程$F(x,y)=0$的所有点都在轨迹C上。

则把方程$F(x,y)=0$称为轨迹C（或曲线C）的方程。而轨迹C称为方程$F(x,y)=0$的曲线。

本书将主要研究，给出轨迹C上的点所满足的条件，如何正确求出轨迹方程。要使所求的轨迹方程正确无误，必须扣紧关于轨迹方程的上述两项规定，亦即要弄清点的轨迹的定义。

例3．某动点到两坐标轴等距，它的轨迹方程是否为

$x-y=0$？

分析：如图1—5中，Ⅰ、Ⅲ象限角平分线l_1及Ⅱ、Ⅳ象限角平分线l_2上的点都符合要求。显然l_2上的点并不适合方程$x-y=0$

因此，方程$x-y=0$不是所求的轨迹方程。

所求的轨迹方程应该是：

$$|x|-|y|=0$$

或　$x^2-y^2=0$

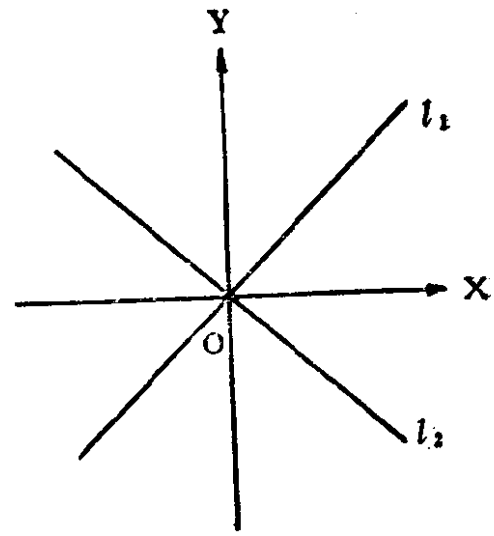


图1—5

例4．某动点在第一象限，且到第一象限角两边等距离，这动点的轨迹方程是否为$x-y=0$？

分析：所求的轨迹应该是第一象限角的平分线。但原点不属于任何象限，因此原点必须除外，显然，该轨迹上每一点的坐标都适合方程$x-y=0$

但是第三象限角平分线上的点也适合所给方程，它们并不在所求的轨迹上。

因此，所求的轨迹方程应该是：

$$x-y=0 \quad (x>0)$$

一般地说，如果一段曲线是某个轨迹的一部分，这段曲线除了用某个轨迹的方程来描述外，还要加上约束条件，这个约束条件，常用不等式表示。例4所求的曲线方程，除了用相应的直线方程$x-y=0$表示外，还加上了约束条件$x>0$。

例5．试表示以$A(3,0)$和$B(0,2)$为端点的线段。（如图1—6）

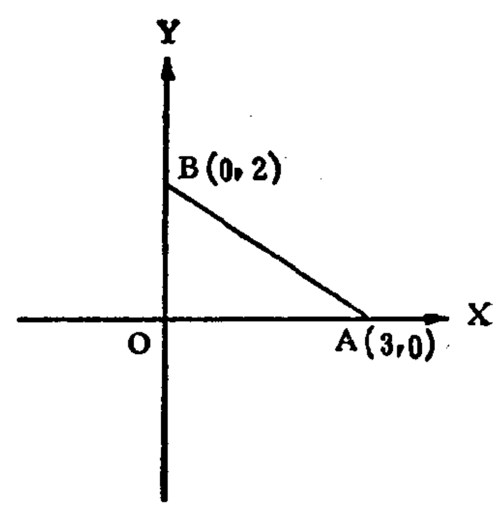


图1—6

解：直线AB的方程是：

$$2x+3y-6=0$$

线段AB上的点还要满足

$$0\leqslant x\leqslant 3$$

∴线段AB可以表示为

$$\begin{cases}2x+3y-6=0\\ 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}2x+3y-6=0\\ 0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$$

例 6. 已知直线L：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　圆C：$x^2+y^2=1$ 抛物线 Q：$y^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，且L和C在第三象限交于点A、C和Q在第四象限交于点B，试表示圆C上$\overset{\frown}{AB}$的点集。（如图 1—7）

解： 由方程组

$$\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

解得A点横坐标为$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

又由方程组

$$\begin{cases}y^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

解得B点横坐标为$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

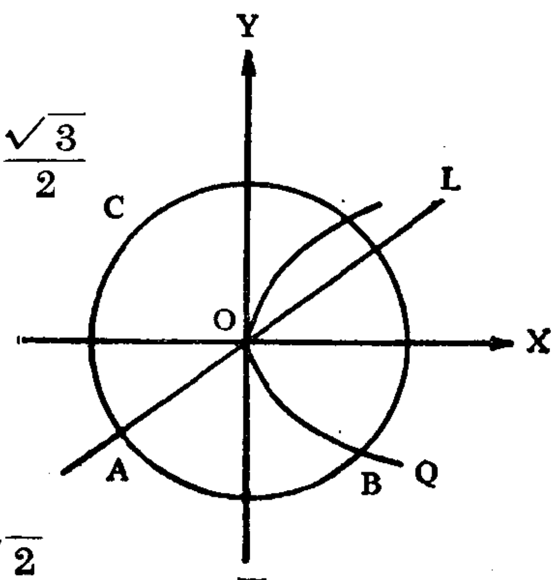


图 1—7

注意到$\overset{\frown}{AB}$在x轴下方，所以它可以表示为：

$$\begin{cases}y=-\sqrt{1-x^2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

例 7. $A(-1,\ 0)$和$B(2,\ 0)$是两个定点，点$P(x,\ y)$移动时适合条件$\angle PBA=2\angle PAB$

求动点P的轨迹方程。

这是在相当多的书中都出现的一道习题，同学们演算此题错误颇多，主要的原因是概念不清，我们先提出同学们常见的解法，

再分析其错误，最后提出正确解法。

【常见的解法】：

如图1—8　设$\angle PAB=\beta$，$\angle PBA=\alpha$

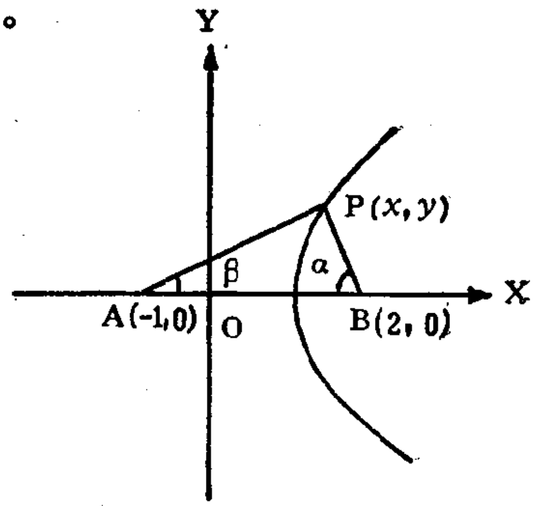


图1—8

依题意　$\alpha=2\beta$　……(1)

$\therefore$　$tg\alpha=tg2\beta$　……(2)

但　$tg\alpha=-k_{PB}=\frac{-y}{x-2}$　……(3)

$tg\beta=\frac{y}{x+1}$　……(3)′

$$\therefore\ tg2\beta=\frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}=\frac{\frac{2y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}\qquad\cdots\cdots(4)$$

把(3)，(4)代入(2)得：

$$\frac{-y}{x-2}=\frac{\frac{2y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}\qquad\cdots\cdots(5)$$

化简(5)得：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　……(6)

这就是所求的轨迹方程，它表示双曲线。

【错误剖析】

1．片面性：上面(3)、(3)′两式，仅当P点在x轴上方时才成立。当P点在x轴下方时，(3)、(3)′两式是不成立的。如图1—9。

事实上$\because$　$0\leqslant\alpha+\beta<\pi$

且　$\alpha=2\beta$　　$\therefore$　$0\leqslant\beta<\frac{\pi}{3}$

$\therefore$　$tg\beta\geqslant0$　且点P必在A点右方，

$\therefore$　$x>-1$，$x+1>0$

但当P点在x轴下方时，

$y<0$ 从而 $\frac{y}{x+1}<0$

$\therefore tg\beta\neq\frac{y}{x+1}$。即(3)′式不成立。

同理可证，当$y<0$时，(3)式亦不成立。

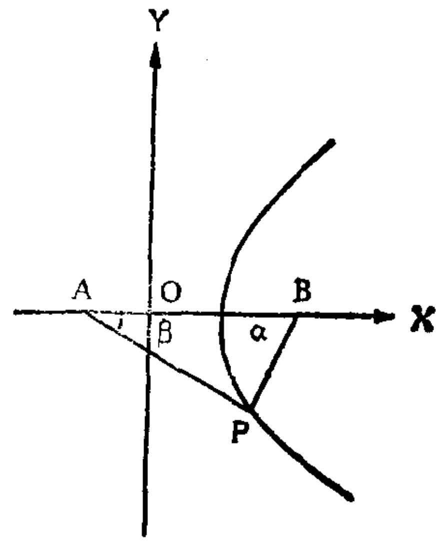


图1－9

因此上面的解法欠全面。

2．不注意同解变形

(6)式表示双曲线，这条双曲线是否所求的动点的轨迹？

否。按照题目所指出的条件$\alpha=2\beta$，只有点P在双曲线右支时，$\alpha>\beta$，(1)式才能成立。当P在双曲线左支时，$\alpha<\beta$，(1)式不能成立。

可见方程(6)所表示的双曲线，有“一半”不是所求的轨迹，双曲线的左支是“混”进去的。

产生“混杂”的原因，就是从(1)式到(2)式的变形不是同解变形。根据(2)式，既可得到(1)式，亦可得到另一个结果　$\alpha+n\pi=2\beta$，(n为整数)当$n\neq0$时，就不符合题目所规定的轨迹条件。可见从(1)到(2)，扩大了P的坐标的许可范围。

还要注意到，化简(5)式时，两边约去了y，这就失去了$y=0$所表示的点，事实上，当P点为线段AB的内点时，

$\alpha=2\beta=0$，等式(2)仍然成立。

既然方程(6)所表示的曲线，对于题目所规定的轨迹条件

既杂也漏，它就不是所要求的轨迹方程。

【正确的解法】

$\because\quad 0\leqslant\alpha+\beta<\pi,\qquad$ 且 $\quad\alpha=2\beta\qquad\therefore\quad 0\leqslant 3\beta<\pi$

$\therefore\quad 0\leqslant\beta<\dfrac{\pi}{3}\qquad\therefore$ P必在A点右方

$\therefore\quad x>-1$

当 $\quad y\geqslant 0$ 时，$\quad tg\alpha=\dfrac{-y}{x-2},\qquad tg\beta=\dfrac{y}{x+1}$

$y<0$ 时，$\quad tg\alpha=k_{PB}=\dfrac{y}{x-2}\quad(x\neq 2)$

$$tg\beta=-k_{PA}=\frac{-y}{x+1}$$

$\because\quad tg\alpha=tg\,2\beta=\dfrac{2\,tg\beta}{1-tg^2\beta}$

分别把$tg\alpha$、$tg\beta$的式子代入上式都得到

$$\frac{-y}{x-2}=\frac{2\dfrac{y}{x+1}}{1-\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}$$

化简得：$y(3x^2-y^2-3)=0$

$\therefore$ 所求的轨迹方程为：

$y=0\qquad(-1<x<2)\qquad\cdots\cdots(1)$

$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\qquad(x>-1)\qquad\cdots\cdots(2)$

（1）式表示线段AB的内点，（2）式表示双曲线的右支。

在这一节里，我们研究了轨迹及轨迹方程的概念，从而特别要注意轨迹方程的两个要求，正分别反映轨迹的纯粹性和完备性的两个特点。概念清楚做题才能正确无误。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com