高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

（第二版）

谢树艺

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

（第二版）

谢树艺

高等教育出版社

本书是按照1980年审定的《工程数学教学大纲(草案)》在第一版的基础上修订的.主要内容有：矢量分析，场论，哈米尔顿算子，梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式等四章。与第一版相比，除了三、四两章系由附录改为正文外，还增加了若干内容与例习题。本书论证清晰，文笔通畅，可作为工科有关专业的教材。配合《工程数学——矢量分析与场论学习指导书》(1982年版)，本教材也可供函授学校与自学者使用。

高等学校教材

工 程 数 学

矢量分析与场论

(第 二 版)

谢 树 艺

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本850×1168 1/32 印张3.5 字数82,000

1978年12月第1版

1985年3月第2版 1985年3月第1次印刷

印数 00,001—61,300

书号 13010·01011 定价0.74元

第二版前言

这一版是在1978年第一版的基础上修订的．修订时以1980年6月工科数学教材编审委员会扩大会议审订的《工程数学教学大纲(草案)》为根据，并参照了我校使用第一版的经验以及许多使用此书的教师和读者的宝贵意见．这次修订，对超出大纲的内容或大纲中原已打了“*”的内容均统一标以“*”号，可根据不同的学制及各类专业的不同要求加以选用．在修订中，对第一版里的不妥和错误之处，作了改正；同时，略增加了些例题，如学时不够，可少讲或不讲；对习题也略有增加，其中稍难一点的标有“*”号，供中等以上程度的学生选作；此外，根据一些教师的意见，将第一版的附录(一)与附录(二)改为第三章与第四章，同时将第二章第五节中“平行平面场的概念”提前在第一节之末尾处讲．除此以外，在修订中还尽量注意使《工程数学——矢量分析与场论学习指导书》(1982年版)，对此第二版也适用．

使用第二版的教学时数：全书大约为20学时；若除去有“*”号的内容，则大约为14学时．

许多教师和读者对本书提出了宝贵意见，特此表示衷心感谢．

限于编者水平，在第二版中，难免仍存在缺点和错误，诚恳地希望读者批评指正．

编　者

1983年10月于重庆大学

目　　录

*第一章　矢量分析

这一章矢量分析，是矢量代数的继续，它是场论的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有用工具．其主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等．

第一节　矢性函数

1．矢性函数的概念

我们在矢量代数中，曾经学过模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为**常矢**（零矢量的方向为任意，可作为一个特殊的常矢量）；然而，在许多科学、技术问题中，我们常常遇到模和方向或其中之一会改变的矢量，这种矢量称为**变矢**．例如当质点 M 沿曲线 l 运动时，其速度矢量 $\boldsymbol{v}$，在运动过程中，就是一个变矢，参看图（1-1）．此外，在矢量分析中还引进了矢性函数的概念，其定义如下．

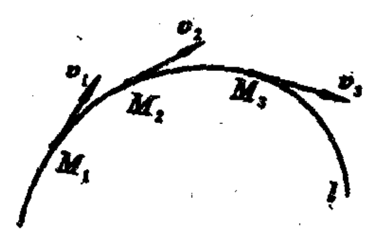

图 1-1

定义：设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量和它对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 t 的**矢性函数**，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t), \tag{1.1}$$

并称 G 为函数 $\boldsymbol{A}$ 的**定义域**．

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标（即它在三个坐标轴上的投影），显然都是 t 的函数：

$$A_x(t),\qquad A_y(t),\qquad A_z(t),$$

所以，矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的坐标表示式为：

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为沿 x,y,z 三个坐标轴正向的单位矢量. 可见,一个矢性函数和三个有序的数性函数(坐标)构成一一对应的关系.

2. 矢端曲线

本章所讲的矢量均指**自由矢量**,就是当二矢量的模和方向都相同时,就认为此二矢量是相等的. 据此,为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的变化状态,我们就可以把 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点. 这样,当 t 变化时,矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l,如图(1-2);这条曲线叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**矢端曲线**,亦叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的**图形**. 同时称(1.1)式或(1.2)式为此曲线的**矢量方程**.

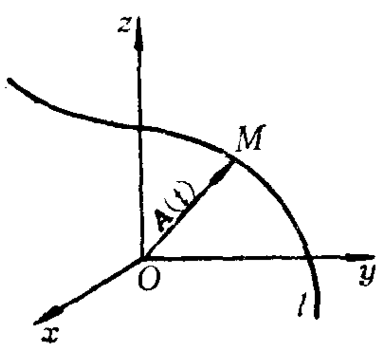

图 1-2

由矢量代数知道:起点在坐标原点 O,终点为 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M(对于 O 点)的**矢径**,常用 $\boldsymbol{r}$ 表示:

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

当我们把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点时,$\boldsymbol{A}(t)$ 实际上就成为其终点 $M(x,y,z)$ 的矢径. 因此,$A(t)$ 的三个坐标 $A_x(t),A_y(t),A_z(t)$ 就对应地等于其终点 M 的三个坐标 x,y,z. 即有

$$x=A_x(t),\qquad y=A_y(t),\qquad z=A_z(t), \tag{1.3}$$

此式就是曲线 l 的以 t 为参数的**参数方程**.

容易看出,曲线 l 的矢量方程(1.2)和参数方程(1.3)之间,有着明显的一一对应关系,只要知道其中的一个,就可以立刻写出其另一个来.

例如:已知圆柱螺旋线(图1-3)的参数方程为

$$x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=b\theta,$$

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}.$$

又如：已知摆线(图 1-4)的参数方程为

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),$$

则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a(t-\sin t)\boldsymbol{i}+a(1-\cos t)\boldsymbol{j}.$$

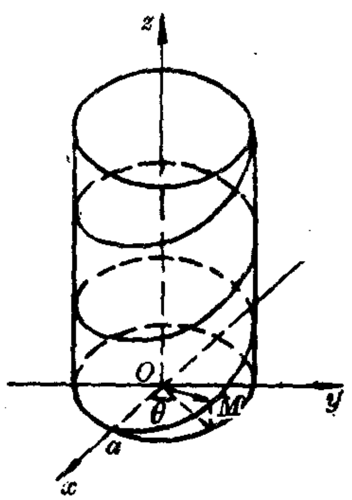

图 1-3

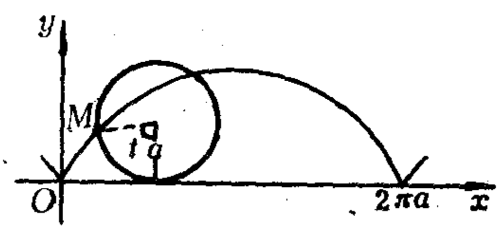

图 1-4

3. 矢性函数的极限和连续性

和数性函数一样，矢性函数的极限和连续性，是矢性函数的微分与积分的基础概念. 兹分述于下：

(1) **矢性函数极限的定义**：设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义(但在 t_0 处可以没有定义)，$\boldsymbol{A}_0$ 为一常矢. 若对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，就有

$$|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|<\varepsilon$$

成立，则称 A_0 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0. \tag{1.4}$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似. 因此，矢性函数也就有类似于数性函数中的一些极限运算法则. 例如

$$\lim_{t\to t_0} u(t)\boldsymbol{A}(t) = \lim_{t\to t_0} u(t) \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{A}(t), \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t) \pm \boldsymbol{B}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \pm \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{B}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \cdot \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t) \times \boldsymbol{B}(t)] = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \times \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t), \tag{1.8}$$

其中 $u(t)$ 为数性函数，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 为矢性函数；且当 $t \to t_0$ 时，$u(t)$，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$ 均有极限存在.

依此，设

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{i} + A_y(t)\boldsymbol{j} + A_z(t)\boldsymbol{k},$$

则由(1.6) 与(1.5) 有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) = \lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i} + \lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j} + \lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.9}$$

此式把求矢性函数的极限，归结为求三个数性函数的极限.

（2）**矢性函数连续性的定义**：若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}(t_0), \tag{1.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t = t_0$ 处**连续**.

容易看出：矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 都在 t_0 处连续.

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续，则称它在**该区间内连续**.

第二节　矢性函数的导数与微分

1. 矢性函数的导数

设有起点在 O 点的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t \neq 0)$ 时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t) = \overrightarrow{OM},$$

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON},$$

如图(1-5)，则

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数$\boldsymbol{A}(t)$ 的增量，记作$\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t). \quad (2.1)$$

据此，我们就可给出矢性函数的导数的定义.

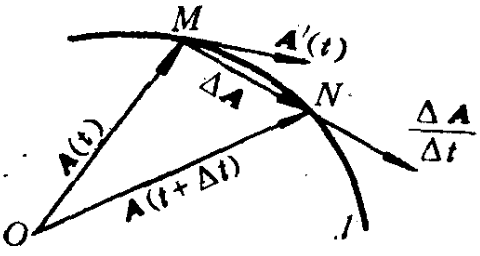

图 1-5

定义：设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这邻域内. 若 $\boldsymbol{A}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时，其极限存在，则称此极限为矢性函数$\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 处的导数(简称导矢)，记作$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$或 $\boldsymbol{A}'(t)$，即

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t-\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}. \qquad (2.2)$$

若$\boldsymbol{A}(t)$ 由坐标式给出：

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k},$$

且函数$A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 在点 t 可导，则有

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{k},\\&=\frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$A'(t)=A'_x(t)\boldsymbol{i}+A'_y(t)\boldsymbol{j}+A'_z(t)\boldsymbol{k}. \qquad (2.3)$$

此式把求矢性函数的导数归结为求三个数性函数的导数.

例 1. 已知圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k},$$

求导矢 $\boldsymbol{r}'(\theta)$.

解: $\boldsymbol{r}'(\theta)=(a\cos\theta)'\boldsymbol{i}+(a\sin\theta)'\boldsymbol{j}+(b\theta)'\boldsymbol{k}$

$$=-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\theta\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}.$$

例 2. 设 $\boldsymbol{e}(\varphi)=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$,

$\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$.

试证明:

$$\boldsymbol{e}'(\varphi)=\boldsymbol{e}_1(\varphi),\boldsymbol{e}_1'(\varphi)=-\boldsymbol{e}(\varphi),$$

及 $\boldsymbol{e}(\varphi)\perp\boldsymbol{e}_1(\varphi)$.

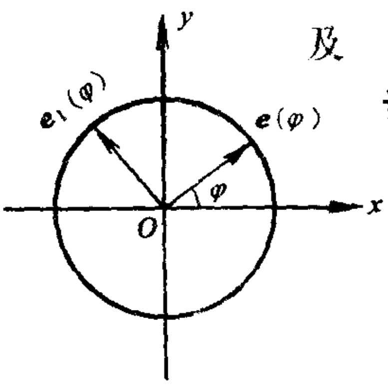

图 1-6

证: $\boldsymbol{e}'(\varphi)=(\cos\varphi)'\boldsymbol{i}+(\sin\varphi)'\boldsymbol{j}$

$=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$

$=\boldsymbol{e}_1(\varphi)$,

$\boldsymbol{e}_1'(\varphi)=(-\sin\varphi)'\boldsymbol{i}+(\cos\varphi)'\boldsymbol{j}$

$=-\cos\varphi\boldsymbol{i}-\sin\varphi\boldsymbol{j}$

$=-\boldsymbol{e}(\varphi)$,

又 $\qquad \boldsymbol{e}(\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\cos\varphi(-\sin\varphi)+\sin\varphi\cos\varphi=0$,

所以 $\qquad \boldsymbol{e}(\varphi)\perp\boldsymbol{e}_1(\varphi)$.

容易看出,$\boldsymbol{e}(\varphi)$ 为一单位矢量,故其矢端曲线为一单位圆,因此 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 又叫做**圆函数**;与之相伴出现的 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$,亦为单位矢量,其矢端曲线亦为单位圆,如图(1-6).

引用圆函数,圆柱螺旋线的方程就可简写为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=a\boldsymbol{e}(\varphi)+b\theta\boldsymbol{k},$$

其导矢 $\qquad \boldsymbol{r}'(\theta)=a\boldsymbol{e}_1(\varphi)+b\boldsymbol{k}.$

2. 导矢的几何意义

如图(1-5)，l 为 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线，$\dfrac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在 l 的割线MN上的一个矢量. 当 $\Delta t>0$ 时，其指向与 $\Delta \boldsymbol{A}$ 一致，系指向对应 t 值增大的一方；当 $\Delta t<0$ 时，其指向与 $\Delta \boldsymbol{A}$ 相反，如图(1-7)，但此时$\Delta \boldsymbol{A}$指向对应 t 值减少的一方，从而$\dfrac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$仍指向对应 t 值增大的一方.

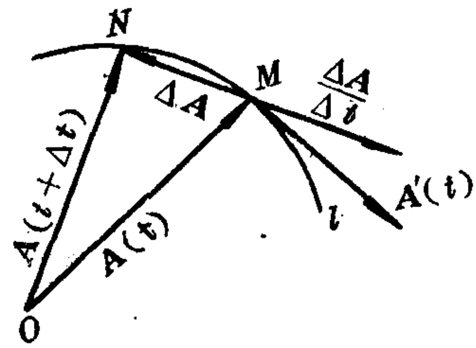

图 1-7

在 $\Delta t\to 0$ 时，由于割线 MN 绕点M转动，且以点M处的切线为其极限位置. 此时，在割线上的矢量$\dfrac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$，其极限位置，自然也就在此切线上，这就是说，导矢

$$\boldsymbol{A}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$$

当其不为零时，是在点M处的切线上，且由上述可知，其方向恒指向对应 t 值增大的一方. 故导矢在几何上为一矢端曲线的切向矢量，指向对应 t 值增大的一方.

3. 矢性函数的微分

(1) 微分的概念与几何意义

设有矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$，我们把

$$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)dt,\qquad (dt=\Delta t) \tag{2.4}$$

称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处的**微分**.

由于微分 $d\boldsymbol{A}$ 是导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 与增量 Δt 的乘积，所以它是一个矢量，而且和导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$一样，也在点M处与 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线 l 相切. 但其指向：当 $dt>0$ 时，与 $\boldsymbol{A}'(t)$的方向一致；而当 $dt<0$ 时，则与 $\boldsymbol{A}'(t)$的方向相反，如图(1-8).

微分 $d\boldsymbol{A}$ 的坐标表示式，可由(2.3)式求得，即

$$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)dt$$

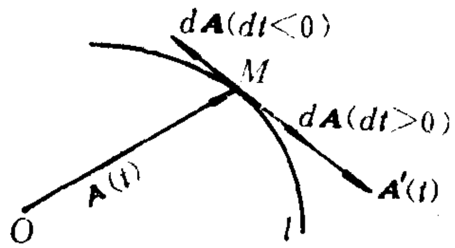

图 1-8

$$= A_x'(t)dt\boldsymbol{i} + A_y(t)dt\boldsymbol{j} + A_z'(t)dt\boldsymbol{k},$$

或

$$d\boldsymbol{A} = dA_x\boldsymbol{i} + dA_y\boldsymbol{j} + dA_z\boldsymbol{k} \quad (2.5)$$

例 3. 设$\boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + b\sin\theta\boldsymbol{j}$，求 $d\boldsymbol{r}$ 及$|d\boldsymbol{r}|$.

解:
$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= d(a\cos\theta)\boldsymbol{i} + d(b\sin\theta)\boldsymbol{j} \\ &= -a\sin\theta d\theta\boldsymbol{i} + b\cos\theta\, d\,\theta\boldsymbol{j} \\ &= (-a\sin\theta\boldsymbol{i} + b\cos\theta\boldsymbol{j})d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |d\boldsymbol{r}| &= \sqrt{(-a\sin\theta d\theta)^2 + (b\cos\theta d\,\theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\ |d\theta|. \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$**的几何意义**

如果我们把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{i} + A_y(t)\boldsymbol{j} + A_z(t)\boldsymbol{k}$ 看作其终点 $M(x, y, z)$的矢径函数

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

这里 $x = A_x(t), y = A_y(t), z = A_z(t)$，则(2.5)式又可写为

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}, \quad (2.6)$$

其模

$$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (2.7)$$

另一方面，我们若在**有向曲线**(即规定了正方向的曲线) l 上，取定一点 M_0 作为计算弧长 s 的起点，并以 l 之正向作为 s 增大的方向，则在 l 上任一点M处，弧长的微分是

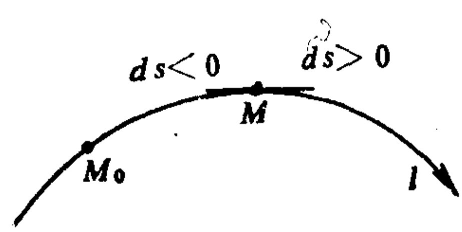

图 1-9

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

按下述办法取右端符号；以点M为界，当ds位于 s 增大一方时取正号，反之，取负号，如图(1-9).

由此可见，有

$$|d\boldsymbol{r}|=|ds|, \tag{2.8}$$

就是说，矢性函数的微分的模，等于（其矢端曲线的）弧微分的绝对值。从而由

$$|d\boldsymbol{r}|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|\cdot|ds|,$$

有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\frac{|d\boldsymbol{r}|}{|ds|}=1. \tag{2.9}$$

再结合导矢的几何意义，便知：矢性函数对（其矢端曲线的）弧长 s 的导数 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 在几何上为**一切向单位矢量**，恒指向 s 增大的一方．

4．矢性函数的导数公式

设矢性函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(t)$ 及数性函数 $u=u(t)$ 在 t 的某个范围内可导，则下列公式在该范围内成立

(1) $\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$,（$\boldsymbol{C}$ 为常矢）；

(2) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$；

(3) $\frac{d}{dt}(k\boldsymbol{A})=k\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$,（$k$ 为常数）；

(4) $\frac{d}{dt}(u\boldsymbol{A})=\frac{du}{dt}\boldsymbol{A}+u\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$；

(5) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}$;

特例：$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$,（其中 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$）；

(6) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}$;

(7) 复合函数求导公式：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u), u=u(t)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\frac{du}{dt}.$$

这些公式的证明方法，与微积分学中数性函数的类似公式的证法完全相同．比如公式(5)可以这样证明：

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B};\end{aligned}$$

以 Δt 除两端，有

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{\Delta t}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t};$$

再令 $\Delta t\to 0$ 两端取极限，就得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{0}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\\&=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

例 4. 矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的模不变的充要条件是

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0. \tag{2.10}$$

证：假定 $|\boldsymbol{A}|=$常数，

则有

$$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=\text{常数}.$$

两端对 t 求导[左端用导数公式(5)的特例]，就得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0.$$

反之，若有 $\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0$，

则有 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}^2=0$，

从而 $\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=$常数．

所以有 $$|A| = 常数.$$

这个例子，可以简单地说成：定长矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与其导矢互相垂直.

特别，对于单位矢量 $\boldsymbol{A}^{\circ}(t)$ 有

$$\boldsymbol{A}^{\circ} \perp \frac{d\boldsymbol{A}^{\circ}}{dt}, \qquad (2.11)$$

比如例 2 中的圆函数，就有 $\boldsymbol{e}(\varphi) \perp \boldsymbol{e}_1(\varphi)$ [因 $\boldsymbol{e}_1(\varphi) = \boldsymbol{e}'(\varphi)$].

例 5. 导矢的物理意义

设质点M在空间运动，其矢径 $\boldsymbol{r}$ 与时间 t 的函数关系为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

这个函数的矢端曲线 l，就是质点M的运动轨迹，如图(1-10).

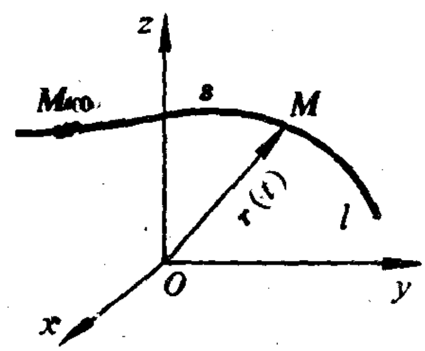

图 1-10

为了说明导矢$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的物理意义，假定质点在时刻 $t=0$ 时位于点 M_0 处，经过一段时间 t 以后到达点M，其间在 l 上所经过的路程为 s. 这样，点M的矢径 $\boldsymbol{r}$ 显然是路程 s 的函数，而 s 又是时间 t 的函数，从而可以将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 看作 $\boldsymbol{r}$ 是通过中间变量 s 而成为时间 t 的一个复合函数. 于是由复合函数的求导公式(7)有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

式中$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$的几何意义，如前段所述，是在点$M$处的一个切向单位矢量，指向 s 增大的一方. 因此，它表示在点M处质点运动的方向，现以 $\boldsymbol{\tau}$ 表之；而式中的$\frac{ds}{dt}$是路程 s 对时间 t 的变化率. 所以它表示在点M处质点运动的速度大小，如以 v 表之，则