熱物理學問題詳解

C. 基特爾　　H. 克羅默　　原著
臺大物理系 86 年畢業生班　　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

热物理学问题详解

C. 基特尔　H. 克罗默　原著
台大物理系 86 年毕业班　译著

*

晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 8 月第一版　开本：850×1168 1/32
1994 年 8 月第一次印刷　印张：6.5
印数：0001－600　字数：15.3 万字
ISBN：7－5062－1907－7/O・125
定价：11.00 元（W_B9402/8）

序

“熱物理學”是台大物理系三年級的必修課，今年這門課由蔡崇源老師講授。kittel 所著的“ Thermal Physics ”是我們兩本教科書之一，在我們上過一章或數章後都有兩節的習題討論課。經過班上同學的決議，我們認為應該把我們討論的心得記錄下來，提供給物理界的後進和愛好物理者一個參考，並希望物理界的先進能夠給我們指正，本書由四年級班會會長學藝負責召集記錄，並承蒙曉園出版社惠于出版，在此一併申謝。

1986 年畢業班謹誌

熱物理學問題詳解

(目　　錄)

第二章　熵與溫度

2.1　熵與溫度　設 $g(U) = CU^{3N/2}$，其中 C 爲常數，N 爲粒子數，試證

(a) $U = \frac{3}{2}N\tau$　(b) $(\partial^2\sigma/\partial U^2)$ 其值爲負

此題所示 $g(U)$ 的形式實際上被用來表示理想氣體的情況。

解　(a)已知　$g(U) = CU^{3N/2}$

由(2-21)式　$\sigma(N, U) \equiv \log g(N, U)$

得 $\sigma = \log CU^{3N/2} = \frac{3}{2}N \log U + \log C$

由(2-26)式　$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_N$

得 $\frac{1}{\tau} = \frac{3}{2}N\frac{1}{U}$　　故 $U = \frac{3}{2}N\tau$

(b) $\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial U^2}\right)_N = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{3}{2}N\frac{1}{U}\right)_N = -\frac{3}{2}N\frac{1}{U^2} < 0$

故 $(\partial^2\sigma/\partial U^2)_N$ 是負的

2.2　順磁性　計算一含有 N 個旋子（spins）的系統，在磁場強度 B，溫度 τ 時比例磁化量（fractional magnetization）平衡時的值。比例磁化量定義爲 $M/Nm = 2\langle S\rangle/N$，$m$ 爲每個旋子的磁矩。你可將多重數（multiplicity）$g(N, S)$ 取

對數以得熵值，如（1.35）式所示：

$\sigma(s) \simeq \log g(N, 0) - 2s^2/N$，若 $|s| \ll N$

〔提示〕先證在這樣的近似下，$\sigma(U) = \sigma_0 - U^2/2m^2B^2N$，其中 $\sigma_0 = \log g(N, 0)$，其次證明 $1/\tau = -U/m^2B^2N$，其中 $U = \langle U \rangle$，即平均熱能。

解 由（1-35）式

$$g(N, s) \cong g(N, 0)\exp(-2s^2/N)$$

得 $\sigma(N, s) \equiv \log g(N, s)$

$$\cong \log(N, 0) - 2s^2/N$$

由（1-47）式 $U = -2smB = -MB$

得 $s^2 = U^2/4m^2B^2$

代入 $\sigma(N, s)$ 中

得 $$\sigma(U) = \log(N, 0) - \frac{2}{N}\frac{U^2}{4m^2B^2}$$

$$= \sigma_0 - U^2/2m^2B^2N$$

故 $$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_N = -U/m^2B^2N$$

$$= \frac{2smB}{m^2B^2N} = \frac{2s}{mBN}$$

以上 $\frac{1}{\tau}$ 之式，必須在系統達成平衡時才有意義，如此，整個系統的溫度才是定值 τ。所以上式的 U，其實是達成平衡時的值，$\langle U \rangle$，同理，s 也是表示達成平衡時的值，$\langle s \rangle$，因此，上式可寫成

$$\frac{1}{\tau}=-<U>/m^2B^2N=\frac{2<s>mB}{m^2B^2N}=\frac{2<s>}{mBN}$$

故平衡時　$M/Nm=2<s>/N=mB/\tau$

2·3　量子化諧振子 '(a)利用（1.55）式的多重數函數及Stirling近似式 $\log N!\simeq N\log N-N$，將 $N-1$ 用 N 代入，求頻率爲 ω，N 個諧振子的系統，其熵值可表爲總量子數 n 的函數。(b)以 U 表此系統的總能量 $nh\omega$，將熵以 U，N 的函數形式表出，即 $\sigma(U,N)$。證明溫度 τ 時的總能量

$$U=\frac{N\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}$$

。此乃Planck 的結果，在第四章我們將會用較有力的方法將其導出，而毋須借助多重數函數。

解　由（1-55）知　$g(N,n)=\dfrac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$

當 N 很大時 $N-1\cong N$　故可以用 N 代替 $N-1$ 得

$$g(N,n)=\frac{(N+n)!}{n!N!}$$

(a)
$$\begin{aligned}\sigma(n)&=\log g(N,n)\\&=\log\frac{(N+n)!}{n!N!}\\&=\log(N+n)!-\log n!-\log N!\\&=(N+n)\log(N+n)-(N+n)\\&\quad-n\log n+n-N\log N+N\\&=(N+n)\log(N+n)-n\log n-N\log N\end{aligned}$$

(b) $U=n\hbar\omega$ 代入上式得

$$
\begin{aligned}
&\sigma(N, U)\\
&=(N+U/\hbar\omega)\log(N+U/\hbar\omega)\\
&\quad-(U/\hbar\omega)\log(U/\hbar\omega)-N\log N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}&=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_N=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)_N\left(\frac{\partial n}{\partial U}\right)\\
&=\frac{1}{\hbar\omega}\left[\log(N+n)+1-\log n-1\right]\\
&=\frac{1}{\hbar\omega}\log\frac{N+n}{n}
\end{aligned}
$$

$$\log\frac{N+n}{n}=\frac{\hbar\omega}{\tau}\quad \text{即}\frac{N+n}{n}=\exp(\hbar\omega/\tau)$$

解得　$n\left[\exp(\hbar\omega/\tau)-1\right]=N$

即 $(U/\hbar\omega)=\dfrac{N}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}$

得　$U=\dfrac{N\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}$

2.4　“Never”的意義　有人曾經說過*(見課本註)：“六隻猴子坐在打字機前胡亂敲它個幾千年，必然會把大英博物館所有的書都寫出來。”這眞是胡說八道，因爲他對一個非常、非常龐大的數字作了一個錯誤的結論。我們想問：全世界所有的猴子，在這宇宙的年齡內，能否打出一本特定的書來？

假設有 10^{10} 隻猴子，在宇宙年齡 10^{18} 秒的時間中，從頭到尾坐在打字機前。10^{10} 大約是現在全世界人口的三倍。我們假設每隻猴子每秒鐘可打 10 個鍵。一台打字機共有 44 個鍵

並且我們讓大寫字母由小寫字母來代替。設若莎士比亞的"哈姆雷特"一書中共有 10^5 個字母，這許多猴子是否能打出一部"哈姆雷特"？

(a)證明將 10^5 個字母以正確的順序（即Hamlet的順序）打出來的機率約為以下的數量級：$\left(\frac{1}{44}\right)^{100000} = 10^{-164,345}$，已知 $\log_{10} 44 = 1.64345$。(b)證明在宇宙的年齡中打出一部"哈姆雷特"的機率的數量級約為 $10^{-164\,316}$。因此以實際的眼光來看，打出一部"哈姆雷特"的機率根本就是零，一本書如此，更遑論一個圖書館全部的藏書了。

解　(a)打出每一個正確的字的機率為 $\frac{1}{44}$，故連續打出 10^5 個正確的字的機率為

$$\left(\frac{1}{44}\right)^{100000} = 10^{\log_{10}\left(\frac{1}{44}\right)^{100000}}$$

$$= 10^{100000\times\log_{10}\frac{1}{44}}$$

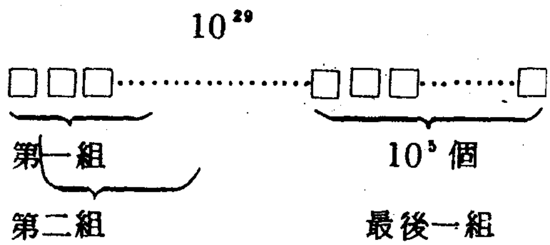
將 $\log_{10} 44 = 1.64345$ 代入

得　$\left(\frac{1}{44}\right)^{100000} = 10^{-164345}$

(b)這些猴子共打出

$$10\times10^{18}\times10 = 10^{29}\text{ 個字}$$

若按照順序，每 10^5 個字一組從 10^{29} 個字中可依序取出 $10^{29}-10^5 \approx 10^{29}$ 組，請見下圖說明，即可明白



而每一組正確的機率爲 $10^{-164345}$

故總共的機率爲 $10^{29} \times 10^{-164345} = 10^{-164316}$

2.5 兩個旋子系統熵的加成　已知兩系統旋子數 $N_1 \simeq N_2 = 10^{22}$，其多重數函數，分別爲 $g_1(N_1, s_1)$ 及 $g_2(N_2, s-s_1)$，g_1g_2 的乘積以 s_1 的函數表示時，在 $s_1 = \hat{s}_1$ 時函數有一相當尖銳的峯值。在 $s_1 = \hat{s}_1 + 10^{12}$，乘積 g_1g_2 的值將變成峯値的 10^{-174} 倍。利用高斯近似式來計算多重數函數；可利用（17）式的形式。

(a)在 $s_1 = \hat{s}_1 + 10^{11}$，$s = 0$ 的情況下，計算 $g_1g_2/(g_1g_2)_{max}$。

(b)若 $s = 10^{20}$，你必須再乘一個多大的因數，才能使 $(g_1g_2)_{max}$ 的值等於 $\sum_{s_1} g_1(N_1, s_1)g_2(N_2, s-s_1)$ 的值？將此因數的大小以最近的數量級表示出來。

(c)若你忽略此一因數，將會造成熵值多少的百分誤差？

解 (a)（2-17）式

$$g_1g_2 = (g_1g_2)_{max} \exp\left(-\frac{2\delta^2}{N_1} - \frac{2\delta^2}{N_2}\right)$$

$s_1 = \hat{s}_1 + 10^{11}$ 和（1-16）式 $s_1 = \hat{s}_1 + \delta$ 比較

得　$\delta = 10^{11}$

又　$N_1 \simeq N_2 = 10^{22}$

故　$-2\delta^2/N_1 = -2\ ,\ -2\delta^2/N_2 = -2$

得　$g_1g_2/(g_1g_2)_{max} = \exp(-4) = 10^{-1.74}$

(b)根據　$N_1 \simeq N_2 = 10^{22}$

（2-17）式可寫爲

$g_1g_2 = (g_1g_2)_{max} \exp(-4\delta^2/10^{22})$

$s = 10^{20}$ 故 s_1 的範圍爲 0 至 10^{20}

由（2-14）式　$\dfrac{\hat{s}_1}{N_1} = \dfrac{s}{N} = \dfrac{s}{N_1+N_2}$

得　$\hat{s}_1 = N_1 s/N = s/2 = 5\times10^{19}$

由 $s_1 = \hat{s}_1 + \delta$　知

$s_1 = 0$ 時 $\delta = -5\times10^{19}$

$s_1 = 10^{20}$ 時 $\delta = 5\times10^{19}$

故 δ 的範圍爲 -5×10^{19} 至 5×10^{19}

$$\sum_{s_1} g_1g_2 = \sum_{\delta} (g_1g_2)_{max} \exp(-4\delta^2/10^{22})$$

$$\cong (g_1g_2)_{max} \int_{-5\times10^{19}}^{5\times10^{19}} \exp(-4\delta^2/10^{22})\, d\delta$$

令 $x = 2\delta/10^{11}$ 代入

得 $$\sum_{s_1} g_1g_2 = 5\times10^{10}\,(g_1g_2)_{max} \int_{-10^9}^{10^9} e^{-x^2}\, dx$$

$$\cong 5\times10^{10}\,(g_1g_2)_{max} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$= 5\times10^{10}\sqrt{\pi}\,(g_1g_2)_{max}$$

所以 $(g_1g_2)_{max}$ 乘上 $5\times10^{10}\sqrt{\pi}$ 之後即可等於 $\Sigma_{s_1} g_1g_2$

(c) $\sigma = \log(\Sigma_{s_1} g_1g_2)$

$$= \log (g_1 g_2)_{max} + \log (5\sqrt{\pi} \times 10^{10})$$

若忽略 factor $5\sqrt{\pi} \times 10^{10}$ 則

$$\sigma = \log (g_1 g_2)_{max}$$

由(1-35)，(1-36)式

$$g(N, s) = (2/\pi N)^{1/2} 2^N \exp(-2s^2/N)$$

得 $(g_1 g_2)_{max} = (2/\pi N_1)^{1/2} 2^N \exp(-2\hat{s}_1^2/N_1)$

$$\cdot (2/\pi N_2)^{1/2} 2^N 2 \exp(-2\hat{s}_2^2/N_2)$$

由(2-14)式 $\hat{s}_1/N_1 = \hat{s}_2/N_2$

因爲 $N_1 = N_2$ 所以 $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = 5 \times 10^{19}$

故 $(g_1 g_2)_{max} = (2/\pi \times 10^{22})\, 2^{2\times 10^{22}}$

$$\cdot \exp[-4 \times (5 \times 10^{19})^2/10^{22}]$$

故忽略 $5\sqrt{\pi} \times 10^{10}$，entropy σ 產生的誤差分率爲

$$\frac{\log (5\sqrt{\pi} \times 10^{10})}{\log (g_1 g_2)_{max} + \log (5\sqrt{\pi} \times 10^{10})}$$

$$\approx \frac{\log (5\sqrt{\pi} \times 10^{10})}{\log (g_1 g_2)_{max}} \approx \frac{1}{6 \times 10^{20}}$$

可知誤差很小

2.6 總偏差　近似地估計在導出(17)式的例題中，與平衡態的百分偏差 δ/N_1 爲 10^{-10} 或更大的機率。取 $N_1 = N_2 = 10^{20}$。利用漸近線展開式(asymptotic expansion)來寫這總誤差函數將會比較方便。當 $x \gg 1$，

$$2x \exp(x^2) \int_x^\infty \exp(-t^2)\, dt \approx 1 + \text{較小的項}$$

解　$\delta/N_1 = 10^{-10}$，$N_1 = N_2 = 10^{20}$　故 $\delta = 10^{10}$

欲計算$\delta \geq 10^{10}$的機率，可計算$\delta \geq 10^{10}$的multiplicity對全部的multiplicity的比值

利用（2-17）式

$$g_1 g_2 = (g_1 g_2)_{max} \exp\left(-\frac{2\delta^2}{N_1} - \frac{2\delta^2}{N_2}\right)$$

將　$N_1 = N_2 = 10^{20}$代入

得　$g_1 g_2 = (g_1 g_2)_{max} \exp(-4\delta^2/10^{20})$

偏離的機率爲

$$\frac{2 \times \int_{10^{10}}^{\infty} (g_1 g_2)_{max} \exp(-4\delta^2/10^{20})\, d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} (g_1 g_2)_{max} \exp(-4\delta^2/10^{20})\, d\delta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{10^{10}}{2} \int_{2}^{\infty} e^{-t^2} dt}{\frac{10^{10}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt}$$ 令$t = 2\delta/10^{10}$代入

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{2}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

利用　$2x \exp(x^2) \int_{x}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt \approx 1$

將$x = 2$代入得

$$\int_{2}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt \approx \frac{1}{2 \times 2 \times \exp(2^2)}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-4}$$

故偏離的機率爲

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{4} e^{-4} = 5 \times 10^{-3}$$

第三章　波滋曼分佈與荷姆斯自由能

3.1　兩態系統的自由能　(a)試以 τ 的函數表出一兩態系統的自由能，此兩態分別爲能量爲 0 及能量爲 ε 的能態　(b)以此自由能，表出此系統的能量及熵。此熵值函數圖形繪於圖 3.11 。

解　(a) $F=-\tau\log z$ ， $z=1+e^{-\varepsilon/\tau}$

$$\therefore F=-\tau\log(1+e^{-\varepsilon/\tau})$$

$$\text{(b)}\ \sigma=-\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_V=\log(1+e^{-\varepsilon/\tau})+\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}}{1+e^{\varepsilon/\tau}}$$

$$U=\tau^2\left(\frac{\partial\log z}{\partial\tau}\right)=\frac{\varepsilon}{1+e^{\varepsilon/\tau}}$$

3.2　磁極化係數　(a)對於我們所提出的磁矩的模型系統，利用切割函數（Partition function ），試導出磁化量 M 及極化係數 $\chi\equiv dM/dB$ 的精確表示式，以溫度及磁場強度的函數表之。導出的結果 $M=nm\tanh(mB/\tau)$ ，與（46）式相同。其中 n 爲粒子數密度。此結果繪於圖 3.12　(b) 導出自由能，並表出此結果僅爲 τ 及參數 x 的函數， $x\equiv M/nm$　(c)證明磁化係數在 $mB\ll\tau$ 的極限情況下爲 $\chi=nm^2/\tau$ 。

解(a) $\because Z_1=e^{\frac{mB}{\tau}}+e^{\frac{-mB}{\tau}}=2\cosh\frac{mB}{\tau}$

又$M=\dfrac{m}{V}\cdot 2<s>$

$$<U>=-2<s>mB\Rightarrow 2<s>m=\frac{-<U>}{B}$$

$$\therefore M=\frac{-<U>}{BV}=\frac{-1}{BV}\tau^2\frac{\partial\log Z}{\partial\tau},\ Z=Z_1^N$$

$$=\frac{-N}{BV}\tau^2\left(\frac{1}{Z_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\cos h\frac{mB}{\tau}\right)\right)\right)$$

$$=nm\tan h\frac{mB}{\tau}\text{其中}n=\frac{N}{V}$$

$$\therefore \chi=\frac{dM}{dB}=\frac{nm^2}{\tau}\sec h^2\frac{mB}{\tau}\sim\frac{nm^2}{\tau}\quad\text{if } mB\ll\tau$$

(b) $F=-\tau\log Z=-\tau N\log Z_1$

$$=-\tau N\log\left(2\cos h\frac{mB}{\tau}\right)$$

$$\text{set } x=\frac{M}{nm}=\tan h\frac{mB}{\tau}\text{ 則 }\cos h\frac{mB}{\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore F=2N\log\left(2\sqrt{1-x^2}\right)$$

3.3 諧振子的自由能　一個一維空間的諧振子具有無窮多個能量差相同的能階，其能量以$\varepsilon_s=s\hbar\omega$表之，$s$為0或正整數，$\omega$為此振子的古典頻率。我們將能量的零點就定在$s=0$的能階上。(a)證明諧振子的自由能為$F=\tau\log[1-\exp(-\hbar\omega/\tau)]$，注意$\tau\gg\hbar\omega$時，我們可將對數展開得到$F\simeq\tau\log$