大学本科函授教材

概率论与数理统计

安徽师范大学数学系　主编

丁万鼎　刘寿喜　王佩瑾
吴天滨　周冠廷　林贤明　编写

上海科学技术出版社

责任编辑　沈鲲龄

大学本科函授教材
概率论与数理统计
安徽师范大学数学系　主编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　　上海东方印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张17.625　字数391 000
1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷
印数：1－13,800

ISBN 7-5323-0593-7/O·56(课)

定价：4.15 元

J31/190/:4

出 版 说 明

为了改变长期以来高等师范院校数学专业本科函授缺少合适教材的状况和提高函授教育的质量，华东地区七所师范大学：山东师范大学、上海师范大学、江西师范大学、安徽师范大学、南京师范大学、浙江师范大学及福建师范大学的数学系联合编写了高等师范院校数学专业本科函授教材．按照教育部颁发的数学专业本科函授教学大纲，结合函授教育的特点，我们首先编写了《数学分析选论》、《复变函数论》、《近世代数》、《微分几何》、《概率论与数理统计》、《常微分方程》、《实变函数与泛函分析》等七本教材．这套教材的内容系统性强，论证严谨，条理清晰，深入浅出，便于自学．每章章前有内容提要，章后有小结．各章均配有复习题，以有助于学生通过练习加深理解．

这套教材也可以作为大专院校的在校本科生、业余大学学生的教材或教学参考书，也可供广大青年作自学参考之用．

华东地区七所师范大学
函授教材协作编写组

前　言

概率论与数理统计是数学中与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一．随着科学技术的进步．过去用决定性数学形式能够得到满意的描述的一些现象，现在要得到更精确的描述，就需要使用概率论的方法；过去没有找到适当的数学形式加以描述的一些现象，使用概率模型可以得到满意的描述．例如根据经典力学，在理想条件下，运动学公式完全描述了质点的运动．特别当用它来描述弹头的运动时，就得到理想弹道．只要已知初速度和发射角，就可以完全确定射程和弹着点．然而实际上炮弹的大小和形状，以及气温、风速、风向等因素对弹道是有影响的，故实际弹道与理想弹道是有偏离的．射击学把决定弹道的因素归结为初速度、发射角和弹道系数三大因素，由这些因素决定的弹道称为实际弹道，它比理想弹道更接近弹头的实际轨迹．对射击近距离的较大目标来说，是否击中目标完全由射击的三个要素来决定；但对较远的小目标来说，根据上述理论，射击能否击中目标实际上是随机的．事实上，如果在固定不变的三个要素之下来考察弹着点，将会发现弹着点与目标点仍有着不确定的偏离（前后、左右的偏离）．在一次射击中，无法事先确定弹着点．又如早在 1827 年英国植物学家布朗 (R. Brown) 首次发现浸在液体中的微粒作不停的无规则运动，即所谓布朗运动．其后人们作了大量研究企图解释布朗运动．关于布朗运动的第一个解释是在 1905 年由爱因斯坦给出的，而布朗运动的精确的数学模型——概率模型——是维纳 (Wiener) 于 1918 年提出的．

就是在概率论的应用上和理论上都十分重要的“布朗运动”(维纳过程). 在这里,经典的方法显得无能为力,这是因为,如果相互作用的几个质点的运动可用几个变量的微分方程来描述的话,那么由于和布朗运动有关的因素众多,以至用经典微分方程来研究布朗运动在理论上是不可取的,在实践上也是不可能的. 上述例子中,弹着点分布的不确定性及布朗运动的无规律性统称为随机性. 具有这种随机性的所谓随机现象是现实世界中普遍存在的现象. 概率论和数理统计就是研究随机现象的数量规律性的数学学科. 例如定量地描述弹着点偏离目标的偏差大小的分布,刻划布朗运动的轨道及其性质,等等.

概率论作为一门数学学科,在其发展进程中逐渐形成了自己特有的概念和研究的方法.要建立概率论的数学理论,首先必须分析它所研究的对象的特征及其与现实世界中其他对象的联系. 我们已经指出,概率论的研究对象是随机现象,随机现象是相对于决定性现象而言的. 在一定条件下必然发生(出现)某一结果的现象称为决定性现象. 例如,在欧氏几何学中,三角形的三内角之和为 180°; 在力学中,物体在没有外力作用的条件下必然保持其原来的运动状态,即静止的物体保持其静止状态,而作等速直线运动的物体继续作等速直线运动. 上面两例的共同特征是反映事物之间的因果必然联系,即条件与结果之间的必然联系. 在一定条件下必然发生的结果称为必然事件; 而在一定条件下必然不发生的结果称为不可能事件. 显然必然事件与不可能事件是相互对立的: 例如三角形的三内角之和不等于 180° 是不可能事件. 这样,决定性现象可以用必然事件或不可能事件来表述.

在现实世界中还存在着另一类现象. 例如当掷一枚硬币

时，可能出现“正面朝上”（即结果“出正面”），也可能出现“反面朝上”，在掷硬币之前不能确定哪一面朝上；某电话交换台在一分钟内接到的呼唤次数可能是0次（没有接到呼唤），也可能是1次．2次，……，事先不能确定哪种结果出现．一般地，在一定条件下可能发生这样的结果，也可能发生那种结果，即预先不能确定到底发生哪种结果的现象称为随机现象．随机现象中可能发生也可能不发生的结果称为随机事件．例如：“正面朝上”是掷一枚硬币这一随机现象的一个随机事件；“反面朝上”也是它的一个随机事件．一般地，对随机现象人们关心的是它的一些随机事件．

在明确了概率论的研究对象之后，建立概率论的数学理论的途径与经典数学学科是类似的．例如欧氏几何学是从一些理想的不加定义的概念（例如点、直线等等）出发，选取一组公理来规定它们之间的关系（例如“两点决定一直线”等），然后运用形式逻辑的方法来展开的．公理的不同选择相应着不同的几何学．概率论的表述方式也有不同的公理系统．本书采用的概率论的公理体系是柯尔莫果洛夫（Колмогоров）1933年建立的公理体系．

概率论与其他的数学分支有着密切的联系，同时它又具有自己的特点，主要有两个方面：一是它与其他数学分支一样有严格的数学形式，一是它特有的“概率思想”．我们已经指出，概率论与现实世界的联系十分密切．不仅如此，由于概率论的概念和关系都有现实背景，我们常常把概率论的结论放在一些实际模型中，有时甚至是十分简单的（如掷硬币这类的）模型中加以思考．直观的形象思维对学习概率论是十分重要的．在概率论的研究中直观常常是理论的先导．本书作为概率论的初级入门书，更强调概率论的直观思想．为了引进概

率论的基本概念和理解它的一些结论，我们必须反复地往返于实际背景与数学理论之间：把一个实际问题归结为概率论的某一种模型，用概率论的理论加以解释；或者通过实际例子来理解概率论的概念和结论. 初学概率论的读者对这种往复常常会感到困难，但是只要多加练习，掌握概率论的基本思想是不难的.

数理统计是概率论的姐妹学科，它和概率论具有同一的背景. 它以概率论为基础，同时也补充和丰富了概率论. 一般地说，概率论是从数学模型出发来推导实际模型的性质；而数理统计则是从观察资料出发来推断模型的性质. 概括地说，数理统计是搜集资料然后进行分析和推断的数学理论和方法.

目前，概率论已经广泛应用于工农业生产、国民经济的其他部门和几乎一切科学技术领域. 随着社会不断进步与发展，概率论不断地渗透到社会科学与人们日常生活中去，成为人们从事生产劳动、科学研究和社会活动的一个基本工具.

本书是根据原教育部颁布的数学专业函授本科《概率论与数理统计教学大纲》编写的教科书，也可以作为全日制师范院校本科教学参考书. 其内容经过适当选择也可以作为函授专科或全日制师范专科学校的教科书.

在编写过程中，我们注意体现函授教材的特点. 精选材料，使教师与学员在大纲规定的学时内完成教学计划，预计本书的非星号部分可在70学时左右学完；论述详细，尽可能的将教师教学的再创造融合在书中，便于读者自学. 根据函授学员面授时间少的特点，书中安排了较多的例题，书后给出了习题的答案、提示或详细解答. 此外，为指导读者复习所学内容，每章之后都有一个简短的小结，说明该章的主要内容、重

点及难点等.

本书是由安徽师范大学、山东师范大学、南京师范大学和福建师范大学组成的编委会集体讨论，分工协作编写的. 参加编写的有丁万鼎(第一章)，吴天滨(第二章)，周冠廷(第三章)，王佩瑾(第四、五章)，刘寿喜(第六、七章)，林贤明(第八章). 初稿完成后，由安徽师范大学刘寿喜、王佩瑾、丁万鼎负责修改统稿，最后由丁万鼎同志执笔定稿.

北京师范大学严士健教授在百忙中为本书审稿，对本书提出了宝贵的意见和建议，作者们对他谨致衷心感谢.

在编写过程中得到了安徽师范大学业余教育处及数学系负责同志邓其封、南朝勋、朱作宾的热心支持，汪明荣、魏登云、毕秋香、赵林玲等同志阅读和检查了部分修改稿和习题. 借此机会对他们为本书出版所做的工作表示衷心感谢.

由于作者们的水平所限，编写工作又较匆忙，书中一定存在着不少缺点或错误，恳请读者批评指正.

编者　1987年7月

内 容 提 要

本书是根据原教育部颁发的高等师范院校数学专业函授本科《概率论与数理统计教学大纲》编写的教材。内容包括事件与概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，数理统计基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析。

本书可作高等师范院校数学专业函授本科的教材及师范院校数学专业教学参考书，其中非星号部分可作为全日制师范专科学校的教材。

目　录

第一章　概率论的基本概念

本章从随机试验出发引入概率论的两个最基本的概念——事件与概率；接着讨论古典概型和几何概型及其中的概率计算. 在此基础上介绍事件和概率的公理化定义和概率空间. 概率空间是随机试验的数学模型，概率的数学理论就是围绕着它展开的. 此后讨论独立性概念. 独立性是概率论特有的重要概念，条件概率是与独立性密切相关的另一个重要概念. 最后讨论独立试验概型.

§1.1　事件与概率

一、随机试验与样本空间

在前言中我们已经指出，概率论的研究对象是随机现象. 现在我们引进一些术语和记号来描述随机现象，进而建立随机现象的数学模型. 客观现象(决定性现象和随机现象)都是条件和结果的一种联系形式. 在概率论中将实现一组条件称为试验. 如果试验满足下列条件，则称此试验为**随机试验**：

(1) 试验可以在同样条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果在试验前可以明确知道；

(3) 每次试验总是恰好出现上述结果中的一个，但在试验前不能确定哪一个结果将会出现.

根据上述定义，一种随机现象就对应一个随机试验. 随机试验简称为试验，常用 E 表示. 若同时讨论几个试验，则

分别用 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 等表示. 试验的每一个可能结果称为一个样本点, 一般用 ω 表示. 试验的一切样本点的集合称为样本空间, 一般用 Ω 表示. 样本空间是展开概率理论的舞台.

确定试验的样本空间是描述试验的第一步. 对一个具体的试验, 我们根据试验的条件和结果的含义来确定其样本空间, 必要时约定一些记号以便把样本空间简洁地表示出来.

例 1 E_1: 掷一枚硬币. 将硬币掷一次作为一次试验, H 表示"正面朝上", T 表示"反面朝上", 这个试验共有两个样本点(可能结果), 故

$$\Omega=\{T, H\}.$$

例 2 E_2: 掷一颗骰子(即一个正方体, 它的六个面分别标有数字 1, 2, …, 6). 将骰子掷一次作为一次试验. 用 i 表示标有数字 i 的面朝上(称为掷得 i 点), $i=1, 2, \cdots, 6$, 则

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

例 3 E_3: 五件产品中有两件次品、三件正品, 从中任取两件. 这里将从五件产品中取两件看作一次试验. 要简洁地写出样本空间, 先约定一些记号: 两件次品分别用 a_1, a_2 表示; 三件正品分别用 b_1, b_2, b_3 表示. 这样, 若取到的产品为 a_1 和 b_2, 则记此样本点为 $\{a_1, b_2\}$. 于是

$$\begin{aligned}\Omega=\{&\{a_1, a_2\}, \{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\},\\ &\{a_2, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \{b_1, b_2\},\\ &\{b_1, b_3\}, \{b_2, b_3\}\},\end{aligned}$$

即 Ω 共有 10 个样本点.

我们已经指出, 要根据试验的含义来确定样本空间. 试比较例 3 和下面的试验 E: 五件产品中有两件次品, 三件正品, 从中接连不放回地取两件产品. 与例 3 不同, 这里样本点

不仅与所取的产品有关，而且与取产品的先后次序有关．这样，第一次取到 a_1，第二次取到 b_2，记为 (a_1, b_2)；而第一次取到 b_2，第二次取到 a_1，则记为 (b_2, a_1)．(a_1, b_2) 与 (b_2, a_1) 是两个不同的样本点．但在例 3 中是不计取件的次序的，$\{a_1, b_2\}$ 与 $\{b_2, a_1\}$ 表示同一个样本点．由此可知，试验 E 的样本空间共有 20 个样本点．读者可以参照例 3 中的样本空间写出试验 E 的样本空间．

例 4 E_4: 记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数．把做一次记录看作一次试验，一个样本点就是该台一分钟内接到的呼唤次数，用 i 表示接到 i 次呼唤．显然 i 的可能值为 0, 1, 2, ⋯．故

$$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\},$$

即 Ω 为非负整数的集合．

例 5 E_5: 向一目标射击炮弹，观测弹着点的位置．一次射击为一次试验．选定坐标系，例如以目标为坐标原点，目标与炮位的连线为 y 轴，(x, y) 表示一次射击的弹着点的坐标，则

$$\Omega=\{(x, y): -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\},$$

即
$$\Omega=\mathbf{R}^2.$$

从上面的例子可以看出，样本空间可能是有限或无限的点集，也可能是一抽象的集合．从随机试验到样本空间这一数学抽象使我们有可能用集合论的语言来表示概率论的概念．读者还要注意，样本空间来自随机试验．今后当我们谈到样本空间时，读者应当自然地想到它的源头所在，甚至要结合一、两个具体的试验进行形象的、富有想象力的思考．

二、随机事件及其概率

1. 随机事件

在前言中，我们把随机试验中可能发生，也可能不发生的结果称为随机事件，简称为事件. 事件用大写字母 A, B, C 等来表示. 事件也可以用关于试验结果的某个断言来表述. 如在例3中，断言"恰好取到一件正品"，"没有取到正品"及"没有取到次品"都是事件，分别记为 A, B, C. 引入样本空间之后，事件可以用样本空间的子集来表示. 上面的事件 A 发生当且仅当试验结果为$\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$, $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$中的一个. 于是可以认为 A 是这些样本点组成的集合，即

$$A=\{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\}, \{a_2, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \{a_2, b_3\}\}.$$

事件 B 发生当且仅当试验的结果为$\{a_1, a_2\}$，因此用单元素集表示 B，就有

$$B=\{\{a_1, a_2\}\}.$$

类似地，有

$$C=\{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_2, b_3\}\}.$$

一般地，我们将事件定义为样本空间的某个子集. 因此，用集合论的语言就可表述为：事件 A 在一次试验中发生（简称为 A 发生）当且仅当试验结果 $\omega\in A$，简记为"$\omega\in A$".

一个样本点组成的单元素集称为**基本事件**. 在例1中，A 表示"正面朝上"事件，B 表示"反面朝上"事件，则

$$A=\{H\},\ B=\{T\}$$

都是基本事件. 在某些试验中，事件包含的样本点不能一一列举出来，我们可以使用集合论中表示集合的方法和记号来表示事件. 在例5中，若 A 表示"弹着点关于目标的前后偏

差不超过10米”事件，B 表示“弹着点距目标不超过50米”事件，则

$$A=\{(x,\ y):\ -10\leqslant y\leqslant 10\},$$
$$B=\{(x,\ y):\ x^2+y^2\leqslant 50^2\}.$$

样本空间 Ω 作为 Ω 的子集为一事件. 由于 Ω 包含所有的样本点，所以在每次试验中 Ω 必然发生. 这样，Ω 表示必然事件. 空集 $\varnothing$ 作为一个事件，显然它在每次试验中都不发生，故 $\varnothing$ 表示不可能事件. Ω, $\varnothing$ 是事件的两个极端情形.

2．频率与概率

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有不确定性，即随机性. 然而在大量重复试验中随机事件却呈现出明显的规律性，即所谓频率稳定性.

设 A 是试验 E 中的一个事件. 若将 E 重复进行 n 次，其中 A 发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为 n 次试验中事件 A 发生的频率. 人们对事件的频率稳定性的观察最早出现在人口统计(例如性别的观察)中. 早在我国古代，公元前2238年的人口普查结果表明，“男孩出生”的频率大约为 $\frac{1}{2}$. 后来，许多国家的人口统计结果都表明，男孩出生的频率几乎完全一致*). 例1中掷硬币试验可以作为这个问题的模型，掷硬币试验是人们十分熟悉的. 人们通过长期的观察确信，“正面朝上”(仍然记为 A)出现的频率稳定于1/2，以至在日常生活中，如在各种体育比赛中，常运用这一性质，使得参赛的两方享有同等的机会. 历史上，有人做过掷硬币试验，其结果如表1-1所示. 它表明，不管何人在何时何地

*) 近代人口统计结果是男孩出生的频率大约为22/43.