



清华大学图书馆藏

异形楼梯内力计算

陈富生 编著

中国建筑工业出版社

前 言

旅馆建筑、体育建筑和影剧院等公共建筑中，以及一些点缀性建筑中， Π 形、U形、L形及V形悬挑楼梯和螺旋楼梯，均是建筑设计人员颇感兴趣的造型，而且也符合建筑上的功能要求。但是，有关这些楼梯的内力计算的参考文献，大部分刊载于各个年代的期刊上，致使结构设计人员每设计一种楼梯时，均忙于收集有关文献、鉴别应用条件及熟悉一套难以记忆的运算符号。为此，作者在此作一尝试，编写一较完整的专著。推导各类楼梯的内力算式时，采用基本上统一的计算方法、基本假定、演算过程和运算符号。对于书中尚未列举的其它形式的楼梯，读者如应用所提供的计算方法，也能较方便地导得其内力算式。

本书除第一章是综述各类楼梯内力计算中的共同性问题外，其余三章分别叙述这些楼梯的内力计算。为便于读者应用，对每一种楼梯均列出汇总的柔度系数及运算中所需的参数表。书中附有各类楼梯的算例及其结果分析，以使读者对这些楼梯的受力特性进一步理解。

由于作者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

本书由建设部建筑设计院顾子聪副院长审校，在此谨表感谢。

作 者

1985年6月 北京

本书介绍各种异形楼梯的内力计算,以适应设计公共建筑的需要。所述的楼梯类型有:□形、U形、L形及V形等悬挑楼梯,以及局部有直线段梯板、中间有休息平台和纯圆弧形螺旋楼梯。在建立各类楼梯的内力算式时,采用统一的计算方法和统一的运算符号。书中附有各类楼梯的算例及分析结果,使设计人员对其受力特性有较清晰的理解。

本书可供建筑结构设计人员和大院校土建专业的师生参考。

异形楼梯内力计算

陈富生 编著

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 6 $\frac{1}{2}$ 字数: 132千字

1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷

印数: 1—18,700册 定价: 1.05元

统一书号: 15040·5077

目 录

前 言	
第一章 概 述	1
第二章 Π 形及U形悬挑楼梯内力计算	3
一、基本假定及变形协调方程	4
二、 Π 形悬挑楼梯的正截面内力及柔度系数	8
三、U形悬挑楼梯的正截面内力及柔度系数	18
四、两端固接并对称的 Π 形和U形悬挑楼梯内力计算	29
五、算例及悬挑楼梯的受力特性分析	36
第三章 带直线路的、中间有休息平台的及纯圆弧形的螺旋楼梯内力计算	43
一、带直线路的螺旋楼梯	43
二、两端固接及两端铰接的螺旋楼梯简化算式	60
三、两端固接中间有休息平台的螺旋楼梯	62
四、算例及螺旋楼梯的受力特性分析	68
第四章 L形及V形悬挑楼梯内力计算	74
一、基本假定及变形协调方程	75
二、正截面内力及柔度系数	77
三、下端D点的支座反力及平衡校核	87
四、两端固接并对称的L形和V形悬挑楼梯的简化算式	88
五、算例及L形悬挑楼梯的受力特性分析	93
参考文献	96

第一章 概 述

Π形、U形、L形及V形悬挑楼梯和螺旋楼梯等均属空间受力的楼梯，它与视为平面结构的楼梯相比，其内力分布有相当大的变化。一般情况下，这些楼梯中的重要内力，如绕截面横轴 n 的支座弯矩 M_n ，远小于按平面结构算得的相应弯矩，其挠度也如此，这是发挥了空间作用的结果。但正由于空间作用，每一横截面上产生六种内力，即绕正截面 n 轴的法向弯矩 M_n 、绕 b 轴的侧向弯矩 M_b 、绕 t 轴的扭矩 M_t 、轴向力 N_x 、剪力 N_y 及 N_z 等，致使结构设计人员甚为注意这些楼梯的内力分析及其结构构造。

在建立各种楼梯的内力算式时，本书采用了统一的计算方法及表达方式。现就书中所包括的楼梯类型及其共同性问题，如计算简图、计算方法、坐标系及力的正负号规则等综述如下。

1. 所分析的楼梯类型

为丰富楼梯类型，以及考虑到实际的使用要求，所分析的类型有：Π形、U形、L形及V形等四种悬挑楼梯；螺旋楼梯包括纯圆弧形、上端有直线段梯板或平板的、以及中间有休息平台等三种。

2. 计算简图的选择

对实际为空间的板式楼梯，以往采用的计算方法有两种，一是按空间刚架计算^{[1]~[4]}，另一是取用各向异性板元及同性板元的有限元法^[5]。后一方法，其精确度优于前者。实践表明，空间刚架法能符合设计安全要求，故结构设计人员仍趋向于应用该法，况且该法的受力概念及强度验算也较清晰和简便。

按空间刚架法计算时，需尽可能确切地确定结构计算简图。Π形悬挑楼梯的计算简图，在国外期刊的文章中，曾有较长时期的探讨。对此，根据一些试验报导及考虑到有限元法的分析结果，作者选用的计算简图^[1]，是把平台板处理成与上、下梯梁紧连的直线梁。对于U形悬挑楼梯，计算简图是将圆弧形平台处理成平面圆弧梁。对于螺旋楼梯处理成螺旋梁，且考虑了荷载的偏心影响。在各类楼梯的计算简图中，支座特性的假定将对楼梯的内力分布，以及支承梁（或基础）上的作用力，均有明显的影响。在一些文章中，Π形悬挑楼梯及螺旋楼梯的两端支座均假定为固接支座，也有假定螺旋楼梯的支座为铰接支座。实际上多数楼梯支座为弹性支座。如框架梁一样，取作固接梁或铰接梁计算时，有可能在跨中或支座处产生裂缝，并导致内力重分配。对于公共建筑中的楼梯，应避免产生明显的裂缝。为适当地考虑支座的弹性变形影响，故对上述各种楼梯的上端，定为可选性支座，如弹性支座、固接支座或混合式支座；下端约定为固接支座。

3. 计算方法

将楼梯视为空间框架时，其内力计算可运用力法或位移法。考虑到也能便于应用可编程程序计算器（如TI-59）和袖珍计算机（如PC-1500）等进行计算，各类楼梯均用力法计算，并应用矩阵运算，以使过程简化及结果清晰。

按力法计算时,所选择的静定体系,一般情况下取上端A点为自由端,下端为固定端,故需对上端A点求解一个六阶的变形协调方程,从而得到该点的六个未知力(或未知反力)。

为能较快地估算内力,以及应用普通计算器进行计算,对于荷载及外形均对称、支座为固接的一些楼梯,计算时利用了对称性。此时,采用在结构中点分割的静定体系,设中分点为自由端,并对该点求解一个二阶的变形协调方程,可得中点的两个未知力,以及相应的各截面内力,但未计及支座的弹性变形影响。

推导上述变形协调方程中的柔度系数 δ_{ij} 及 Δ_{iq} 的算式时,均先建立X、Y、Z坐标系的内力表达式;然后进行坐标变换,以获得正截面内力的表达式。

4. 坐标系及作用力的正负号规则

为准确地判别作用力的方向及相应的正负号,选用了两种坐标系:一是以X、Y、Z轴表达的坐标体系,另一是专为表达正截面内力的 t 、 b 、 n 轴正截面坐标系。前者是固定不变的,后者随取点的位置而变动。对于螺旋楼梯及圆弧形平台梁等处,辅之以R、 ψ 、Y轴圆柱坐标系以确定点位。

变形协调部位的未知力及支座反力,一般以结构坐标系为准,如该力的方向同X、Y、Z轴的正向则为正号。但当支座的方位不平行于X和Z轴的任一轴时(如总夹角为 135° 及 225° 等的螺旋楼梯),则另设T、B、N轴以确定支座反力方向及正负号,其中T、B轴与相应的 a 、 b 轴各交倾角 α 或 θ (如图18a、18b中的B点反力),N轴平行于 n 轴,B轴平行于Y轴。

确定正截面内力方向的正截面坐标系,乃以未知力一端为起点(上端或中点),沿折梁或曲梁向前移动,正截面内力与 t 、 b 、 n 轴的正向相同的则为正号,且是未知力及外荷载对任意点 m 的作用力。

上述未知力、支座反力及正截面内力中,弯矩及扭矩均采用以右手螺旋为准则的力向量。外荷载 q 与Y轴的正向相同的为正,即向下为正。

Π形、U形、L形及V形等四种悬挑楼梯,带直线段梯板(包括纯圆弧形螺旋楼梯)和中间有休息平台的两种螺旋楼梯的内力计算,均已用CBASIC语言,于ONYX C8002微型机上编制了计算程序⁽¹⁾。本书中各算例结果均由该计算机算得。

本书中的计量单位均采用米制单位,现将书中所述及的部分米制单位,与我国已颁布的法定计量单位之间的换算关系列出如下。

力	1 tf = 9.806 kN
力矩	1 tf·m = 9.806 kN·m
线分布力	1 tf/m = 9.806 kN/m
压强及应力	1 tf/m ² = 9.806 kPa

第二章 Ⅱ形及U形悬挑楼梯内力计算

Ⅱ形楼梯(图1)与U形楼梯(图2)的差别在于休息平台的形状,前者为矩形平台,后者为圆弧形平台。鉴于一些试验报导及用有限元法的分析结果,以及本书中的算例分析,均表明上述两种楼梯平台的内力有一定差别,而且两者的配筋方式也不同,故分别推导内力算式。

设Ⅱ形楼梯和U形楼梯中的上、下梯板厚度相同,而平台板的厚度可不同于上、下梯板,且应比上、下梯板要厚些,以使两者交接线处光滑过渡,既便于支模,线条也流畅。对于Ⅱ形楼梯宜设计成变厚度的平台板,U形楼梯则宜为等厚度的。计算Ⅱ形楼梯时,考虑到平台板外侧部分的刚度失效,故取有效宽度 b_2 ,一般可设 $b_2 = \frac{b}{2} \sim \frac{2b}{3}$ 。

为计算楼梯内力受活荷载不利分布的影响,上、下梯板和平台板上均可作用不同的荷载。

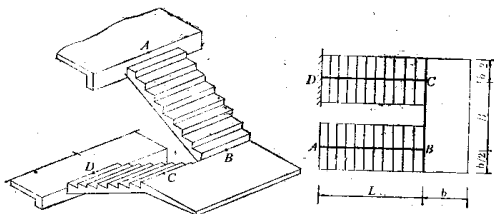


图1 Ⅱ形悬挑楼梯

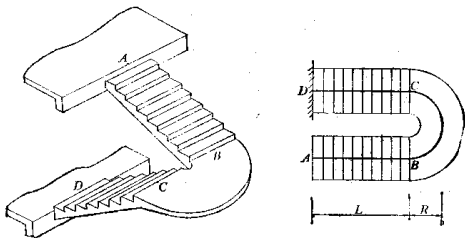


图2 U形悬挑楼梯

一、基本假定及变形协调方程

(一) 符号说明

1. 基本数据的符号

L 、 h 、 b ——分别为上、下梯板的水平投影长度(m)、休息平台至上、下支座间的竖向高度(m)、以及上、下梯板的宽度或II形楼梯的平台板宽度(m);

b_2 ——II形楼梯的平台板有效宽度(m), 一般可设 $b_2 = \frac{b}{2} \sim \frac{2b}{3}$;

d_1 ——上、下梯板的厚度(m);

d_2 ——II形楼梯平台板在 b_2 宽度内的平均厚度或U形楼梯平台板的厚度(m);

B ——II形楼梯上、下梯梁间的中距(m);

R ——U形楼梯平台弧形梁的半径(m);

q_a 、 q_b 、 q_c ——分别为上梯梁 AB 、平台梁 BC (对II形楼梯为平台梁 ef) 及下梯梁 CD 上对地面的投影线荷载(t/m), 其正负号如同 Y 轴正向为正, 即向下为正;

E ——楼梯的混凝土弹性模量(t/m²);

K_1 ——上端支承梁在 A 点沿 X 向产生单位水平位移时, 需施加的集中力, 即支承梁的水平抗弯刚度(t/m);

K_2 ——其含义类似 K_1 , 但为支承梁沿 Y 向的竖向抗弯刚度(t/m);

K_3 ——上端支承梁在 A 点沿 Z 轴产生单位水平位移时, 需施加的集中力, 可取支承梁沿 Z 轴的拉压刚度(t/m);

K_4 ——上端支承梁在 A 点绕 X 轴产生单位转角时, 需施加绕 X 轴的集中弯矩, 即支承梁绕 X 轴的转角抗弯刚度(t-m/rad);

K_5 ——其含义类似 K_4 , 但为支承梁绕 Y 轴的转角抗弯刚度(t-m/rad);

K_6 ——上端支承梁在 A 点绕 Z 轴产生单位扭转角时, 需施加绕 Z 轴的扭矩, 即支承梁的抗扭刚度(t-m/rad)。

2. 运算过程中的符号

$X_1 \sim X_6$ ——上端支座 A 点的六个未知力, 前三个分别为沿 X 轴的轴向力、沿 Y 轴的竖向剪力及沿 Z 轴的水平剪力(t), 后三个分别为沿 X 、 Y 、 Z 轴的弯矩向量或是绕 X 、 Y 、 Z 轴的弯矩(t-m);

δ_{ii} ——静定梁体系中 A 点的柔度系数;

Δ_{i0} ——静定梁体系中 A 点荷载柔度系数;

α ——上、下梯梁的倾角(rad), $\text{tg} \alpha = h/L_1$;

λ ——对于II形楼梯 $\lambda = B/L_1$; 对于U形楼梯 $\lambda = R/L_1$;

β ——仅用于II形楼梯, $\beta = b/L_1$;

I_{a1} 、 I_{b1} 、 J_1 、 I_{a2} 、 I_{b2} 、 J_2 ——分别为上、下梯板(脚标1)及平台板(脚标2)的正截面上绕 n 轴的惯性矩、绕 b 轴的惯性矩及绕 b 轴的扭转惯性矩;

μ_1 、 μ_2 、 ξ_1 、 ξ_2 、 n ——梯板及平台板的刚度比例系数;

$$\mu_1 = -\frac{EI_{n1}}{GJ_1}, \quad \xi_1 = \frac{EI_{n1}}{EI_{b1}},$$

$$\mu_2 = \frac{EI_{n1}}{GJ_2}, \quad \xi_2 = \frac{EI_{n1}}{EI_{b2}}, \quad \eta = \frac{EI_{n1}}{EI_{a2}},$$

η ——U形楼梯平台梁上的线荷载偏心系数, $\eta = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{R} \right)^2$;

ω 、 ρ ——相对于 q_0 的荷载比例系数, $\omega = q_b/q_0$, $\rho = q_c/q_0$;

N_x, N_y, N_z ——任意点 m 上, 沿结构坐标系 X 、 Y 、 Z 轴的作用力(力);

M_x, M_y, M_z ——任意点 m 上, 沿结构坐标系 X 、 Y 、 Z 轴的弯矩向量(力- m);

N_t, N_b, N_n ——任意点 m 上, 沿正截面坐标系 t 、 b 、 n 轴的轴向力及剪力(力);

M_t, M_b, M_n ——任意点 m 上, 沿正截面坐标系 t 、 b 、 n 轴上的弯矩向量。

(二) 基本假定

在推导II形及U形悬挑楼梯的内力算式时, 作如下假定:

1. 上、下支座的约束条件

设下端支座 D 点为全固接支座, 上端支座 A 点为可选性支座, 可为弹性支座、固接支座或混合式支座。如需将上、下端支座的约束特性互换, 需按图3所示改变结构坐标系 X 、 Y 、 Z 轴和正截面坐标系 t 、 b 、 n 轴的方向和位置, 以及 A 、 B 、 C 、 D 点和线荷载 q_0 、 q_b 、 q_c 的顺序位置, 且注意荷载方向向上为正, 则仍可用所列各算式。

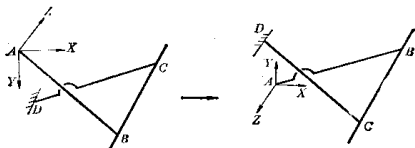


图3 上、下端支座性能互换时坐标轴的更改

2. 各种变形的取舍

计算柔度系数时, 不考虑轴向变形及剪切变形的影响, 即

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_{i1} \bar{M}_{j1}}{GJ} ds + \int \frac{\bar{M}_{b1} \bar{M}_{b1}}{EI_b} ds + \int \frac{\bar{M}_{n1} \bar{M}_{n1}}{EI_n} ds \quad (1)$$

$$\Delta_{i0} = \int \frac{\bar{M}_{i1} \bar{M}_{i0}}{GJ} ds + \int \frac{\bar{M}_{b1} \bar{M}_{b0}}{EI_b} ds + \int \frac{\bar{M}_{n1} \bar{M}_{n0}}{EI_n} ds$$

3. 平台梁的轴线和位置及其刚度取值

(1) U形楼梯: 平台板处理成半圆形平面梁, 平台梁的截面为 $b \times d_1$ 。

(2) II形楼梯: 平台板处理成一直线梁, 且梁轴线位于上、下梯板与平台板的交接线 ef 上(图4a), 平台梁的有效截面为 $b_2 \times d_1$, 相应地平台梁 ef 上除作用 q_0 外, 还作用线扭矩 mt (图4c)。

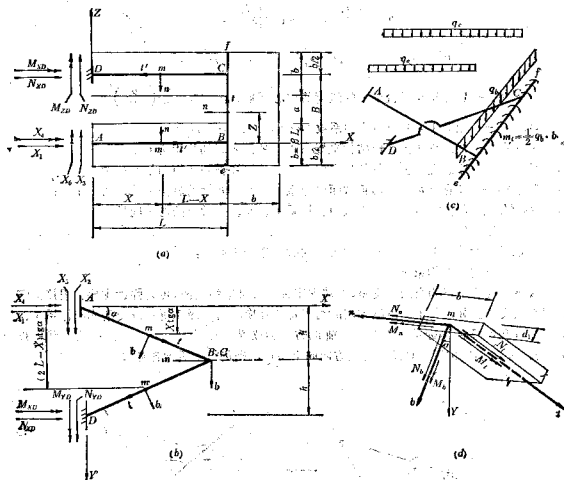


图 4 梯形悬挑梯计算简图

(三) 变形协调方程

静定梁体系上自由端 A 点的变形协调方程，其一般式为：

$$\begin{bmatrix}
 \delta_{11} + \frac{1}{K_1} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\
 & \delta_{22} + \frac{1}{K_2} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\
 & & \delta_{33} + \frac{1}{K_3} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\
 & & & \delta_{44} + \frac{1}{K_4} & \delta_{45} & \delta_{46} \\
 & & & & \delta_{55} + \frac{1}{K_5} & \delta_{56} \\
 & & & & & \delta_{66} + \frac{1}{K_6}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4 \\
 X_5 \\
 X_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \Delta_{17} \\
 \Delta_{20} \\
 \Delta_{39} \\
 \Delta_{40} \\
 \Delta_{50} \\
 \Delta_{58}
 \end{Bmatrix}$$

对称

(2)

为便于运算，式(2)可简化为一无量纲的方程，即

$$\begin{bmatrix}
 \bar{\delta}_{11} + \frac{K_1}{K_1} & \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{16} \\
 & \bar{\delta}_{22} + \frac{K_2}{K_2} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{26} \\
 & & \bar{\delta}_{33} + \frac{K_3}{K_3} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{36} \\
 & & & \bar{\delta}_{44} + \frac{K_m}{K_4} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{46} \\
 & & & & \bar{\delta}_{55} + \frac{K_m}{K_5} & \bar{\delta}_{56} \\
 & & & & & \bar{\delta}_{66} + \frac{K_m}{K_6}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{X}_1 \\
 \bar{X}_2 \\
 \bar{X}_3 \\
 \bar{X}_4 \\
 \bar{X}_5 \\
 \bar{X}_6
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \bar{\Delta}_{10} \\
 \bar{\Delta}_{20} \\
 \bar{\Delta}_{30} \\
 \bar{\Delta}_{40} \\
 \bar{\Delta}_{50} \\
 \bar{\Delta}_{60}
 \end{bmatrix}
 \quad (3)$$

对称

式中 $K_1 = EI_{n1}/L$, $K_m = EI_{n1}/L$ 。

解式(3)得A点的未知反力系数 \bar{X}_i ，则未知反力为：

$$\begin{aligned}
 X_i &= \bar{X}_i q_0 L \quad (i=1, 2, 3) \\
 X_i &= \bar{X}_i q_0 L^2 \quad (i=4, 5, 6)
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

式(2)及式(3)中， δ_{ij} 及 Δ_{i0} 和 $\bar{\delta}_{ij}$ 及 $\bar{\Delta}_{i0}$ 的推导见本章二、三节。

关于式(2)或式(3)中的 $K_1 \sim K_6$ 的取值，如楼梯上端的支承梁(图5)是一两端简支的梁，则其算式为：

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{3EI_w L}{a^2 b^2}, & K_2 &= \frac{3EI_g L}{a^2 b^2}, & K_3 &= \frac{EAL}{ab} \\
 K_4 &= \frac{6EI_g L}{3(a^2 + b^2) - L^2}, & K_5 &= \frac{6EI_w L}{3(a^2 + b^2) - L^2}, & K_6 &= \frac{GJL}{ab}
 \end{aligned}$$

$$\text{式中 } I_w = \frac{dW^3}{12}, \quad I_g = \frac{Wd^3}{12}, \quad A = Wd, \quad J = \frac{W^3 d^3}{3.33(W^2 + d^2)}$$

由于式(2)或式(3)中有 $K_1 \sim K_6$ ，楼梯上端A点的支座性能就具有可选性，这可据支承梁的实际情况确定，即任一*i*方向的性能可为单向固接($K_i = \infty$)、单向自由($K_i = 0$)及单向弹性($\infty > K_i > 0$)中的任一种。

如上端支承梁与楼板现浇在一起，则 $K_1 \sim K_6$ 可近似地取为

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_6 = \infty$$

由式(2)或(3)可知，当

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = \infty$$

则A端为一完全固接端，而当

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = 0$$

则A端为一完全自由的悬臂端，这在实际工程中是不会遇到的。

式(2)或(3)中的 Δ_{i0} 或 $\bar{\Delta}_{i0}$ ，没有计及由于楼梯支承梁的自重、楼板或次梁传给支承梁的荷载所产生的挠度。

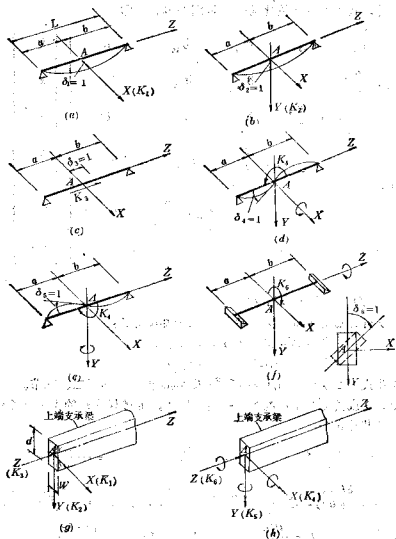


图5 楼梯上端支承梁 $K_1 \sim K_6$ 的含义及计算简图

二、T形悬挑楼梯的正截面内力及刚度系数

(一) 各段任意点的正截面内力

各段任意点 m 处的正截面内力,是静定体系上未知力 X ,及外荷载 q 所产生之内力和。其一般式为:

$$\begin{Bmatrix} N_{1m} \\ N_{2m} \\ N_{3m} \\ M_{1m} \\ M_{2m} \\ M_{3m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & \bar{N}_{13} & & & \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \bar{N}_{23} & & & \\ \bar{N}_{31} & \bar{N}_{32} & \bar{N}_{33} & & & \\ & & & 0 & & \\ \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} & \bar{M}_{14} & \bar{M}_{15} & \bar{M}_{16} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \bar{M}_{23} & \bar{M}_{24} & \bar{M}_{25} & \bar{M}_{26} \\ \bar{M}_{31} & \bar{M}_{32} & \bar{M}_{33} & \bar{M}_{34} & \bar{M}_{35} & \bar{M}_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{10} \\ N_{20} \\ N_{30} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{30} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{F_m\}_{i2m} = [\bar{F}]_{i2m}\{X\} + \{F_0\}_{i2m} \quad (5A)$$

式中 $N_{im}, N_{bm}, N_{am}, M_{im}, M_{bm}, M_{am}$

——任意点 m 的正截面内力;

$\bar{N}_{i1}, \bar{N}_{b1}, \bar{N}_{a1}, \bar{M}_{i1}, \bar{M}_{b1}, \bar{M}_{a1}$

——静定体系上 $X_i = 1$ 时, 在任意点 m 处沿 i 方向所产生的正截面内力;

$N_{i0}, N_{b0}, N_{a0}, M_{i0}, M_{b0}, M_{a0}$

——静定体系上由外荷载 q 在任意点 m 处所产生的正截面内力。

如由式(2)或(4)求得 X_i 值, 则可由式(5)求得任意点 m 处的正截面内力。

为便于求算式(5)中的 $[\bar{F}]_{i2m}$ 及 $\{F_0\}_{i2m}$, 可先计算 m 点处沿结构坐标系 X, Y, Z 轴的内力矩阵 $\{F_m\}_{xyz}$, 然后进行坐标变换, 即左乘变换矩阵 $[T]$, 则得相应的正截面坐标系的内力矩阵 $\{F_m\}_{i2m}$, 其一般式为

$$\{F_m\}_{i2m} = [T]\{F_m\}_{xyz} \quad (6)$$

关于门形悬挑楼梯各段正截面内力矩阵 $\{F_m\}_{i2m}$ 的具体算式, 可按下列三个步骤求得。

1. 各段任意点的结构坐标系内力矩阵 $\{F_m\}_{xyz}$

由图4可分别计算 AB 段、 BC 段及 CD 段沿 X, Y, Z 轴的内力矩阵, 其式为:

$$\begin{Bmatrix} N_{am} \\ N_{vm} \\ N_{zm} \\ M_{am} \\ M_{vm} \\ M_{zm} \end{Bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 0 & 0 & -x \operatorname{tg} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ -x \operatorname{tg} \alpha & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} + q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} x^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{am} \\ N_{vm} \\ N_{zm} \\ M_{am} \\ M_{vm} \\ M_{zm} \end{Bmatrix}_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 0 & z & -L \operatorname{tg} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -z & 0 & L & 0 & 1 & 0 \\ L \operatorname{tg} \alpha & -L & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix}$$

$$+ q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ L + \omega \left(-\frac{1}{2} \beta L + z \right) \\ 0 \\ \hline Lz + \frac{1}{2} \omega \left(-\frac{1}{2} \beta L + z \right)^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2} \beta L \omega \left(\frac{1}{2} \beta L + z \right) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} N_{mn} \\ N_{sm} \\ N_{om} \\ M_{mn} \\ M_{sm} \\ M_{om} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda L & -(2L-x)\operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda L & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ (2L-x)\operatorname{tg}\alpha & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

$$+ q_0 \begin{bmatrix} 0 \\ L + \omega(\lambda L + \beta L) + \rho(L-x) \\ 0 \\ \hline \lambda L^2 + \frac{1}{2}\lambda\omega L(\lambda L + \beta L) \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(L-x)^2 + [\omega(\lambda L + \beta L)(L-x) \\ + \frac{1}{2}\beta L\omega(\lambda L + \beta L)] + \frac{1}{2}\rho(L-x)^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(8)及(9)中的 λ 、 ω 、 ρ 的含义见本章“符号说明”。

2. 各段内力的变换矩阵

由图6a、6b可得AB段及BC段内力的变换矩阵 $[T]_{AB}$ 及 $[T]_{BC}$, 即

$$[T]_{AB} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

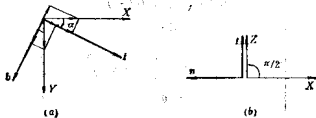


图6 AB段BC段的坐标转换

$$\begin{Bmatrix} N_{1m} \\ N_{2m} \\ N_{3m} \\ M_{1m} \\ M_{2m} \\ M_{3m} \end{Bmatrix}_{bo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ \hline L \operatorname{tg} \alpha & -L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -z & 0 & L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -z & L \operatorname{tg} \alpha & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix}$$

$$+ q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ L \left(1 + \frac{1}{2} \omega \beta \right) + \omega z \\ 0 \\ \hline L^2 \left(-\frac{1}{4} \omega \beta^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \beta \omega L z \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \omega \beta^2 L^2 - \left(1 + \frac{1}{2} \beta \omega \right) L z - \frac{1}{2} \omega z^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1m} \\ N_{2m} \\ N_{3m} \\ M_{1m} \\ M_{2m} \\ M_{3m} \end{Bmatrix}_{ob} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & & 0 & & \\ \sin \alpha & \cos \alpha & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & & \\ \hline -\lambda L \sin \alpha & -\lambda L \cos \alpha & & 2L \sin \alpha & & -\cos \alpha \sin \alpha \\ -\lambda L \cos \alpha & \lambda L \sin \alpha & & \cos \alpha [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha] - 2L \operatorname{tg}^2 \alpha & & \sin \alpha \cos \alpha \\ (x-2L) \operatorname{tg} \alpha & x & & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} + q_0 \begin{Bmatrix} \sin \alpha \{ L[1 + \rho + \omega(\lambda + \beta)] - \rho x \} \\ \cos \alpha \{ L[1 + \rho + \omega(\lambda + \beta)] - \rho x \} \\ 0 \\ \hline -\cos \alpha \cdot \lambda L^2 \left[1 + \frac{1}{2} \omega(\lambda + \beta) \right] \\ \sin \alpha \cdot \lambda L^2 \left[1 + \frac{1}{2} \omega(\lambda + \beta) \right] \\ -L^2 \left[\omega(\lambda + \beta) \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) + \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \right] \\ + [\omega(\lambda + \beta) + \rho + 1] L x - \frac{1}{2} \rho x^2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

(二) 柔度系数 δ_{ij} 及 \bar{A}_{ij} 的推导

设 $\mu_1 = EI_{n1}/GJ_1$, $\xi_1 = EI_{n1}/EI_{b1}$,

$\mu_2 = EI_{n2}/GJ_2$, $\xi_2 = EI_{n2}/EI_{b2}$, $n = EI_{n1}/EI_{n2}$

上式中的 J_1 及 J_2 可近似地取为:

$$J_1 = \frac{b^3 d^3}{3.33(b^2 + d^2)}, \quad J_2 = \frac{b_1^3 d_1^3}{3.33(b_1^2 + d_1^2)}$$

又设 $E/G = 2.5$, 因 $EI_{a1} = nEI_{a2}$, $n = \frac{bd^3}{b_1d_1^3}$, 则

$$\mu_1 = 0.7(1 + \xi_1), \quad \xi_1 = \left(\frac{d_1}{b}\right)^2,$$

$$\mu_2 = 0.7(1 + \xi_2), \quad \xi_2 = n\left(\frac{d_2}{b_1}\right)^2$$

按分段积分时, 式(1)可由下式表达:

$$\left. \begin{aligned} EI_{a1}\delta_{11} &= \frac{1}{\cos\alpha} \sum_{x,z \in a} \left[\mu_1 \int_0^L \bar{M}_{11}\bar{M}_{11}dx + \xi_1 \int_0^L \bar{M}_{11}\bar{M}_{20}dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \bar{M}_{20}\bar{M}_{20}dx \right] + \mu_2 \int_0^L \bar{M}_{11}\bar{M}_{11}dz + \xi_2 \int_0^L \\ &\quad \times \bar{M}_{20}\bar{M}_{20}dz + n \int_0^L \bar{M}_{20}\bar{M}_{20}dz \\ EI_{a1}\Delta_{10} &= \frac{1}{\cos\alpha} \sum_{x,z \in a} \left[\mu_1 \int_0^L \bar{M}_{11}M_{10}dx + \xi_1 \int_0^L \bar{M}_{11}M_{20}dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \bar{M}_{20}M_{20}dx \right] + \mu_2 \int_0^L \bar{M}_{11}M_{10}dz + \xi_2 \int_0^L \\ &\quad \times \bar{M}_{20}M_{20}dz + n \int_0^L \bar{M}_{20}M_{20}dz \end{aligned} \right\} \quad (1A)$$

因式(13)、(14)及(15)中的各矩阵元素即为对应于式(5)的各元素, 故将上述三式中的 \bar{M}_{11} 、 \bar{M}_{20} 、 \bar{M}_{20} 及 M_{10} 、 M_{20} 、 M_{20} 等代入式(1A), 即可运算 δ_{11} 及 Δ_{10} 的表达式。其算式如下:

$$\begin{aligned} EI_{a1}\delta_{11} &= \frac{1}{\cos\alpha} \left\{ \int_0^L (x \operatorname{tg}\alpha)^2 dx + \mu_1 \int_0^L (-\lambda L \sin\alpha)^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \xi_1 \int_0^L (-\lambda L \cos\alpha)^2 dx + \int_0^L (x - 2L)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha dx \right\} \\ &\quad + \mu_2 \int_0^L (L \operatorname{tg}\alpha)^2 dz + \xi_2 \int_0^L (-z)^2 dz = L^3 \delta_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_{a1}\delta_{12} &= \frac{1}{\cos\alpha} \left\{ - \int_0^L \operatorname{tg}\alpha x^2 dx + \mu_1 \int_0^L \lambda^2 L^2 \sin\alpha \cos\alpha dx - \xi_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^L \lambda^2 L^2 \sin\alpha \cos\alpha dx + \int_0^L \operatorname{tg}\alpha (x^2 - 2Lx) dx \right\} - \mu_2 \int_0^L L^2 \operatorname{tg}\alpha dz = L^3 \delta_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_{a1}\delta_{13} &= \frac{1}{\cos\alpha} \left\{ -\mu_1 \int_0^L 2\lambda L^2 \sin^2 \alpha dx - \xi_1 \int_0^L \lambda L \cos^2 \alpha \right. \\ &\quad \left. \times [x(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2L \operatorname{tg}^2 \alpha] dx \right\} - \xi_2 \int_0^L Lz dz = L^3 \delta_{13} \end{aligned}$$