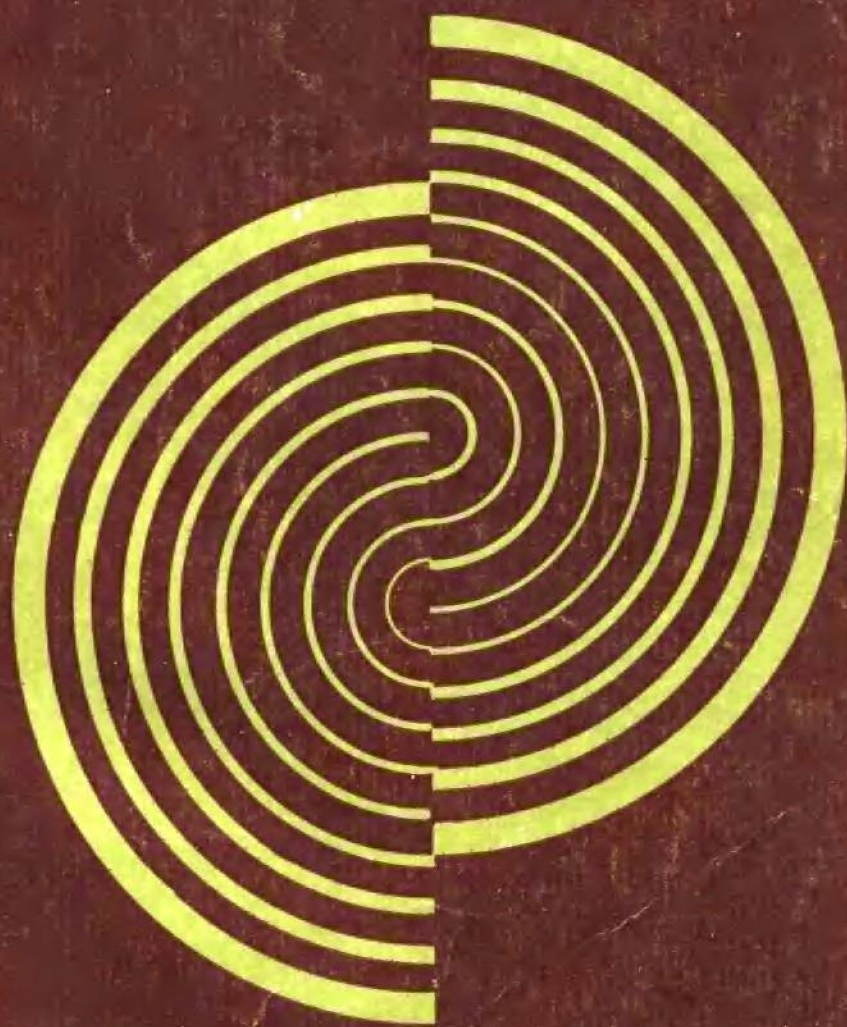


高等学校试用教材

# 电磁场与电磁波基础

卢荣章编

DIANCICHANG  
YU DIANCIBO  
JICHU



高等学校试用教材

# 电磁场与电磁波基础

卢荣章 编

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书内容基本符合教育部高等学校工科电工教材编审委员会于1980年6月审订的《电磁场与电磁波教学大纲》(草案),经电工教材编委会电磁场理论编审小组审查,同意作为高等学校试用教材。

本书讲述电磁场与电磁波的基本问题,内容包括:真空中的静电场,电介质的极化,静电场问题的解法,静电场的能量和力,恒定电流,真空中的恒定磁场,磁介质的极化,电磁感应,磁场能量和磁力,麦克斯韦方程,平面电磁波,导行电磁波,辐射,各向异性媒质中的电磁波,电荷在电磁场中的运动,狭义相对论与电磁学的联系。

本书可以作为高等工业学校无线电类专业的教材,也可以供其他专业学生或有关科学技术人员参考。

本书责任编辑 马达

高等学校试用教材  
**电磁场与电磁波基础**  
白荣章 编  
高等教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
河北省香河县印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 354,000

1985年1月第1版 1985年5月第1次印刷

印数 00,001—6,660

书号 15010·0632 定价 2.60元

## 序

本书是根据1980年6月审订的高等学校工科无线电类专业《电磁场与电磁波教学大纲》(草案)编写的教学用书。本书按照传统的方法讲述电磁的基本理论,学生在学完高等数学课程和工程数学课程后,就可以学习本书。讲述电磁理论时,考虑到简洁的数学推导对初学者更易于接受,故书中对某些问题以讲清物理概念为主,数学推导可能有不够严格的地方。为了帮助学生加深理解书中的内容和提高解题能力,各章都有一定数量的例题和习题。习题分为A类和B类,前者是学生应当完成的习题,后者是供参考的难题。全书例题为80道,习题为265道。读者如果想知道比本书所讲的更广泛和更深入的内容,请参阅书末所列出的参考书。

本书是根据我近年来讲授电磁场理论课程时所用的讲义修订而成的。国防科技大学张钧副教授主审、西安交通大学黄席椿教授复审了本书,并提出许多修改意见。成都电讯工程学院饶克谨教授对本书的修改也提了不少宝贵的意见。我在编写本书的过程中,始终得到了北京工业学院的院、系领导的鼓励和支持。在此谨表示衷心的感谢。

卢荣章

1984年7月于北京工业学院

# 目 录

|                                   |                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| <b>第一章 真空中的静电场</b> .....1         | <b>第五章 恒定电流</b> .....60         |
| § 1.1 库仑定律.....1                  | § 5.1 电流密度.....60               |
| § 1.2 电场强度.....1                  | § 5.2 电流连续方程.....60             |
| § 1.3 电通量密度.....3                 | § 5.3 导电媒质中的电流和电场.....61        |
| § 1.4 高斯定律.....4                  | § 5.4 分界面上的边界条件.....63          |
| § 1.5 高斯定律的微分形式.....7             | § 5.5 恒定电流场与静电场的比拟.....64       |
| § 1.6 静电场的非旋涡性质.....9             | 习题.....66                       |
| § 1.7 静电场的电位.....13               | <b>第六章 真空中的恒定磁场</b> .....67     |
| § 1.8 电位的泊松方程和拉普拉斯方程.....15       | § 6.1 载流导线回路之间的作用力.....67       |
| § 1.9 电偶极子.....17                 | § 6.2 磁通量密度.....67              |
| § 1.10 静电场中的导体系统.....19           | § 6.3 安培回路定律.....68             |
| 习题.....22                         | § 6.4 安培回路定律的微分形式.....70        |
| <b>第二章 电介质的极化</b> .....24         | § 6.5 磁场的高斯定律.....71            |
| § 2.1 电介质的极化.....24               | § 6.6 磁矢位.....71                |
| § 2.2 极化电介质外部的电位.....25           | § 6.7 磁偶极子.....74               |
| § 2.3 电介质中静电场的基本定律.....27         | § 6.8 磁标位.....76                |
| § 2.4 分界面上电场的边界条件.....29          | § 6.9 作用于电流回路的转矩.....77         |
| 习题.....31                         | 习题.....78                       |
| <b>第三章 静电场问题的解法</b> .....33       | <b>第七章 磁介质的磁化</b> .....80       |
| § 3.1 静电场问题的分类.....33             | § 7.1 磁介质的磁化.....80             |
| § 3.2 唯一性定理.....33                | § 7.2 磁化磁介质外部的磁矢位.....81        |
| § 3.3 直角坐标系中拉普拉斯方程的解.....34       | § 7.3 磁化磁介质外部的磁标位.....82        |
| § 3.4 圆柱坐标系中拉普拉斯<br>方程的二维解.....37 | § 7.4 磁介质中恒定磁场的基本定律.....83      |
| § 3.5 球面坐标系中拉普拉斯<br>方程的二维解.....39 | § 7.5 分界面上磁场的边界条件.....85        |
| § 3.6 复变函数的应用.....42              | § 7.6 恒定磁场与静电场的比拟.....86        |
| § 3.7 镜像法.....46                  | 习题.....87                       |
| § 3.8 有限差分法.....49                | <b>第八章 电磁感应、磁场能量和磁力</b> .....89 |
| 习题.....51                         | § 8.1 法拉第定律.....89              |
| <b>第四章 静电场的能量和力</b> .....54       | § 8.2 保守电场和感应电场.....90          |
| § 4.1 电场能量.....54                 | § 8.3 运动回路的法拉第定律.....90         |
| § 4.2 电场能量的分布.....55              | § 8.4 电感和互感.....92              |
| § 4.3 作用于带电导体的静电力.....56          | § 8.5 磁场能量.....94               |
| 习题.....58                         | § 8.6 磁场能量的分布.....96            |
|                                   | § 8.7 导线回路的内电感和外电感.....97       |
|                                   | § 8.8 磁力.....100                |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 习题                              | 101 |
| <b>第九章 麦克斯韦方程</b>               | 104 |
| § 9.1 推广安培回路定律                  | 104 |
| § 9.2 麦克斯韦方程                    | 105 |
| § 9.3 波印廷定理                     | 108 |
| § 9.4 正弦电磁场                     | 110 |
| § 9.5 复波印廷定理                    | 113 |
| § 9.6 标量位和矢量位                   | 114 |
| § 9.7 电磁场的边界条件                  | 116 |
| § 9.8 电介质的色散性质, 复电容率            | 117 |
| 习题                              | 119 |
| <b>第十章 平面电磁波</b>                | 121 |
| § 10.1 波动方程                     | 121 |
| § 10.2 理想电介质中的平面电磁波             | 122 |
| § 10.3 电磁波的极化                   | 127 |
| § 10.4 导电媒质中的正弦平面电磁波            | 129 |
| § 10.5 向任意方向传播的平面电磁波            | 135 |
| § 10.6 电磁波入射到电介质的分界面上时所引起的反射和折射 | 137 |
| § 10.7 全反射和全反射                  | 140 |
| § 10.8 导电媒质的表面上的反射和折射           | 144 |
| 习题                              | 147 |
| <b>第十一章 导行电磁波</b>               | 152 |
| § 11.1 导行波的电磁场                  | 152 |
| § 11.2 矩形波导管内的电磁波               | 154 |
| § 11.3 $TE_{10}$ 型电磁波           | 158 |
| § 11.4 波导管壁上的损耗                 | 161 |
| § 11.5 传输线上的 TEM 波              | 163 |
| § 11.6 相速度和群速度                  | 166 |
| § 11.7 谐振腔                      | 168 |
| § 11.8 谐振腔的品质因数                 | 171 |
| 习题                              | 173 |
| <b>第十二章 辐射</b>                  | 176 |
| § 12.1 推迟位                      | 176 |
| § 12.2 赫芝偶极子                    | 178 |

|                 |     |
|-----------------|-----|
| § 12.3 电力线的分布   | 181 |
| § 12.4 辐射功率     | 182 |
| § 12.5 磁偶极子天线   | 184 |
| § 12.6 半波天线     | 186 |
| § 12.7 方向性系数和增益 | 188 |
| § 12.8 天线阵      | 190 |
| § 12.9 二次辐射     | 193 |
| § 12.10 互易定理    | 197 |
| 习题              | 198 |

### 第十三章 各向异性媒质中的电磁波

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 13.1 等离子体的等效电容率    | 200 |
| § 13.2 均匀等离子体中的正弦电磁波 | 202 |
| § 13.3 磁化铁氧体的等效磁导率   | 206 |
| § 13.4 磁化铁氧体中的电磁波    | 208 |
| 习题                   | 210 |

### 第十四章 电荷在电磁场中的运动

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 14.1 点电荷在静电场中的运动 | 212 |
| § 14.2 点电荷在静磁场中的运动 | 213 |
| § 14.3 点电荷在正交场中的运动 | 216 |
| 习题                 | 218 |

### 第十五章 狭义相对论与电磁学的联系

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 15.1 伽利略变换和洛伦兹变换 | 220 |
| § 15.2 质量的变换和力的变换  | 223 |
| § 15.3 运动电荷之间作用力   | 224 |
| § 15.4 电磁场的变换      | 225 |
| § 15.5 麦克斯韦方程      | 227 |
| 习题                 | 229 |

### 附录

|                 |     |
|-----------------|-----|
| A 正交坐标系         | 231 |
| B 矢量公式          | 231 |
| C 亥姆霍兹定理        | 232 |
| D 正弦电流所产生的远区电磁场 | 233 |
| E $\delta$ 函数   | 234 |
| F 国际单位制         | 237 |

### 参考书目

|    |     |
|----|-----|
| 索引 | 241 |
|----|-----|

# 第一章 真空中的静电场

静电场是指静电荷所产生的电场,本章将根据实验中总结出的定律,讨论真空中静电场的性质和计算方法。

## § 1.1 库仑定律

静电现象是基本电磁现象,静电现象与电荷有密切联系。电荷有正负之分,正电荷的出现总是伴随着负电荷的出现,所有电荷都是电子电荷( $e = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ )的绝对值的整倍数。电荷可以分布在真空中,也可以分布在导体表面上,电荷之间存在着相互作用力。如果两个带电体的尺寸都远比带电体之间距离小得多,则带电体的电荷都可以看作点电荷。库仑通过实验总结出两个点电荷相互作用的定律,称为库仑定律。图 1-1 表示真空中两个点电荷  $Q_1$  和  $Q_2$ , 从原点  $O$  到  $Q_1$  和  $Q_2$  的矢量分别为  $\mathbf{r}'$  和  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  和  $\mathbf{r}$  分别称为  $Q_1$  和  $Q_2$  的位置矢量。实验指出,  $Q_1$  作用于  $Q_2$  的力可以表达成如下形式

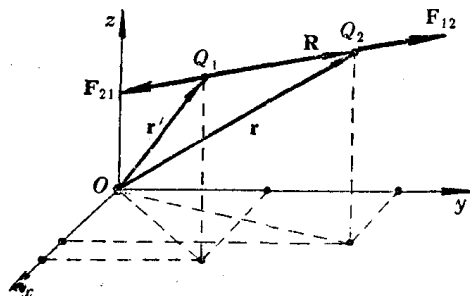


图 1-1 真空中的两个点电荷

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{R}}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{a}_r}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad (1-1)$$

式(1-1)称为真空中的库仑定律,式中  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  代表自  $Q_1$  到  $Q_2$  的矢量,  $\mathbf{a}_r = \mathbf{R}/R$  代表沿矢量  $\mathbf{R}$  方向上的单位矢量,  $R = |\mathbf{R}|$  为  $Q_1$  与  $Q_2$  之间距离,  $\epsilon_0$  是表征真空电性质的物理量并且称为真空的电容率。 $\epsilon_0$  的单位为  $\frac{\text{库仑}^2}{\text{牛顿} \cdot \text{米}^2} = \frac{\text{库仑}^2}{\text{焦耳} \cdot \text{米}} = \frac{\text{法拉}}{\text{米}}$  (国际单位制符号 F/m)。国际单位制中,  $\epsilon_0 = 1/(36\pi \times 10^9) \approx 8.8538 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

如果把式(1-1)中的  $\mathbf{R}$  换成  $-\mathbf{R}$ , 我们就得到  $Q_2$  作用于  $Q_1$  的力  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , 可见两个点电荷的相互作用力符合牛顿第三定律。

## § 1.2 电场强度

为了解释电荷之间相互作用力,需要引入场的概念。场是客观存在着的一种物质,虽然我们并不能直接看到场,但是我们能够测出它。电荷  $Q_1$  之所以对电荷  $Q_2$  产生力,就是因为  $Q_1$  在其周围产生电场,此电场对  $Q_2$  的作用表现为  $Q_1$  对  $Q_2$  产生作用力。场可以分为标量场和矢量场,标量场仅有数值大小,矢量场不但有数值大小,而且还有确定的方向,标量场可以用标量函数描述,矢量场则必须用矢量函数描述。电荷所产生的电场是一矢量场。因为静电场对试验电荷的作用

力与试验电荷的大小成正比，所以我们可以把作用于单位试验电荷的力作为描述静电场的物理量，此物理量称为电场强度矢量。假设试验电荷  $\Delta Q$  在电场中受力为  $\mathbf{F}$ ，则电场强度矢量的定义为

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{\Delta Q} \quad (1-2)$$

矢量  $\mathbf{E}$  的单位为伏特/米 (= 牛顿/库仑 = 焦耳/(库仑·米))，国际单位制符号为 V/m。  $\mathbf{E}$  是一矢量函数，在直角坐标系

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z \quad \text{V/m} \quad (1-3)$$

上式中  $\mathbf{a}_x$  代表沿  $x$  轴正方向上的单位矢量， $\mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{a}_z$  分别代表沿  $y$  轴正方向和沿  $z$  轴正方向上的单位矢量， $E_x = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x$  代表矢量  $\mathbf{E}$  在  $x$  轴上的投影并且称为  $\mathbf{E}$  的  $x$  轴分量， $E_y$  和  $E_z$  分别称为  $\mathbf{E}$  的  $y$  轴分量和  $z$  轴分量， $E_x$ 、 $E_y$  和  $E_z$  都是标量函数。

将库仑定律式(1-1)中的  $Q_1$  和  $Q_2$  分别换成  $Q$  和  $\Delta Q$ ，然后把它们代入电场强度的定义公式(1-2)，得到点电荷  $Q$  在相对位置矢量  $\mathbf{R}$  的点上所产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-4)$$

如果真空中有  $n$  个点电荷，则任意点  $P$  上的总电场强度等于各个点电荷所单独产生的电场强度的矢量和

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \quad (1-5)$$

其中  $\mathbf{R}_i$  代表自  $Q_i$  到  $P$  的矢量，图 1-2 表示了  $n=3$  的情形。

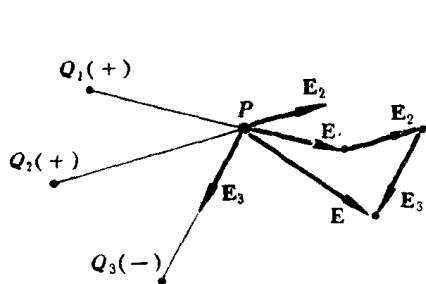


图 1-2 三个点电荷在点  $P$  所产生的电场强度

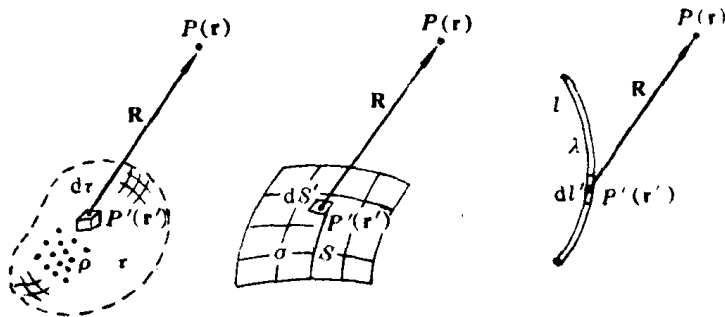


图 1-3 由分布电荷计算电场强度

许多情况下我们还需要计算电荷连续分布在一定区域里所产生的电场强度。若电荷以体密度  $\rho \text{C/m}^3$  分布在体积  $\tau$  里、或者以面密度  $\sigma \text{C/m}^2$  分布在表面  $S$  上、或者以线密度  $\lambda \text{C/m}$  分布在细线  $l$  上，如图 1-3 所示。在这种情况下只要分别把体积元  $d\tau'$ 、面积元  $dS'$  以及线元  $dl'$  上的电荷看作点电荷，并把式(1-5)中的  $Q_i$  分别换成  $dQ = \rho d\tau'$ 、 $\sigma dS'$  以及  $\lambda dl'$ ，同时把求和式换成积分式即可。因此，体积分布电荷所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (1-6)$$



表面分布电荷所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{R}}{R^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (1-7)$$

线分布电荷所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\mathbf{R}}{R^3} \lambda(\mathbf{r}') dl' \quad (1-8)$$

### § 1.3 电通量密度

电场是电荷所产生的,为了更好地描述电场与电荷的联系,需要引入电通量的概念。电通量是由流体的流量引伸过来的量,流体中单位时间通过某面积的流量也称为通量。在垂直于流速方向的平面里,单位面积所通过的通量称为通量密度,通量密度的单位为通量数/米<sup>2</sup>。根据式(1-4), $\epsilon_0\mathbf{E}$  的单位为库仑/米<sup>2</sup>,它的单位与通量密度的单位相当。因此,可以把 $\epsilon_0\mathbf{E}$  看作电通量密度。电荷是电通量的源,它向四周发出电通量。真空中电通量密度矢量定义为

$$\epsilon_0\mathbf{E} \quad (1-9)$$

电通量密度矢量的方向处处与电场强度矢量的方向一致。由已知电通量密度,可以计算垂直于矢量 $\epsilon_0\mathbf{E}$  的面元 $dS_n$  所通过的电通量 $d\psi$ ,  $d\psi = \epsilon_0\mathbf{E}dS_n$ 。这样,电通量密度也可以按照下式定义

$$\epsilon_0\mathbf{E} = \frac{d\psi}{dS_n} \quad (1-10)$$

电场中通过任意面元 $dS$  的电通量为

$$d\psi = \epsilon_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E dS \cos\theta \quad (1-11)$$

其中 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ ,  $dS$  代表面元的面积,而 $\mathbf{n}$  代表沿面元的法线方向上的单位矢量, $\theta$  为 $\mathbf{E}$  与 $\mathbf{n}$  的交角。通过有限面积 $S$  的电通量是式(1-11)的积分

$$\psi = \int_S \epsilon_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-12)$$

通过闭合面 $S$  的电通量为 $\psi = \oint_S \epsilon_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 。我们规定闭合面上所有面元的法线都向外,故 $\theta$  为锐角与电通量为正值相对应,而 $\theta$  为钝角与电通量为负值相对应,前者表示电通量“流出”闭合面,而后者表示电通量“流进”闭合面。图 1-4 表示了上述两种情形。

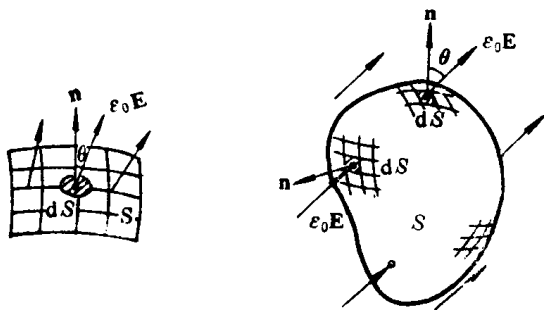


图 1-4 电通量的意义

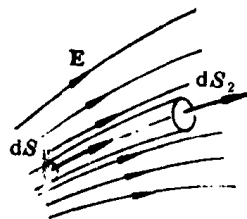


图 1-5 电通量管

有了电通量的概念,我们就能够用图形表示电场。为此,在电场中作许多小管,每根管的侧面处处与矢量  $\mathbf{E}$  相平行,图 1-5 表示其中的一根管,此管的任意截面上所通过的电通量都相同,这样的管称为电通量管。如果管的两个截面  $dS_1$  和  $dS_2$  上的电通量密度分别为  $\epsilon_0 E_1$  和  $\epsilon_0 E_2$ , 则  $\epsilon_0 E_1 dS_1 = \epsilon_0 E_2 dS_2$ 。因此,电通量密度大的地方,管的截面积小;而电通量密度小的地方,管的截面积大。我们设想整个空间充满着小电通量管,每根管所通过的电通量都相同,这些管的轴线组成空间里许多曲线,称为电通量线。任意点上的电通量密度矢量的方向与通过该点的电通量线的切线方向一致,而电通量密度值与该点电通量线的密度成正比,通常取电通量线的密度等于电通量密度值。在电场中,电通量线是自正电荷出发而终止于负电荷或无限远处。因为电通量密度矢量与电场强度矢量的方向相同,所以上述曲线也可以表示电场强度的分布,我们称之为电力线。电力线上任意点的切线方向与该点矢量  $\mathbf{E}$  的方向一致,电力线的密度与该点的矢量  $\mathbf{E}$  的绝对值成正比。

图 1-6 表示静电场中的电力线,线上任意点  $P$  的电场强度矢量  $\mathbf{E}$  与该点的线元矢量  $d\mathbf{l}$  方向一致,故有

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = (a_x E_x + a_y E_y + a_z E_z) \times (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = 0$$

$$\text{即 } a_x(E_y dz - E_z dy) + a_y(E_z dx - E_x dz) + a_z(E_x dy - E_y dx) = 0$$

上式成立的唯一条件为

$$\left. \begin{aligned} E_y dz - E_z dy &= 0 \\ E_z dx - E_x dz &= 0 \\ E_x dy - E_y dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

$$\therefore \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1-14)$$

式(1-14)为直角坐标系中电力线的微分方程。

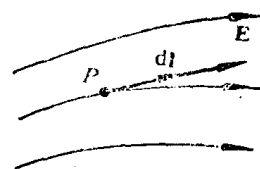


图 1-6 电力线

## § 1.4 高斯定律

由实验总结得出的库仑定律出发,可以推导出电场的高斯定律。高斯定律表达了通过一个闭合面的电通量与闭合面内部电荷之间的关系。推导高斯定律时需要用立体角概念。图 1-7 表示一个半径为  $r$  的球面,球面上的面元  $dS$  对球心有一立体角  $d\Omega = dS/r^2$  球面度,整个球面对球心的立体角为  $\Omega = \int dS/r^2 = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$  球面度。图 1-8 表示一个任意闭合面  $S$ , 闭合面上的面元  $dS$  对某点  $O$  的立体角  $d\Omega$  则由下式决定

$$d\Omega = dS \cdot \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS_n}{r^2} \quad (1-15)$$

其中的  $\mathbf{a}_r$  代表自点  $O$  到  $dS$  方向上的单位矢量,  $r$  为  $O$  与  $dS$  的距离,  $\theta$  为  $dS$  与  $\mathbf{a}_r$  的交角,  $dS_n$  代表以  $O$  为中心通过  $P$  的球面上、被限定在  $d\Omega$  范围内的面元。立体角可以是正值或负值,  $d\Omega$  是正值或负值决定于  $\theta$  是锐角还是钝角,图 1-8 中  $O$  在  $S$  内部,因而  $S$  上任意面积元对  $O$  的立体角都是正值。为了求得整个闭合面  $S$  对  $O$  的立体角,我们以  $O$  为中心作一半径为  $r_0$  的辅助球面

$S_0$  包围着面  $S$ , 假设  $S_0$  上被限定在  $d\Omega$  范围内的面元为  $dS_{n_0}$ , 则

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS_{n_0}}{r_0^2} \quad (1-16)$$

整个闭合面  $S$  对  $O$  的立体角是上式的积分

$$\Omega = \oint_S \frac{dS_n}{r^2} = \oint_{S_0} \frac{dS_{n_0}}{r_0^2} = \frac{4\pi r_0^2}{r_0^2} = 4\pi \quad (1-17)$$

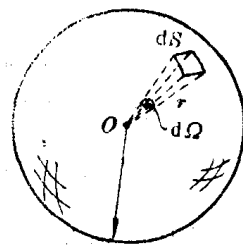


图 1-7 球面上的面元对球心的立体角

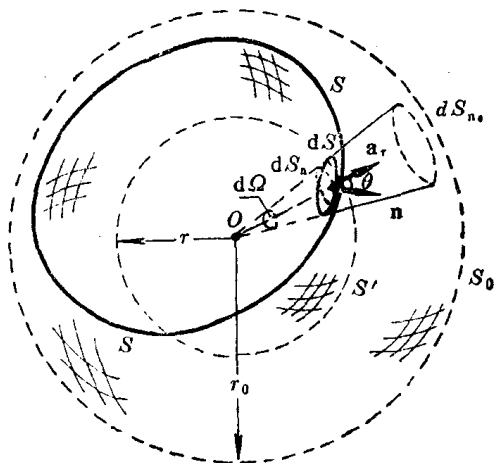


图 1-8 闭合面  $S$  上的面元对点  $O$  的立体角

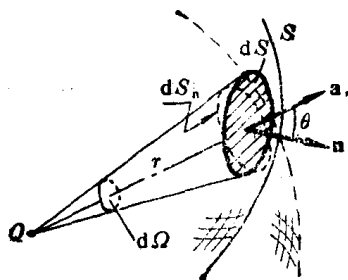


图 1-9  $d\Omega$  范围内所通过的电通量

我们来推导高斯定律。图 1-9 表示原点  $O$  上有一个点电荷  $Q$ , 闭合面  $S$  上的面积元  $dS$  与  $O$  的距离为  $r$ 。为了求得通过  $dS$  的电通量, 把式(1-4)中的  $R$  换成  $r$ , 得  $\epsilon_0 \mathbf{E} = (Q/4\pi) \mathbf{a}_r / r^2$ 。把  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  的表达式代入式(1-11), 得到

$$d\psi = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} d\Omega \quad (1-18)$$

整个闭合面  $S$  所通过的电通量为

$$\psi = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} \int d\Omega \quad (1-19)$$

如果  $Q$  位于闭合面内部, 则每个面元所对的立体角都是正值, 此时立体角的总和等于  $4\pi$ 。

$$\therefore \psi = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1-20)$$

如果  $Q$  位于闭合面外部, 则式(1-20)中  $Q=0$ , 因而  $\psi = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。按照式(1-19)和图 1-10, 立体角  $d\Omega$  所限定两部分面元所对的立体角一个是正值而另一个是负值, 结果两者所对的立体角总和等于零, 整个闭合面所对的立体角也等于零, 因而通过闭合面的电通量总和也等于零。

假设闭合面内部有  $n$  个点电荷, 其中电荷  $Q_i$  所产生的电通量密度为  $\epsilon_0 \mathbf{E}_i$ , 这情况下通过闭合面的电通量总和为

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (1-21)$$

如果电荷以体密度  $\rho$  分布在闭合面  $S$  内部, 我们就把体积元  $d\tau'$  所包含的电荷看作点电荷, 即把上式中的  $Q$ , 换成  $\rho d\tau'$  同时把求和式换成积分式, 得

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \rho d\tau' \quad (1-22)$$

其中  $\tau$  代表闭合面  $S$  所限定的体积。式(1-22)称为真空中电场的高斯定律。电场的高斯定律说明通过任意闭合面的电通量的总和等于闭合面所包围的总电荷。电场的高斯定律是用简洁的语言表达了静电场与电荷的联系, 它可以用来计算平面对称、轴对称以及球对称的静电场问题。

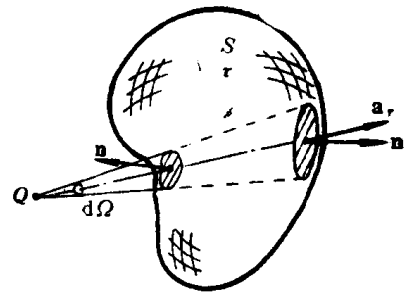


图 1-10 电荷在闭合面外部情形

例题 1.1 有一个半径为 0.3 m 的圆平面, 通过圆心并且与圆平面相垂直的轴线上, 距离圆心 0.4 m 的点  $P$  上观看此圆时, 立体角等于多少? 如果  $P$  上有一点电荷  $Q=10^{-7}\text{C}$ , 则通过此圆的电通量是多少?

解: 按照图 1-11 和式(1-16)

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{dS_n}{r_0^2} \\ \Omega &= \int d\Omega = \int_0^{\theta_1} \frac{2\pi(r_0 \sin\theta)r_0 d\theta}{r_0^2} \\ &= \frac{2\pi r_0^2 (1 - \cos\theta_1)}{r_0^2} \\ &= 2\pi(1 - \cos\theta_1) \end{aligned} \quad (1-23)$$

其中

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{0.4}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}} = 0.8 \\ \therefore \Omega &= 0.4\pi \text{ sr} \end{aligned}$$

圆所对  $P$  的立体角等于整个球面所对的立体角的十分之一, 由此可知通过圆的电通量等于整个球面所通过的电通量的十分之一。最后得到

$$\psi = \frac{Q}{10} = 10^{-8}\text{C}$$

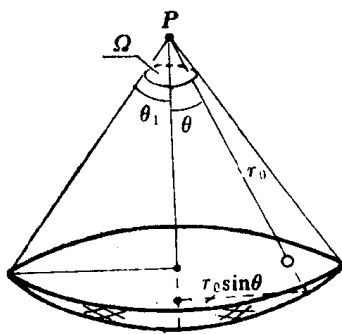


图 1-11 平面角与立体角的关系

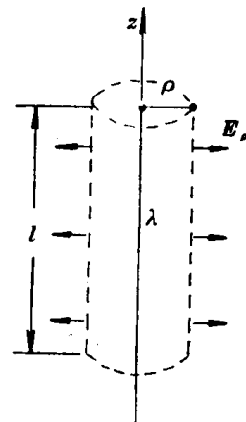


图 1-12 线电荷的电场

例题 1.2 假设真空中沿  $z$  轴有线密度为  $\lambda$  的均匀分布电荷, 试求任意点的电场强度。

解: 按照图 1-12, 在圆柱坐标系里, 电场强度只有  $E_\rho$  分量同时具有旋转对称性质, 在这种情况下, 运用电场的高斯定律比较方便。我们以  $z$  轴为轴线作一个半径为  $\rho$ 、高为  $l$  的圆柱面, 然后把高斯定律运用到此闭合

圆柱面上,得

$$\begin{aligned} \epsilon_0 E_\rho (2\pi\rho l) &= \lambda l \\ \therefore E_\rho &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \end{aligned} \quad (1-24)$$

### § 1.5 高斯定律的微分形式

式(1-22)表达了闭合面上所通过的电通量与闭合面内部电荷之间的联系,本节将深入一步研究电场中某点 $P$ 上的电场与电荷的关系,分析时需要用到矢量的散度的概念,让我们先介绍矢量的散度。假设一矢量场的矢量函数为 $\mathbf{F}$ ,为了求得此矢量场中点 $P$ 上矢量 $\mathbf{F}$ 的闭合面积分,我们作一个小闭合面 $S$ 包围点 $P$ ,如图1-13所示。先计算矢量 $\mathbf{F}$ 在此面上的面积分,接着用此闭合面所限定的体积 $\Delta\tau$ 除此积分,然后取 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 的极限,得

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau} \quad (1-25)$$

上式代表在点 $P$ 上单位体积所通过闭合面的矢量 $\mathbf{F}$ 的通量,称为矢量 $\mathbf{F}$ 的散度。矢量 $\mathbf{F}$ 的散度用 $\text{div}\mathbf{F}$ 表示,

$$\text{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau} \quad (1-26)$$

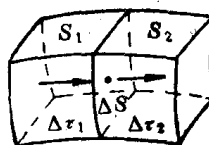
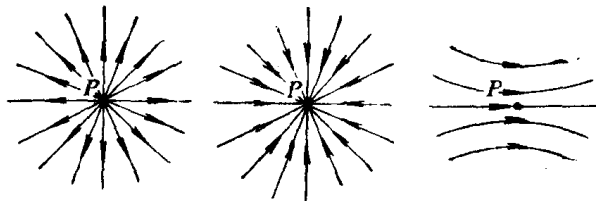
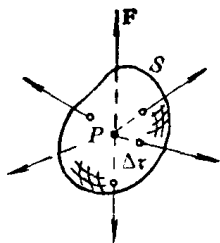


图1-13 散度的意义      图1-14 矢量的散度大于零、小于零以及等于零时力线的分布      图1-15 散度定理的意义

矢量的散度决定于场源的分布,矢量场中某点 $P$ 上有场的正源时,就会出现自该点向四周围发出通量,故该点的 $\text{div}\mathbf{F} > 0$ 。如果点 $P$ 有场的负源,则会出现来自四周围的通量向该点汇集,故该点的 $\text{div}\mathbf{F} < 0$ 。如果点 $P$ 上没有场源,则通量不是自该点发出也不是向该点汇集,而是经过该点,故该点的 $\text{div}\mathbf{F} = 0$ 。图1-14表示所述三种情况下场力线的分布。矢量的散度处处等于零的场称为无源场,矢量的散度一般不等于零的场称为有源场。

我们来推导一个与散度运算有关的定理。图1-15表示一个体积元 $\Delta\tau$ ,它的表面为 $S$ 。我们把此体积元分割成两个相邻体积元 $\Delta\tau_1$ 和 $\Delta\tau_2$ ,其中 $\Delta\tau_1$ 的表面为 $S_1$ 而 $\Delta\tau_2$ 的表面为 $S_2$ ,两体积元的公共面为 $\Delta S$ 。根据散度的定义,体积元 $\Delta\tau_1$ 上矢量 $\mathbf{F}$ 的散度与 $\Delta\tau_1$ 的乘积等于通过它的闭合表面 $S_1$ 的通量,

$$(\text{div}\mathbf{F})\Delta\tau_1 = \oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_1$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{F}) \Delta \tau_2 = \oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_2$$

∴

$$(\operatorname{div} \mathbf{F}) \Delta \tau_1 + (\operatorname{div} \mathbf{F}) \Delta \tau_2 = \oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_1 + \oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_2$$

在公共面  $\Delta S$  上, 如果对于  $\Delta \tau_1$  所通过的通量为正(流出  $\Delta \tau_1$ ), 则对于  $\Delta \tau_2$  所通过的通量一定为负(流进  $\Delta \tau_2$ )。这样, 上等式右边的两项在公共面  $\Delta S$  上的面积分总和恒等于零, 因而左边的两项面积分之和就等于  $\Delta \tau$  的表面  $S$  上的积分  $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 。以此类推, 对任意闭合面  $S$  所包围的体积  $\tau$ , 都可以分割成  $n$  个体积元, 通过所有体积元的通量总和一定等于通过闭合面的通量,

$$\sum_{i=1}^n (\operatorname{div} \mathbf{F}) \Delta \tau_i = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-27)$$

取  $\Delta \tau_i \rightarrow 0$  的极限, 导出

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{F} d\tau = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-28)$$

上式称为散度定理, 它说明矢量  $\mathbf{F}$  的散度的体积分等于矢量  $\mathbf{F}$  在此体积的闭合表面上的面积分。

散度的定义公式(1-26)是一般形式, 我们来推导它的直角坐标表达式。以点  $P(x, y, z)$  为中心作一个直角六面体, 令它的表面分别与三个坐标面相平行, 如图 1-16 所示。假设六面体的边长分别为  $\Delta x, \Delta y$  以及  $\Delta z$ , 中心点  $P$  上矢量  $\mathbf{F}$  的分量为  $F_x, F_y$  以及  $F_z$ 。计算通过此六面体的矢量  $\mathbf{F}$  的通量时, 注意到这三对平行平面上, 任何一对平行表面上所流出的通量可能都不等于流进的通量, 因而对闭合面所通过的通量有贡献。在前面和后面这一对平行表面上, 所通过的通量只决定于  $F_x$ 。根据泰勒定理, 在前面和后面

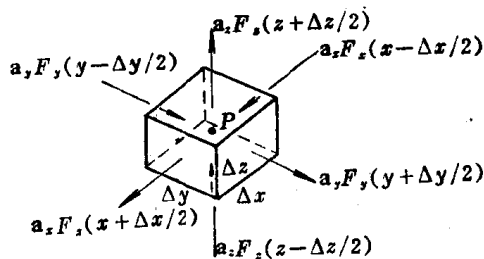


图 1-16 在直角坐标系里计算矢量的散度

$$F_x(x \pm \Delta x/2) = F_x \pm \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots \quad (1-29)$$

略去高阶项, 导出前后两面上所通过的通量差为

$$[F_x(x + \Delta x/2) - F_x(x - \Delta x/2)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同样道理, 通过左右两面和上下两面的通量差分别为

$$[F_y(y + \Delta y/2) - F_y(y - \Delta y/2)] \Delta x \Delta z = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

和

$$[F_z(z + \Delta z/2) - F_z(z - \Delta z/2)] \Delta x \Delta y = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

通过闭合面  $S$  的通量是以上三者之和

$$\therefore \oint_s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta\tau \quad (1-30)$$

其中  $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$  代表六面体的体积。上式指出，通量与体积成正比。把上式代入式 (1-26)，得到

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1-31)$$

上式可以写成两矢量的点积的形式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \left( \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{a}_x F_x + \mathbf{a}_y F_y + \mathbf{a}_z F_z) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1-32)$$

其中 
$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-33)$$

微分运算符  $\nabla$  读 del 或 nabra。

引入了矢量的散度的概念，现在回到电场高斯定律式 (1-22)，我们对此等式的左边应用散度定理式 (1-28)，导出

$$\int_{\tau} \operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) d\tau = \int_{\tau} \rho d\tau \quad (1-34)$$

上式对任意体积  $\tau$  都成立，由此推出

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad (1-35)$$

或 
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad (1-36)$$

式 (1-35) 称为电场高斯定律的微分形式，它说明点  $P$  上矢量  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  的散度等于该点的电荷密度。虽然  $P$  上的  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  是所有电荷共同产生的，可是  $\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E})$  仅决定于  $P$  上的电荷密度而与其他电荷无关。按照式 (1-35)，静电场中矢量  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  的散度一般不等于零，仅在电荷密度等于零的区域里才等于零，可见静电场是一有源场。

## § 1.6 静电场的非旋涡性质

电场的高斯定律是从电荷产生电场这个角度去研究电场与电荷的关系，这仅是问题的一个方面。问题的另外一方面是电场对电荷的作用，这个作用使得电荷在电场中位移时要完成一定的功。

因为电场中某点的电场强度代表单位电荷在该点所受到的作用力，所以试验电荷  $Q_0$  在电场强度为  $\mathbf{E}$  的电场中所受到的作用力为

$$\mathbf{F} = Q_0 \mathbf{E} \quad (1-37)$$

此电荷位移  $d\mathbf{l}$  时，电场对电荷做功为  $Q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。外力克服电场力所作的功（也称电荷做功）为

$$dW = -Q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -Q_0 E dl \cos\theta \quad (1-38)$$

式中  $\theta$  代表  $\mathbf{E}$  与  $d\mathbf{l}$  的交角。外力使电荷自点  $a$  位移到点  $b$  所作的功为

$$W = -Q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-39)$$

图 1-17 表示试验电荷  $Q_0$  在点电荷  $Q$  所产生的电场中位移的情形。假设  $Q$  位于坐标原点, 则式(1-4)中  $r' = 0, \mathbf{R}/R = \mathbf{a}_r$ , 以及  $\mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{l} = dl \cos \theta = dr$ , 此时由式(1-39)推出

$$W = -Q_0 \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{l} = -Q_0 \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q_0 Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (1-40)$$

作功仅决定于始点和终点的位置而与所经过的路径无关。假设电荷  $Q_0$  自  $a$  出发, 经  $acbda$  位移一周回到  $a$ , 则所作的外功为  $W = -Q_0 \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。由此推出

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-41)$$

上式指出, 静电场中电场强度矢量的闭合回路积分等于零。就是说单位电荷沿一闭合回路位移一周, 静电场对电荷所作的功的总和恒等于零。因此, 静电场是一保守场。我们分析了点电荷的电场, 利用迭加原理, 可以推出任意分布电荷所产生的静电场都是保守场, 静电场的保守性质符合能量守恒定律。

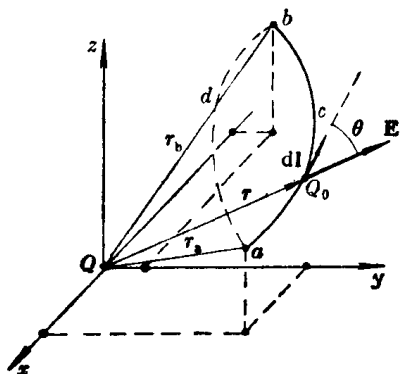


图 1-17 电荷在电场中的位移

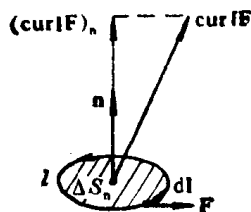


图 1-18 旋度沿  $\mathbf{n}$  方向的分量

我们分析了一闭合回路上静电场对电荷作功, 现在来深入一步分析某点上静电场对电荷作功的性质。分析时需要用到矢量的旋度的概念, 让我们先介绍矢量的旋度。假设一矢量场的矢量函数为  $\mathbf{F}$ , 作一个小平面回路  $l$  环绕矢量场中的某点  $P$ 。令  $l$  所限定的面积为  $\Delta S_n$ , 沿  $\Delta S_n$  的法线方向上的单位矢量为  $\mathbf{n}$ , 如图 1-18 所示。我们先计算矢量  $\mathbf{F}$  沿此回路的闭合线积分, 接着用  $\Delta S$  除此积分, 然后取  $\Delta S_n \rightarrow 0$  的极限, 得

$$\lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_n} \quad (1-42)$$

上式代表在垂直于矢量  $\mathbf{n}$  的回路  $l$  上单位面积的矢量  $\mathbf{F}$  的闭合回路积分, 此积分与矢量  $\mathbf{n}$  的取向有关并且在某一个方向上达到最大值。因此, 上式代表一矢量在矢量  $\mathbf{n}$  方向上的投影, 我们称它为矢量  $\mathbf{F}$  的旋度矢量沿矢量  $\mathbf{n}$  方向的分量, 矢量  $\mathbf{F}$  的旋度通常用  $\text{curl} \mathbf{F}$  表示

$$(\text{curl} \mathbf{F})_n = (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_n} \quad (1-43)$$



在直角坐标系里,  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$  时

$$(\text{curl} \mathbf{F})_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1}{\Delta S_x} \quad (yz \text{ 平面上}) \quad (1-44a)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$  时

$$(\text{curl} \mathbf{F})_y = \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2}{\Delta S_y} \quad (xz \text{ 平面上}) \quad (1-44b)$$

$$(\text{curl} \mathbf{F})_z = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_3}{\Delta S_z} \quad (xy \text{ 平面上}) \quad (1-44c)$$

$$\text{curl} \mathbf{F} = \mathbf{a}_x (\text{curl} \mathbf{F})_x + \mathbf{a}_y (\text{curl} \mathbf{F})_y + \mathbf{a}_z (\text{curl} \mathbf{F})_z \quad (1-45)$$

矢量  $\mathbf{F}$  的旋度是一矢量, 它的绝对值等于矢量  $\mathbf{F}$  在单位面积闭合回路积分的最大值, 它的方向就是使回路积分达到最大值时回路的法线方向。“旋度”是由流体的旋涡引伸过来的概念, 流体中某点出现旋涡时, 由于质点环绕旋涡中心位移一周所作的功不等于零, 因而该点上流速矢量的旋度不等于零。场矢量的旋度一般不等于零的场称为旋涡场, 场矢量的旋度处处等于零的场称为非旋涡场。

我们来推导一个与旋度运算有关的定理。图 1-19 表示一个面积元  $\Delta S$ , 沿它的法线方向上的单位矢量为  $\mathbf{n}$ , 它的周界为  $l$ 。我们把此面元分割成两个相邻的面元  $\Delta S_1$  和  $\Delta S_2$ , 它们的周界分别为  $l_1$  和  $l_2$ , 两面元的公共接触线段为  $\Delta l$ 。根据旋度的定义, 矢量  $\mathbf{F}$  的旋度沿矢量  $\mathbf{n}$  方向上的分量与  $\Delta S_i$  的乘积等于矢量  $\mathbf{F}$  沿此面元的周界的积分

$$(\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \Delta S_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1$$

和 
$$(\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \Delta S_2 = \oint_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$\therefore (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \Delta S_1 + (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \Delta S_2 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1 + \oint_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2$$

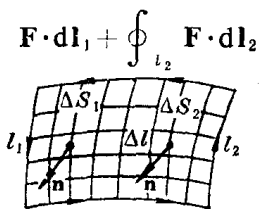


图 1-19 斯托克斯定理的意义

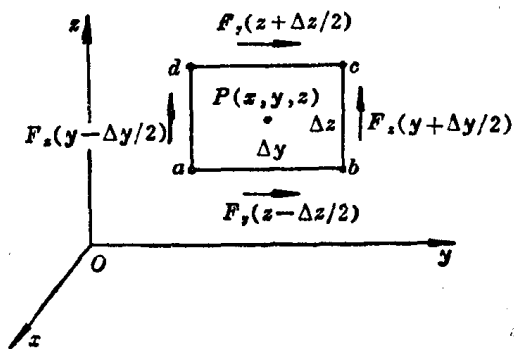


图 1-20 在直角坐标系里计算  $(\nabla \times \mathbf{F})_x$

在公共线段  $\Delta l$  上, 上式右边两项的积分大小相等符号相反, 结果  $\Delta l$  上的线积分之和等于零。因此, 上等式右边两项之和等于矢量  $\mathbf{F}$  沿  $l$  的积分  $\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 。以此类推, 对周界为  $l$  的任意面积  $S$ , 都可以分割成  $n$  个小面积, 沿这些小面积周界的线积分总和一定等于沿  $l$  的线积分

$$\sum_{i=1}^n (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \Delta S_i = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-46)$$