计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行　苏维宜　任福贤

上海科学技术出版社

计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行　苏维宜　任福贤

上海科学技术出版社

计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行 苏维宜 任福贤

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.75 字数 216000

1983 年 4 月第 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 1— 9,000

统一书号：13119 1063　　定价：(科四) 0.91 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

目　　录

引　　言 ……………………………………………………1
第1章　预备知识 ……………………………………………9
§1　二进制数的伪加法，Gray 码 …………………………9
§2　直交函数系 ……………………………………………16
§3　p 进群及其特征群 …………………………………23
§4　实变函数论中的一些结果 ……………………………32
习题 …………………………………………………………37
第2章　Walsh 函数及其性质 ……………………………38
§1　Rademacher函数 ……………………………………38
§2　Walsh 函数的定义 ……………………………………44
§3　Walsh 函数的性质 ……………………………………52
§4　按 Walsh 函数的展开 …………………………………58
§5　逼近定理 ………………………………………………76
§6　Walsh 函数的其他定义 ………………………………89
§7　二元 Walsh 函数 ………………………………………97
习题 …………………………………………………………103
第3章　有限 Walsh 变换 …………………………………107
§1　W 函数的生成 ………………………………………107
§2　W 矩阵 ………………………………………………118
§3　有限 W 变换 …………………………………………122
§4　Hadamard 矩阵与 Hadamard 变换 …………………131
§5　二进 W 矩阵 …………………………………………141
习题 …………………………………………………………144

第 4 章　Walsh 系与三角系的比较 ……………………145
§1　基本性质的比较 ……………………145
§2　频率与列率 ……………………155
§3　振幅谱与功率谱 ……………………156
§4　循环移位与二进移位 ……………………163
§5　循环卷积与二进卷积 ……………………171
§6　导数与逻辑导数 ……………………179
§7*　逻辑积分 ……………………183
习题 ……………………191
第 5 章　快速 Walsh 变换与 Walsh 函数的某些应用 ……192
§1　*W* 变换与 *H* 变换的关系 ……………………192
§2　快速 *H* 变换（FHT） ……………………207
§3　应用概况。*W* 函数发生器 ……………………227
§4　*W* 函数的几点应用 ……………………231
习题 ……………………240
第 6 章　Walsh 变式及其性质 ……………………242
§1　伪乘与广义 *W* 函数 ……………………242
§2　*W* 变式 ……………………247
§3　逻辑导数及其 *W* 变式 ……………………256
§4　例题。*W* 变式表 ……………………263
§5*　乘法直交核 ……………………274
§6*　一类极值问题 ……………………287
习题 ……………………298
参考文献 ……………………299
索　引 ……………………301

附注：有 * 号的章节为理论性稍深的内容，初读时可略去。

引　言

Walsh 函数是美国数学家 J. L. Walsh 于 1923 年引进的[24]，每个函数仅取 +1 与 -1 两值，图形呈方波形，它们的全体构成单位区间 [0,1) 上的完整标准直交系。这个系的性质与三角系颇为相似，例如奇偶性、零点个数、直交展开、Parseval 公式等等，加之方波明显地反映脉冲系统的特点，因此在应用上 Walsh 函数系十分吸引人。1922 年德国数学家 H. Rademacher 已得到 Rademacher 函数系[18]，它虽然有许多类似的特性，但不是完整的直交系，而仅是 Walsh 函数系的一个真子集。

Walsh 函数系原是依所谓列率排序的，S. Kaczmarz[11]后来也使用这一顺序，人们常称为 Walsh-Kaczmarz 序。近来 H. F. Harmuth 又依奇偶性将它们分为 Cal（来自 Cosine-Walsh）与 Sal（来自 Sine-Walsh）两类函数[10]，为工程技术上所常用。1931 年 R. E. A. C. Paley[15] 利用 Rademacher 函数与数的二进表示，建立了 Walsh 函数系的另一种顺序，即自然序。两种顺序的联系可以通过 Gray 码得到，这是由 F. Pichler 给出的。

定义 Walsh 函数的方法有很多种，例如利用递推公式、Hadamard 矩阵以及对称方法等等。

关于 Walsh 级数（Walsh-Fourier 级数）的收敛性、求和法等性质，除了 Walsh 自己与 Paley 以外，后来还有 S. Kaczmarz 与 H. Steinhaus[20]、S. Yano[26—27] 与 G. M. Morgenthaler[14] 等的研究。

1949—1950 年 N. J. Fine[8-9] 引进了 Walsh 变式，特别是他把 Walsh 函数与一个可换二进群的特征联系起来，利用 Haar 积分作为工具，揭示了在群上讨论这种函数系的方向。1955 年 N. E. Chrestenson[7] 把 Walsh 函数系推广到整数 $p>2$ 情形，同年 R. G. Selfridge[19] 把广义 Walsh 函数推广到 p 进群情形。

另一方面，用 Walsh 多项式作最佳逼近的文章也相继出现，如 S. Yano[25], V. M. Kokilasvili[13], C. Watari[22-23] 等，后者在七十年代初建立了相应的 Jackson 与 Bernstein 定理。

由于六十年代末七十年代初半导体技术与集成电路的快速发展，使 Walsh 函数的产生与应用有了物质基础，形成了发展的新阶段。引向电讯工程方面的首推 Harmuth[10]。此后被广泛地应用于信息论、线性系统论、通讯、电视等方面，而在雷达、计算机、遥测、光学等领域中的应用也在研究中。据 J. N. Bramhall[2] 在 1973 年的统计，从 1893—1972 年的 80 年中，有关 Walsh 函数的理论与应用的文章共 606 篇，其中 1960 年后发表的竟达 546 篇之多，并且应用方面几乎占 80%。Harmuth 是应用 Walsh 分析的大力提倡者。他曾说，预计 Walsh 分析的研究将引起一场革命，就象 17—18 世纪牛顿的微积分那样。

J. E. Gibbs 于 1969 年引进了定义在二进群上函数的逻辑导数概念，此后于 1973 年 P. L. Butzer 与 H. J. Wagner[3-5] 进一步讨论了逻辑导数的性质并应用到函数逼近的问题上。1976 年我们在讨论班里将逻辑导数概念推广到 $p>2$、基本集为 p 进局部紧群 $[0,\infty)$ 情形并且得到有关逼近论的结果，如 Bernstein 型定理，一个变分引理与一类极值问题的解[30-33]，

1979 年将某些结果推广到多元情形[34]，最近又得到有关逼近恒同核的一系列结果，这些便给 Walsh 分析的深入研究创造了条件。

本书将讨论 Walsh 函数的一些基本性质与应用，使读者能了解 Walsh 函数的特点并能独立地应用它们。对数学基础较好的读者也可以在某些课题上得到深入。下面将用几个例子提出一些有趣的现象，借以点明本书中某些论题。

首先考察 Rademacher 函数系(简称 R 系)。它是周期为 1 的标准直交系。系中的函数在 $[0,1)$ 上的定义如下：

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/2,\\ -1, & 1/2\leqslant x<1,\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\varphi_0(2x),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(2^n x),$$

$$\cdots\cdots$$

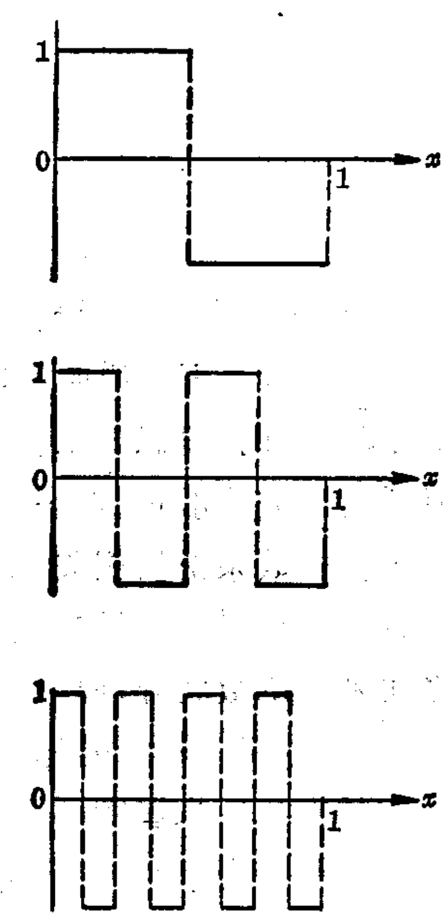

图 0.1

这是熟知的开关函数，首三个函数的图形如图 0.1 所示。显然，把常数 1 添加进去，所得的系 $\{1,\varphi_0,\varphi_1,\cdots\}$ 仍是 $[0,1)$ 上的标准直交系。现在令

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/4,\\ -1, & 1/4\leqslant x<3/4,\\ 1, & 3/4\leqslant x<1。\end{cases}$$

计算结果给出

$$\int_0^1 1\cdot f(x)dx=\frac{1}{4}(1-1-1+1)=0,$$

$$\int_0^1 \varphi_0(x)f(x)\,dx=\frac{1}{4}(1\cdot 1+1(-1)+(-1)(-1)+(-1)\cdot 1)=0。$$

一般地，当 $n\geqslant 2$ 时，注意到 $\varphi_{n-2}(x)=\varphi_0(2^{n-2}x)$ 与 1 的直交性，有

$$\int_0^1\varphi_n(x)\,f(x)\,dx=\int_0^{1/4}\varphi_0(2^n x)\,dx-\int_{1/4}^{3/4}+\int_{3/4}^1$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi_0\,(2^{n-2}t)\,dt-\frac{1}{4}\int_1^2-\frac{1}{4}\int_2^3+\frac{1}{4}\int_3^4=0。$$

这样，存在一个非零函数 f，它与系 $\{1,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots\}$ 中每个函数直交。这个事实说明，R 系是不完整的（完整性概念见第一章 § 2）。因而，要想表示任意的周期信号，只用 R 系是不行的。但开关函数的形状、性态非常引人注目，许多周期脉冲信号都与这种函数系密切相关，那么能否对它适当加以改造，使之确能表示任意周期信号？这就将引出 R 系的完整化问题以及随之而来的函数展开、收敛性等问题。读者将会看到，Walsh 函数系（简称 W 系）正是这种完整化的结果。

其次我们来看图 0.2 中的各种格子图案，可以用它们的适当组合来表示“工”字。图中带有阴影的位置算作 +1，空白的算作 −1。表示的方法是，将 1—8 号的图案代表的二元函数依次记成 $u_1(x,y)$，$u_2(x,y)$，$\cdots$，$u_8(x,y)$，并分别乘上系数 4，12，−4，4，4，−4，−4，4，然后相加，所得结果除以 16 便得到函数 $f(x,y)$，它代表图中的“工”字：

$$f(x,y)=\frac{1}{16}\{4u_1(x,y)+12u_2(x,y)-4u_3(x,y)+4u_4(x,y)+4u_5(x,y)-4u_6(x,y)$$

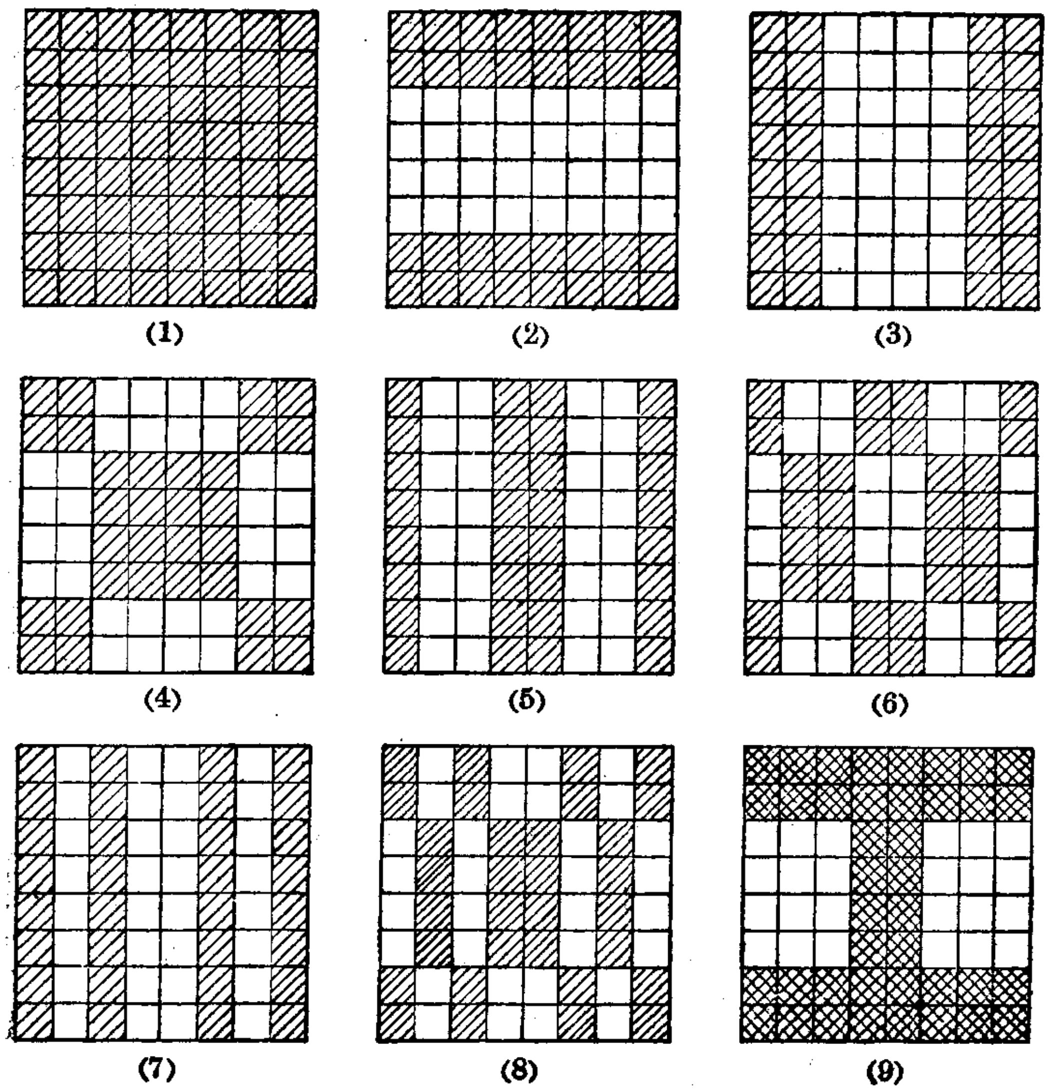

图 0.2

$$-4u_7(x,y)+4u_8(x,y)\}。$$

这些图案中的函数与我们的 W 函数有什么关系，怎样通过它们显示出所需的图象？此外，当某种电讯号给出后如何通过W函数进行传输？读者可以在第二章的末尾找到问题的答案。

最后我们提一下W系与三角系的一些类似之处。Harmuth 曾将列率序二进W系 $\{wal_s(x)\}$ 依奇偶对称性分成两组：

$$\mathrm{cal}_0(x),\ \mathrm{cal}_1(x),\ \cdots,\ \mathrm{cal}_n(x),\ \cdots,\ wal_{2k}(x)=\mathrm{cal}_k(x);$$
$$\mathrm{sal}_1(x),\ \mathrm{sal}_2(x),\ \cdots,\ \mathrm{sal}_n(x),\ \cdots,\ wal_{2k-1}(x)=\mathrm{sal}_k(x),$$

它们正好与余弦函数、正弦函数分别相应。并且周期为 1 的信号 $f(x)$ 可以展成象 Fourier 级数那样的级数：

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\mathrm{cal}_n(x)+b_n\mathrm{sal}_n(x)\},$$

其中

$$a_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{cal}_n(x)dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$b_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{sal}_n(x)dx,\quad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

在W系中，有类似于三角系的乘法公式：

$$\mathrm{cal}_m(x)\mathrm{cal}_n(x)=\mathrm{cal}_{m\oplus n}(x),$$
$$\mathrm{sal}_m(x)\mathrm{cal}_n(x)=\mathrm{sal}_{(m-1)\oplus n+1}(x),$$
$$\mathrm{sal}_m(x)\mathrm{sal}_n(x)=\mathrm{cal}_{(m-1)\oplus(n-1)}(x),$$

这里记号 $\oplus$ 表示数的伪加运算(参看第一章 § 1)。两个系的详细比较将在第四章中给出。这里我们仅提出一个较有趣的问题。大家知道，余弦函数、正弦函数可微分任意多次，但这种微分运算对 cal、sal 函数引起的结果是一切化为零。看来牛顿首创的微积分对这种函数系很难保持神圣的力量。那么，W函数能否进行“微分”呢？读者将会看到，如果引进一种新的“导数”概念，这种方波函数也可以进行微分运算。这时有

$$D^{(1)}\{wal_k(x)\}=kwal_k(x),$$

对 $wal_k(x)$ 求一阶“导数”相当于乘以序号 k。这与普通导数公式

$$D\{e^{ikx}\}=ike^{ikx}$$

颇为类似。事实上这种“导数”在 Walsh 分析中将扮演一个极为重要的角色。

上述两种函数系的类似性是表面上的，还是带有实质性的？怎样引进新的“导数”概念？它有什么新的特点？读者欲知道它的解答，可阅读第四、第六章的论述。

Walsh 分析与应用是近二、三十年才发展起来的。从 Walsh 发表他的开创性文章[24]算起，距今还不到 60 年，现在正显示出年轻的生命力，以新的姿态活跃在科技领域中。可以期望，在理论与应用两方面它将为人们展现更为广阔的前景。

关于沃尔什(Walsh)函数的理论与应用，材料很多，大部分散见于各种杂志与会议录之中，从数学的观点写成一本书尚不多见。本书希望能作为计算数学、数学、物理专业高年级大学生、研究生的读物，其中基本内容部分也可供应用数学工作者、工程技术人员参考。

本书共分六章。第一章是预备知识，§3 初读时可以略去，§4 列举的结果便于读者查阅。第二章介绍 Walsh 函数及其性质，包括逼近定理与 Walsh 函数系完整性的证明，这章是全书的理论基础。第三章是有限 Walsh 变换，给出W矩阵、H矩阵以及它们之间的关系，为以后讲快速W变换做准备。在已讲内容的基础上，把 Walsh 函数系与三角系的比较列入第四章，这里还特别介绍了逻辑导数与逻辑积分概念。第五章是快速W变换及应用，给出快速算法与证明，所述应用则是较简单的，目的是使读者有个初步了解。最后一章讨论无限区间上 Walsh 变式，引进一般逻辑导数概念及其性质，还给出简单的 Walsh 变式表，以便读者能对 Walsh 变式与 Fourier 变式作简单的对照。§5 与 §6 的内容较为困难，是为有特殊兴趣的读者安排的。书中介绍的某些内容是作者自己的工作，详见书末参考文献。每章末附有少量习题，借以帮助了解

内容。对于只打算初步了解 Walsh 函数的读者及一般工程技术人员，可以在看完引言与第一章 § 1、§ 2 之后，接着读第二章 § 1—§ 4、§ 7，然后阅读第三章、第四章的 § 1—§ 6，第五章以及第六章的 § 1、§ 2、§ 4。

本书是在 1976 年与 1977 年的讲义基础上形成的，在教学中曾用过两次。作者衷心感谢程民德、徐利治、沈燮昌三位教授对本书初稿提出了许多宝贵的意见，作者还要感谢杨治、储宗正二位先生，他们为本书提供了应用部分的材料。我们热忱欢迎广大读者对本书提出建议与批评。

作　者　1980 年 1 月于南京

第 1 章

预备知识

Walsh 函数系 (W 系) 是基本区间 $[0, 1)$ 上的完整标准直交系，它与三角系很类似。如果读者对三角系比较熟悉，不妨利用它来帮助学习W系。本书将尽量做到内容上自给自足。这样，即使读者不大熟悉三角系的知识，也可以顺利阅读。在定义W函数时，需要数的二进表示、Gray 码、直交系等预备知识，下面就来介绍它们。为了对W系有进一步的了解，还简要地介绍群及其特征群的概念。在最后一节中，我们收集了书中用到的有关实变函数论的一些结果。

§1 二进制数的伪加法，Gray 码

首先介绍数的二进表示与伪加法。设α是一个非负实数，我们可以将它写为二进表示：

$$\alpha=(\alpha_{-(N-1)}\alpha_{-(N-2)}\cdots\alpha_{-1}\alpha_0;\ \alpha_1\alpha_2\cdots), \tag{1.1}$$

其中$\alpha_j(j=-N+1, -N+2, \cdots)$为 0 或 1。也可以把$\alpha$写为依 2 的乘幂展开的级数：

$$\alpha=\sum_{j=-N+1}^{\infty}\alpha_j 2^{-j}。 \tag{1.2}$$

由 (1.2) 可见，α_j 中带有非正足标的数字对应于α的整数部分，而带有正足标的数字对应于α的小数部分，两者之间用分号隔开。有时也把α简写为$\alpha=(\alpha_j)$。

二进制数可分为二进有理数与二进无理数两类。一个实

数，它的二进表示中若从某位数字开始全是0或全是1的，称为**二进有理数**，其余的数称**二进无理数**。例如，$\frac{1}{2}$有表示$(0;1000\cdots)$或$(0;0111\cdots)$，$\frac{5}{8}$有表示$(0;101000\cdots)$或$(0;100111\cdots)$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$都是二进有理数。而$\frac{1}{3}=(0;010101\cdots)$与$\pi$等都是二进无理数。在二进有理数的表示中，从某位数字开始全是0的，称为**有尽表示**，这时在写法上可以将这些0略去。对于二进有理数，本书恒采用有尽表示。例如，$\frac{1}{2}=(0;1)$，$\frac{5}{8}=(0;101)$。容易看出，若α是二进无理数，它的二进表示中一定出现无穷多个0与无穷多个1。

负数的二进表示为它的绝对值的表示添上负号。

今后将一个数写成二进表示时，总是用一圆括号括起来，并且对于整数，我们略去小数点处的分号。例如，$19=(10011)$，$6.75=(110;11)$。

Walsh-Fourier 分析简称为 ***W* 分析**。其中最基本的一种运算是二进制数的伪加法。伪加运算用记号$\oplus$表示。两个元的集$\{0,1\}$上的**基本伪加运算**规定如下：

表 1.1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$0\oplus0=0,$$
$$0\oplus1=1,$$
$$1\oplus0=1,$$
$$1\oplus1=0,$$

亦即，同数伪加得0，异数伪加得1，参看表1.1。

在一般情形，两个非负实数$\alpha=(\alpha_j)$，$\beta=(\beta_j)$的**伪加**定义为

$$\alpha\oplus\beta=(\alpha_j\oplus\beta_j)。\tag{1.3}$$

也就是，α与β的伪和$\alpha\oplus\beta$是这样的一个实数，它的二进表

示的第 j 位数字是 α、β 的二进表示的相应（第 j 位）数字的伪和。通常我们先求得 $\alpha\oplus\beta$ 的二进表示，然后再转换成十进制数。例如：

$$5\oplus7=(101)\oplus(111)=(010)=2,$$

$$10\oplus3=(1010)\oplus(0011)=(1001)=9,$$

$$14.5\oplus7.25=(1110;1)\oplus(111;01)$$

$$=(1001;11)=9.75。$$

注意，任意两数的伪加法与平常的模 2 加法意义不同。大家知道，依模 2 加法，$5+7=0\ (\mathrm{mod}\,2)$，而 $5\oplus7=2$。但限制在基本集 $\{0,1\}$ 中时，两者结果是相同的。

不难验明，一切非负数的集合，对伪加运算构成一个 Abel 群，参见本章 § 3。

现在我们来介绍非负整数的 Gray 码，这在以后定义 W 函数时要用到。设 k 为非负整数，它的二进表示为

$$k=(k_{-N+1}k_{-N+2}\cdots k_0)。\tag{1.4}$$

把它看成一个 N 维向量。先写出 $N+1$ 维向量 $(0\ k_{-N+1}\ k_{-N+2}\cdots k_{-1}\ k_0)$，再将每相邻两个分量进行伪加得一 N 维向量 $(0\oplus k_{-N+1}\ \ k_{-N+1}\oplus k_{-N+2}\cdots k_{-1}\oplus k_0)$。它就是 k 的 **Gray 码**，记成 $G(k)$：

$$G(k)=(k_{-N+1}\ k_{-N+1}\oplus k_{-N+2}\cdots k_{-1}\oplus k_0)。\tag{1.5}$$

由于 $(0\ k_{-N+1}\cdots k_{-1})=[k/2]$，这里 $[\ ]$ 表示数的整数部分，故 k 的 Gray 码也可以写成公式：

$$G(k)=k\oplus[k/2]。\tag{1.6}$$

反之，如果知道了某个整数 k 的 Gray 码

$$G(k)=(k'_{-N+1}\ k'_{-N+2}\cdots k'_0)\equiv k',\tag{1.7}$$

则可以证明，$k=(k_{-N+1}\cdots k_0)$ 的各位数字由公式

$$k_{-j}=k'_{-N+1}\oplus k'_{-N+2}\oplus\cdots\oplus k'_{-j},\tag{1.8}$$