高等数学的理论和习题

M. R. SPIEGEL 著

高等数学的理论和习题

M. R. 施皮格尔 著

谢国瑞 蒋司勋 宣月华 杜庆琪 李昌文 译

上海科学技术出版社

SCHAUM'S OUTLINE OF

THEORY AND PROBLEMS OF ADVANCED MATHEMATICS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS

By

Murray R. Spiegel

McGraw-Hill Book Company 1971

高等数学的理论和习题

M. R. 施皮格尔　著

谢国瑞 蒋司勋 宣月华 杜庆琪 李昌文　译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16　印张 28.5　字数 680,000

1978年10月第1版　1978年10月第1次印刷

印数 1—250,000

书号：13119·728　　定价：2.30 元

译　序

现在，科技工作者往往感到有扩展自己原有数学基础知识的必要，为便于广大科技工作者参考或自学有关的数学课题，我们将国外一套纲要式的丛书 (Schaum's Outline Series) 中 M. R. 施皮格尔编的«Advanced Mathematics for Engineers & Scientists» 一书译出，供读者作一般参考或自学之用.

原书计划作为实用数学方法的参考书或教材，取材涉及的面较宽（见原序），各章的内容除了某些章次间的联系较紧密外，大都具有相对的独立性，这就使本书能较好地适应多方面读者的需要. 读者可按实际需要的顺序选学或参考有关内容. 原书的编写方式也与一般的同类书籍有所不同，各章除了都在第一节介绍内容梗概，便于读者一目了然地抓住主要内容外，许多实质性的内容都以解答问题的形式出现在第二节里. 各章的第三节主要是供读者复习巩固用的练习题（计算题大都附有答案）.

本书是我们在假期中赶译出来的，参加工作的有：谢国瑞（第一、十二、十五、十六章），蒋司勋（第二、三、十三、十四章），宣月华（第四、七、八章），杜庆琪（第五、六章），李昌文（第九、十、十一章）. 谢国瑞同志最后整理了全书的译稿.

在翻译过程中，我们对原书就已发现的错、漏及不妥之处作了必要的修改（所附的答案未及全部校验），由于这种地方不少，故一般都未另作说明. 为便于译名的统一，本书中的译名主要参照有关的手册、词典，个别按照习惯用法. 书末附有人名对照表，以资查阅. 为读者方便，我们对原书增加了节、段的编号，如引证 §5.1.7，意即引证第五章 §5.1 中的第7段的内容.

由于时间仓促、译者水平有限，译文中难免还有不少错误缺点，热诚欢迎批评指正.

译　者 1977 年 9 月

原　序

近年来，工程师和科学工作者所需要用到的数学课题的数目有了很大的增长．这是预料之中的，因为在将涉及科学与工程的问题列成公式并求解时，数学作为语言起着重要的作用．而当问题愈益复杂时，解决这种问题所要用到的数学方法自然也将更多、更复杂．

本书提供的重要高等数学概念和方法，既是工程师和科学工作者所需的，同时也是数学工作者在关心自己研究领域的应用中所需的．本书可以作为所有通用的标准教本的补充读物，或者也可作为工程与科学中的数学方法正式课程的教科书．

每章开头都对有关的定义、原理、定理加以清楚地叙述，并有说明的例题及其他描述性的材料．接着是按不同类型分组的已解出的问题及补充题．已解出的问题是用来对理论作说明及进一步引伸，促使突出主要之点．若不这样做的话，可能读者会仍然觉得自己没有掌握．为了有效地学习，对基本原理作必要的重复是十分重要的，故而一些定理的证明和基本结果的推导包括在已解出的问题之中．大多数的补充题都用来复习每章所讲的内容及作出可能的推广．

本书讨论的课题包括常微分方程、拉普拉斯变换、向量分析、傅里叶级数、傅里叶积分、Γ-函数、B-函数和其他特殊函数、贝塞尔函数、勒让德和其他正交函数、偏微分方程、复变数与保角映射、矩阵和变分法等．第一章对代数、三角、解析几何及微积分的基本概念作了复习，这可以按照读者的实际情况或者一开始就读它或者在用到时再去参考．

考虑到本书比大多数教程包括了更多的材料，这就使得本书更加灵活，它既提供了一本有用的参考书，同时也可进一步提高读者对所论课题的兴趣．

利用这个机会，我要表示对 D. 肖姆，N. 蒙迪和 H. 海登的得力的合作表示感谢．

M. R. 施皮格尔
于伦塞利尔工学院　1971 年 1 月

目　录

第一章　基本概念复习

§1.1　基 本 内 容

1. 实数

对象的集合或总合的概念在数学中是非常基本的,特别是数的集合,是科学和工程中定量工作的基础. 大家已经熟悉的有下列这些重要的数集.

(1) **自然数** 1, 2, 3, 4, ……也称为正整数,被用于计数.

(2) **整数** 0, ±1, ±2, ±3, ……,产生这些数是由于要使任何两个自然数的减法(加法的逆)有意义. 于是 $2-6=-4$, $8-8=0$, 等等.

(3) **有理数**例如 $\frac{2}{3}$, $-\frac{10}{7}$, 等等. 产生这些数是由于要使任何两个整数的除法(乘法的逆)或商有意义(以零为除数是没有定义的,这情形应除外).

(4) **无理数**例如 $\sqrt{2}$, π, 等等. 这种数不能表述成两个整数之商.

注意,自然数集合是整数集的一部分,即一个子集,而后者又是有理数集合的一个子集.

有理数及无理数的数集称为实数集合(以区别于后面要讲的虚数或复数),它是由正数、负数和零组成. 实数可以用直线上的点来表示,如图 1-1 所示. 正是这个原因,我们常把点和数混同使用.

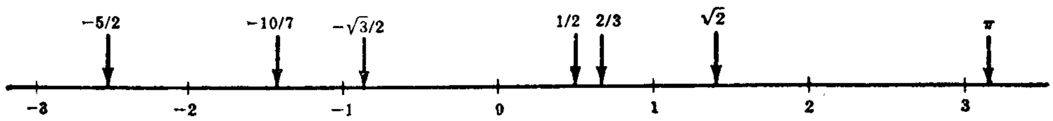

图 1-1

大家也已熟悉了不等式的概念. 因而若 $a-b$ 是正数或负数,我们就分别讲实数 a 大于或小于 b (用记号 $a>b$ 或 $a<b$ 表示). 对任何两个实数 a 和 b, 在 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 这三者之中必有一个成立.

2. 代数运算法则

若 a, b, c 是任何实数,则下列代数运算法则成立.

(1) $a+b=b+a$　　加法交换律.

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$　　加法结合律.

(3) $ab=ba$　　乘法交换律.

(4) $a(bc)=(ab)c$　　乘法结合律.

(5) $a(b+c)=ab+ac$　　分配律.

从这些法则出发（如果把它们作为公理或公设的话），我们能证明通常的符号法则，如 $(-5)(3)=-15$，$(-2)(-3)=6$，等.

大家也熟悉通常的指数运算法则：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad(a\neq 0),\quad (a^m)^n=a^{mn}. \tag{1-1}$$

3. 函数

另一个重要概念是函数. 函数 f 是一个法则，它对集合 A 的每个对象 x（称为元或元素），指定集合 B 的一个元素 y. 我们用 $y=f(x)$ 来指明这个对应关系，其中 $f(x)$ 称为函数在 x 的值.

例 1. 若 $f(x)=x^2-3x+2$，则 $f(2)=2^2-3(2)+2=0$.

大家也已熟悉了"函数作图"的方法，那就是取一些数对 (x, y) 并把它们看作 xy 坐标系中的点而描出. 一般说来，$y=f(x)$ 的图象是一条曲线. 因为 y 通常是由 x 决定的，所以有时称 x 是独立变数（自变数）而称 y 是应变数.

4. 常用的函数

(1) **多项式** $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ 设 $a_0\neq 0$，称 n 是这多项式的次数. 倘若把重根重复计数，则多项式方程 $f(x)=0$ 恰有 n 个根. 例如 $x^3-3x^2+3x-1=0$ 可以写成 $(x-1)^3=0$，所以这个方程的三个根是 1, 1, 1. 注意到我们这里已经利用了二项式定理

$$(a+x)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\cdots+x^n, \tag{1-2}$$

其中的二项式系数由下式给出：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1-3}$$

而 n 的阶乘是 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 1$，规定 $0!=1$.

(2) **指数函数** $f(x)=a^x$ 这种函数满足(1-1)给出的运算法则. 一个重要的特殊情形是 $a=e=2.7182818\cdots$.

(3) **对数函数** $f(x)=\log_a x$ 这种函数是指数函数的反函数，即若 $a^x=y$，则 $x=\log_a y$，其中 a 称为对数的底. 交换 x 与 y 就得 $y=\log_a x$. 若 $a=e$，就用 $\ln x$ 来记 $\log_e x$，称为 x 的自然对数，e 常被称为对数的自然底. 自然对数（或其他底的对数）满足的基本运算法则是

$$\left.\begin{aligned}\ln(mn)=\ln m+\ln n,\quad \ln\frac{m}{n}=\ln m-\ln n,\\ \ln m^p=p\ln m.\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

(4) **三角函数** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 这些函数之间的一些基本关系如下：

(a) $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\quad\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\quad\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$, $\quad\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\quad\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

(b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sec^2 x-\tan^2 x=1$, $\csc^2 x-\cot^2 x=1$.

(c) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$.

(d) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$,

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y}.$$

(e) $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$，其中 $\tan\alpha=\dfrac{A}{B}$.

三角函数都是周期的．例如，图 1-2、1-3 所示的 $\sin x$ 和 $\cos x$，它们的周期是 2π.

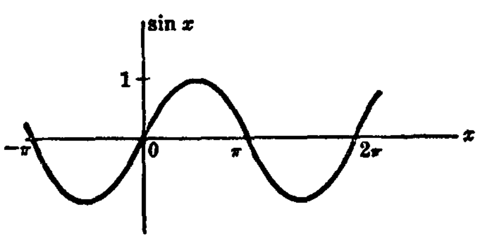

图 1-2

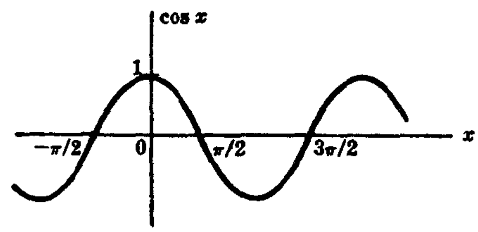

图 1-3

(5) **反三角函数** $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$ 这些函数是三角函数的反函数．例如，若 $\sin x=y$，则 $x=\sin^{-1}y$，或者交换 x 与 y 而成 $y=\sin^{-1}x$.

(6) **双曲函数** 这些函数用指数函数定义如下：

(a) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{1}{\tanh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,

$\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$, $\operatorname{csch} x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$.

类似于三角函数的一些基本恒等式是：

(b) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$, $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$.

(c) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cdot\cosh y\pm\cosh x\cdot\sinh y$,

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$,

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\cdot\tanh y}.$$

用 $\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$ 等给出的反双曲函数可用对数函数来表出（例如可见问题 1.9）.

5. 极限

若对任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到一个数 $\delta>0$，使得对任何适合 $0<|x-a|<\delta$ 的 x 成立 $|f(x)-l|<\varepsilon$，就说当 x 趋于 a 时函数 $f(x)$ 有极限 l，简记成 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

注意，$|p|$ 即 p 的绝对值，在 $p>0$ 时等于 p，在 $p<0$ 时等于 $-p$，在 $p=0$ 时等于 0.

例 2. $\lim\limits_{x\to1}(x^2-4x+8)=5$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

若 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=l_1$，$\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l_2$，则我们有下面的极限运算定理：

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\pm f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l_1\pm l_2$.

(b) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f_1(x)]\cdot[\lim\limits_{x\to a} f_2(x)]=l_1\cdot l_2$.

(c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$　(若 $l_2\neq 0$).

6. 连续

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，则称函数 $f(x)$ 在 a 点连续.

例 3. $f(x)=x^2-4x+8$ 在 $x=1$ 处连续. 然而若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 6, & x=2,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续(或间断)，并说 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x)$ 在一个区间(例如 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 或 $x_1<x\leqslant x_2$ 等)的每一点处都连续，就说 $f(x)$ 在这个区间内连续.

若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都在一个区间内连续，则 $f_1(x)\pm f_2(x)$，$f_1(x)f_2(x)$ 及 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (这里要 $f_2(x)\neq 0$) 也在这个区间内连续.

7. 导数

$y=f(x)$ 在点 x 的导数定义为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}, \tag{1-5}$$

只要这个极限是存在的；其中 $h=\Delta x$，$\Delta y=f(x+h)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

$y=f(x)$ 的微分定义为

$$dy=f'(x)dx,\quad 其中\ dx=\Delta x. \tag{1-6}$$

求导数的过程称为微分法. 取 $y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ 的导数就能得到二阶、三阶及高阶导数，分别表示为 $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$，$y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$，等等.

几何上看来，函数 $f(x)$ 在一点的导数表示了曲线 $y=f(x)$ 在该点的切线的斜率.

如果函数在一点有导数，则这函数在该点必连续. 然而，反过来不一定成立.

8. 微分法公式

下面的 u、v 表示 x 的函数而 a、c、p 表示常数. 当然，我们假定 u 和 v 的导数是存在的，亦即假定 u 和 v 是可微的.

(1) $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$,　　(2) $\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$,

(3) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$,

(4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$,

(5) $\frac{d}{dx}u^p=pu^{p-1}\frac{du}{dx}$,

(6) $\frac{d}{dx}(a^u)=a^u\ln a\frac{du}{dx}$,

(7) $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$,

(8) $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$,

(9) $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$,

(10) $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$,

(11) $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$,

(12) $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$,

(13) $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\cdot\tan u\frac{du}{dx}$,

(14) $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cdot\cot u\frac{du}{dx}$,

(15) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

(16) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

(17) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(18) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=\frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(19) $\frac{d}{dx}\sinh u=\cosh u\frac{du}{dx}$,

(20) $\frac{d}{dx}\cosh u=\sinh u\frac{du}{dx}$.

特别，当 $u=x$ 时，因 $\frac{du}{dx}=1$，所以上列公式可被简化.

9. 积分

若 $\frac{dy}{dx}=f(x)$，则称 y 是 $f(x)$ 的一个不定积分或反导数，记为

$$\int f(x)dx. \tag{1-7}$$

因为常数的导数是零，所以 $f(x)$ 的所有不定积分只能相差一个常数.

$f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的定积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to0}h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)], \tag{1-8}$$

倘若这个极限是存在的话. 几何上看，若 $f(x)\geqslant0$，这定积分就表示位于曲线 $y=f(x)$ 下方、由 x 轴、$x=a$ 和 $x=b$ 所界的一块面积. 如果 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续，则积分存在.

定积分和不定积分由下面的定理所联系.

定理 1-1(微积分基本定理) 若 $f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{d}{dx}g(x)dx=g(x)\Big|_a^b=g(b)-g(a).$$

例 4. $\int_1^2 x^2dx=\int_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}$.

求积分的过程称为积分法.

10. 积分法公式

下面的 u 和 v 表示 x 的函数而 a、b、c、p 表示常数. 在所有公式中我们都省写了应该有的积分常数.

(1) $\int(u\pm v)\,dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx$, (2) $\int cu\,dx=c\int u\,dx$,

(3) $\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)dx=uv-\int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ 或 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$, 这称为分部积分法,

(4) $\int F(u)\,dx=\int F(w)\,\frac{dw}{w'}$, 其中 $w=u(x)$ 且 $w'=\frac{dw}{dx}$ 被表示为 w 的函数, 这称为换元(或变换)积分法,

(5) $\int u^p\,du=\frac{u^{p+1}}{p+1}\quad(p\neq-1)$, (6) $\int u^{-1}\,du=\int\frac{du}{u}=\ln|u|$,

(7) $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}\quad(a>0,\ a\neq1)$, (8) $\int e^u\,du=e^u$,

(9) $\int\sin u\,du=-\cos u$, (10) $\int\cos u\,du=\sin u$,

(11) $\int\tan u\,du=-\ln|\cos u|$, (12) $\int\cot u\,du=\ln|\sin u|$,

(13) $\int\sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|$, (14) $\int\csc u\,du=\ln|\csc u-\cot u|$,

(15) $\int e^{au}\sin bu\,du=\frac{e^{au}(a\sin bu-b\cos bu)}{a^2+b^2}$,

(16) $\int e^{au}\cos bu\,du=\frac{e^{au}(a\cos bu+b\sin bu)}{a^2+b^2}$,

(17) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{a}$, (18) $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$,

(19) $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})$, (20) $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})$,

(21) $\int\sinh u\,du=\cosh u$, (22) $\int\cosh u\,du=\sinh u$.

11. 序列和级数

用 u_1, u_2, $\cdots$或简单地用 $\langle u_n\rangle$ 所表示的序列是个定义在自然数集合上的函数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个数 $N>0$, 使得对所有的 $n>N$, 成立 $|u_n-l|<\varepsilon$, 则称序列以 l 为极限或收敛于 l. 这时我们写 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$. 如果序列不收敛,我们就说它是发散的.

考虑序列 u_1, u_1+u_2, $u_1+u_2+u_3$, $\cdots$,或 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, 其中 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. 我们称 $\langle S_n\rangle$ 是序列 $\langle u_n\rangle$ 的部分和序列. 符号

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\quad\text{或}\quad\sum_{n=1}^{\infty}u_n\quad\text{或简记为}\quad\sum u_n\tag{1-9}$$

规定作为 $\langle S_n\rangle$ 的同义语而称为无穷级数. 按照 $\langle S_n\rangle$ 的收敛或发散而说这个级数是收敛的或发散的. 若 $\langle S_n\rangle$ 收敛于 S, 就说 S 是这个无穷级数的和.

下面是一些有关无穷级数的重要定理.

定理 1-2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散。

定理 1-3 若 $\sum|u_n|$ 收敛且 $|v_n|\leqslant|u_n|$, 则 $\sum|v_n|$ 收敛。

定理 1-4 若 $\sum|u_n|$ 收敛,则 $\sum u_n$ 收敛.

这时我们说 $\sum u_n$ 的收敛是绝对的,或称它为*绝对收敛*. 这种级数的一个性质是可以重新安排它各项的顺序而不影响它的和.

定理 1-5 若 $\sum|u_n|$ 发散且 $|v_n|\geqslant|u_n|$, 则 $\sum|v_n|$ 发散[注 1]。

定理 1-6 设 $|u_n|=f(n)\geqslant 0$, 则当积分

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx$$

存在时,级数 $\sum|u_n|$ 收敛,否则 $\sum|u_n|$ 发散[注 2]。

这个定理常称为*积分检验法*.

定理 1-7 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$, 则级数 $\sum|u_n|$ 发散, 然而在 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ 时级数既可能收敛,也可能发散.

定理 1-8 设若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=r$, 则级数 $\sum u_n$ 在 $r<1$ 时(绝对)收敛, $r>1$ 时发散. 若 $r=1$, 则不能作出结论.

这个定理常称为*比率检验法*.

上面这些概念也可以推广到 u_n 是 x 的函数的情形,这时 u_n 被表示成 $u_n(x)$. 在这种情形,序列或级数将按 x 的特定值而收敛或发散. 使得序列或级数收敛的 x 值的集合称为*收敛区域*并用 $\mathscr{R}$ 来表示.

例 5. 若我们限定 x 只取实数值,则级数 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 的收敛区域(这时是一个区间)由 $-1<x<1$ 给出.

12. 一致收敛

若对给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个数 N (这个数一般同时依赖于 ε 和 x), 使得对任何 $n>N$, 成立 $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$, 则我们就可说 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 在区域 $\mathscr{R}$ 内收敛于和 $S(x)$, 这里 $S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$. 若能够找到只依赖于 ε 而不依赖于 x 的 N, 我们就说级数在 $\mathscr{R}$ 内*一致地*收敛于 $S(x)$. 一致收敛级数有许多重要的优越性质, 见下面的定理.

定理 1-9 若 $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续,且 $\sum u_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续.

定理 1-10 若 $\sum u_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛于 $S(x)$, 且 $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 可积, 则

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b[u_1(x)+u_2(x)+\cdots]dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\cdots.$$

定理 1-11 若 $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续且有连续的导数, 且若 $\sum u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$ 而 $\sum u_n'(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛, 则

[注 1] 原书中此句为"则 $\sum|v_n|$ 和 $\sum v_n$ 都发散", 其中 $\sum v_n$ 发散这一点在一般情况下是不成立的. ——译注

[注 2] 一般讲这个结论未必正确,但当 $f(x)$ 是单调连续函数时此结论一定成立. ——译注