

CT 原理与算法

庄 天 戈

上海交通大学出版社

(沪)新登字 205 号

内 容 简 介

本书介绍 X-CT、核磁共振 CT 的概念、原理及常用算法。主要包括从投影重建图像的概念、反投影的概念与算法,滤波反投影的概念与算法、迭代重建算法(包括 ART、SIRT)以及衍射图像重建,核磁共振 CT 和常用的二维傅立叶变换(2DFT)算法等。本书的论述既注意数学推证,更强调物理概念。全书共分七章,外加两个附录;各章均附有习题。本书可作为生物医学工程与仪器专业高年级学生或研究生的教学参考书,也可供有志于从事 CT 理论与应用研究工作者的入门参考。

CT 原理与算法

出版:上海交通大学出版社

(淮海中路 1984 弄 19 号)

发行:新华书店上海发行所

印刷:江苏太仓印刷厂

开本:787×1092(毫米) 1/16

印张:10

字数:245000

版次:1992年7月 第1版

印次:1992年8月 第1次

印数:1—1480

科目:274-320

ISBN 7-313-01052-4/TH·77

定价:3.00 元

前 言

本书是根据编著者自1984年以来对上海交通大学历届生物医学工程及仪器专业本科生、研究生所开“CT原理”、“投影图像重建基础”等课程的讲稿、讲义、结合文献资料整理而成。着重讲解透射型CT与核磁共振CT的概念、原理与算法,兼论衍射源断层成像。

本书共分七章,前五章着重介绍从投影重建图像的概念和几种常用算法,其中包括反投影重建算法,滤波反投影重建算法(平行射束,扇束),迭代重建算法。迭代重建法中仅介绍基本的ART和SIRT算法。对于圆谐波分解算法以及其他一些迭代算法本书一概从略。原因之一是篇幅有限。原因之二是这些算法不太常用。第六章简单介绍衍射断层成像,着重证明了弱散射情况下的衍射投影定理,以与第三章中的投影定理相呼应。本章还结合衍射成像,介绍了直接傅立叶反变换重建算法。第七章叙述核磁共振CT的原理。本章以原理为主,并着重介绍了常用的2DFT算法。编者深信,讲到的算法已足以概括常用的投影重建算法的精髓,并付诸实用。

本书力求与前导课程(如工程数学、信号与系统、数字信号处理)相衔接,把图像重建系统看成是一个等效系统,从系统理论的高度统一各种算法。另外,在注意数学推导的同时,对物理概念特别强调,以增加本书的可读性。对重要的算法还注意介绍有关实现细节,各章后面附有适量的习题,以加强本课程的实践性。我们希望读者阅读本书以后,对CT的数学原理,各种算法的物理概念,以及计算机模拟等方面都有所了解,为进一步阅读文献,研究开发新的算法打下基础。

书末附有两个附录。附录A为“真投影数据的模拟”,作为进行算法研究的参考。附录B为书中用到的一些数学知识的备考。以协助读者顺利阅读本书。

由于迄今为止,国内尚无一本适合教学的CT方面的教材,国外的著作由于其写作的背景不同,可读性与可教性都不够。因此,要在浩瀚的文献、资料中汲取精华、丢其糟粕、编一本适合国情的教材,深感并非易事。编者虽尽了最大努力,但因学识有限,时间仓促,错误在所难免,敬希读者不吝指正。

庄天戈

1992年1月于上海交通大学

目 录

第一章 绪论	1
第一节 投影图像重建技术在医学成像中的地位.....	1
第二节 CT 的历史与展望.....	4
第三节 若干基本概念.....	8
第四节 经典断层成像术.....	16
习 题.....	21
第二章 从投影重建图像算法 I :反投影重建算法(累加法)	22
第一节 反投影重建算法的物理概念.....	22
第二节 反投影重建算法的数学描述.....	25
第三节 正弦图(sinogram).....	27
第四节 反投影重建算法的实现.....	28
习 题.....	29
第三章 从投影重建图像算法 II :滤波反投影重建算法	30
第一节 概述.....	30
第二节 投影定理.....	31
第三节 第一类滤波反投影-卷积反投影重建算法	34
第四节 第二类滤波反投影算法——Radon 反变换.....	36
第五节 平行射束卷积反投影重建算法的计算机实现.....	37
习 题.....	61
第四章 扇束投影重建	63
第一节 概述.....	63
第二节 等角射线产生的扇形数据的卷积反投影重建算法.....	64
第三节 等距射线产生的扇形数据的卷积反投影重建算法.....	68
第四节 重排算法.....	71
习 题.....	76
第五章 从投影重建图像算法 III :迭代重建算法	77
第一节 概述.....	77
第二节 迭代重建算法的基本问题.....	78
第三节 基本图像的选取.....	81
第四节 最优准则.....	84
第五节 ART	88
第六节 求解线性等式方程组的松弛法与 SIRT.....	93
第七节 ART、SIRT 与卷积反投影重建算法的比较.....	97
习 题	99
第六章 衍射断层成像	100

第一节 均匀媒质中的波动方程·····	100
第二节 非均匀媒质中的波动方程·····	103
第三节 衍射投影定理·····	104
第四节 重建算法·····	107
习 题·····	110
第七章 核磁共振成像：NMR—CT ·····	111
第一节 概述·····	111
第二节 核磁共振的物理基础·····	112
第三节 核磁共振的宏观理论·····	122
第四节 NMR成像方法 ·····	138
习 题·····	148
附录 A 真投影数据的模拟 ·····	149
附录 B 有关数学知识备考 ·····	150
参考文献 ·····	154

绪 论

第一节 投影图像重建技术在医学成像中的地位

影像技术一直是诊断疾病的重要手段，也是人们最早用于医学诊断的工程手段。其历史远比用心电图机诊断疾病的技术为早。1895年，德国人伦琴(W. Röntgen)在试验阴极射线管时发现了X射线。三天以后，伦琴的夫人偶然看到了手的X射线造影。从此就开创了用X射线进行医学诊断的放射学——X射线摄影术，也开创了工程技术与医学相结合的纪元。传统的X射线装置尽管在形态学诊断方面起了划时代的作用，但其缺点是明显的，主要有：

一、影像重叠

X射线装置是将三维景物显示在二维的胶片或荧光屏上，深度方向上的信息重叠在一起，引起混淆。见图1.1及图1.2。图1.1(a)说明胶片感光的差异可由相同的材料不等的厚度所造成，但也可能由相等厚度的不同材料所引起(图1.1(b))。图1.2说明在二维胶片平面上不能分辨肿块究竟在哪个深度上。

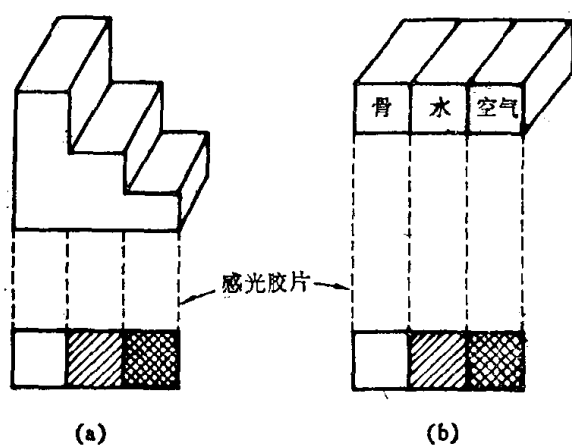


图 1.1 阐明传统的X射线装置缺点用图

- (a) 材料相同厚度不等造成感光差异
(b) 厚度相等材料不同造成感光差异

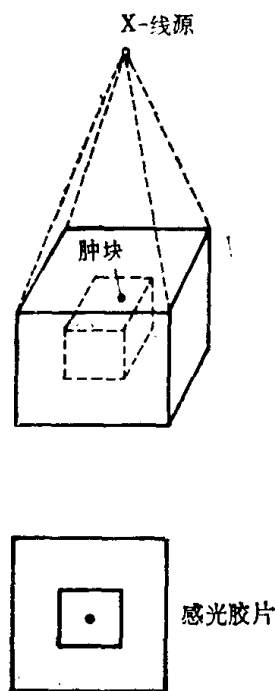


图 1.2 深度方向上的信息相互重叠

二、密度分辨力低

不能区分软组织的细节。一般说来，传统的X射线装置只能区别密度差别大的脏器，

例如充气的肺。对肝、胰等软组织内部的差异无法鉴别。某些脏器只能借助于不透 X 射线的造影剂才能显示。究其原因,对于 X 射线摄影来说是由于胶片的动态范围不大;对于 X 射线透视方法来说是由于肉眼在低亮度下分辨性能降低所致。

三、X 射线透视所用剂量较大并需在暗室内操作

近百年来,人们作了种种努力以期克服上述几个缺点。例如,1952 年发明了影像增强管。采用增强管可使 X 射线剂量在同样图像质量时降低到原来的十分之一,而影像的亮度却为普通荧光屏的数千倍。于是,有可能通过光导摄像机将影像转换到电视屏幕上,并在正常照明条件下观看图像。如此,克服了第三个缺点。但其他缺点依然存在。

四、胶片存储,检索困难

传统 X 射线图像都记录在感光胶片上,然后装袋存档,作一定时期的保存。例如美国加州有法律规定,成人的胶片需保存 7 年,儿童的胶片需保存到 18 岁。据统计,在住院的头 3—4 天内胶片要借还 10 次左右。余下的住院时间内,平均借还 4 次。出院的第一年内尚要借还 3 次。这样,频繁的借还,既费时间,又费人力,且容易乱架和丢失。另外,一张胶片供一人借用,不能多人共享。

为了克服第一个缺点(影像重叠),有所谓的经典断层成像术,又称 X 射线体层摄影术(详见下节)。它的基本原理于 1921 年由 Bocage 阐明。1936 年 В.И.ФЕОКТИТОВ 详细说明了该法的数学关系,并摄制了体层片。1939 年我国也制成了 X 射线体层摄影装置。其简单的工作过程是: X 射线源与感光胶片作相反方向的运动。运动轨迹可为直线,也可为圆、椭圆、正弦线、内摆线或其他适宜的曲线。这样,可使聚焦断面上的图像加强,而其他断面在胶片上形成的图像模糊。这称为运动模糊。借此可部分地克服深度方向上、聚焦平面以外各层图像引起的重叠干扰。这里强调“部分地克服”是因为“运动模糊”还会对聚焦断面的图像造成干扰。此外,由于仍然使用胶片作为显示图像的唯一手段,密度分辨力仍很低,检索困难亦依旧存在。

为了全面地解决传统 X 射线摄影装置的几个缺点,特别是解决深度方向上影像重叠与密度分辨力低的问题,得求助于“计算机断层成像术”(Computerized Tomography, 美国放射学界统一称为 Computed Tomography^[1], 中文译成“电算断层成像术”,均简称 CT)。

CT 的基本思想如下:

取一理想的 X 射线源,它发出极细的笔束 X 射线,在其对面置一检测器(图 1.3)。测出 X 射线源发出的强度 I_0 , 以及经过物体(例如头颅)衰减以后到达检测器的 X 射线强度 I , 再将 X 射线源与检测器在观察平面内(见图 1.4)同步平移一定步数 N_t 。每平移一步均作同样测量。如此取得一组数据。然后旋转一个小角度 $\Delta\phi$ (例如 1°), 再同步平移 N_t 步, 取得新角度下的另一组数据。如此重复,直至旋转 N_ϕ 次,作 $N_\phi \Delta\phi = 180^\circ$ 旋转,取得 N_ϕ 组数据而后止。

取得上述数据后如何求出所关心的物体内部断层图像?

先可假定物体是均匀的,物体对于 X 射线的线性衰减系数为 μ 强度为 I_0 的 X 射线行进 x 距离后,衰减至 I , 按 Beer 定理,有:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (1.1)$$

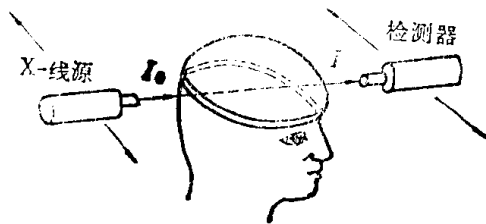


图 1.3 透射 X-CT 的发射源与检测器布置示意

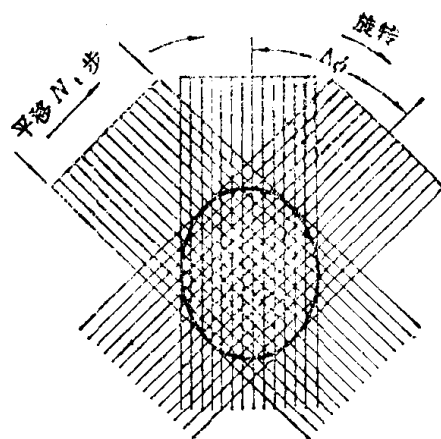


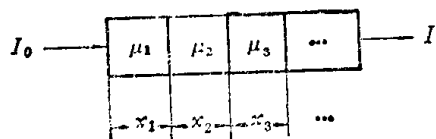
图 1.4 平移/旋转扫描方式示意

或

$$\mu x = \ln(I_0/I). \quad (1.2)$$

若物体是分段均匀的，各段的线性衰减系数分别为 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ ，相应的长度为 $x_1, x_2, x_3, \dots$ (见图 1.5)，则下式成立

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \dots = \ln(I_0/I). \quad (1.3)$$



更一般地，物体在 xy 平面内都不均匀，即衰减系数 $\mu = \mu(x, y)$ ，则在某一方向 l ，沿某一路径 L 的总衰减为

$$\int_L \mu dl = \ln(I_0/I), \quad (1.4)$$

图 1.5 阐明 X 射线强度经介质衰减用图

此即射线投影。若未指定具体路径，只说明沿某

一方向，即 $\int \mu dl$ 称为投影 (详细定义见 P.8) 投影是一组射线投影的集合。显然，测得 I_0 与 I ，即可知道 $\int \mu dl$ 。而我们的任务是根据一系列的投影 $\int \mu dl$ ，推求被积函数 μ 。这样就能得出相应于 μ 分布 (从而得出密度分布) 的图像。这就是从投影重建图像，也就是 X-CT 成像的大致概念。这一图像当然是相应扫描平面的物体断层图像。下面将指出，从投影重建图像需经过大量运算。这只有在计算机问世以后，借助计算机才能实现，故常称“计算机断层成像术”，或“电算断层成像术”。改变扫描平面可得另一断层图像。理想的断层为无限薄层，实际的断层则具有一定厚度，例如 10 mm、5 mm，甚至 2 mm 或 1 mm。

计算机断层成像术有效地排除了无关截面对成像断面图像的干扰，彻底解决了影像重叠问题。这是因为投影数据 100% 地只依赖于成像断面内物体的 μ ，丝毫不涉及其它截面的情况。另外，由于使用了计算机，可以将感兴趣区域的某些细微的组织特性差别变换成可分辨的 CRT 上的灰度差异，从而解决了其他传统手段无法解决的密度分辨力低的矛盾，大大提高了对软组织特性的分辨本领。

第二节 CT的历史与展望

CT的思想要追溯到1917年奥地利数学家雷唐(Radon)的贡献。雷唐证明了下述定理:

若已知某函数 $f(x, y) = \hat{f}(r, \theta)$ 沿直线 z 的线积分为

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r, \theta) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\sqrt{l^2 + z^2}, \phi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{z}{l}\right) dz, \end{aligned} \quad (1.5)$$

则

$$\hat{f}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\theta - \phi) - l} \frac{\partial p}{\partial l} dl d\phi, \quad (1.6)$$

式中各量的意义见图1.6。式(1.5)称为雷唐变换,式(1.6)则称为雷唐反变换。式(1.5)实际上就是射线投影,式(1.6)则是根据投影 p 重建图像 $\hat{f}(r, \theta)$ 。可惜此公式在发表后50多年,直至20世纪70年代初才发现。

嗣后,1956年布雷斯韦(Bracewell)为了证实太阳发出的米级无线电波究竟来自太阳的局部区域,还是从整个太阳表面发出?或者是由太阳黑子引起?他用一条宽为2m、长为100m的矩形孔径接收天线,集取来自太阳表面对应窄带区的数据(图1.7)。随着太阳与地球的相对运动,天线采得一组数据,也即前面所讲的投影。只是现在的积分路径与波(射

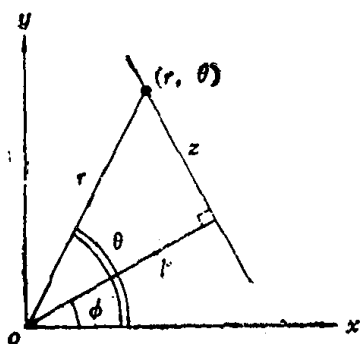


图1.6 雷唐公式中所用坐标系

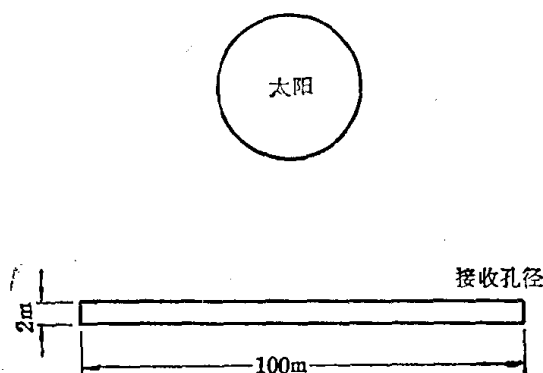


图1.7 布雷斯韦重建太阳活动图装置示意

线)的行进方向垂直。改变矩形孔径的取向,重复上述操作(相当于取不同转角下的投影),即可重建出太阳的活动图。布雷斯韦指出,如不用上述方案而作直接观察,要达到相同的分辨力需用直径为100m的射电望远镜,其成本要增加50倍^[2]。

最初把投影图像重建术应用于医学领域的应当推奥顿道夫(Oldendorf)。他在1961年研制了用伽马射线(源为 ^{131}I)进行透射型成像的初级装置。科尔(Kuhl)与爱德华(Edwards)在1963年独立地研制成了发射型成像装置。这些装置均用类似于反投影的算法进行图像重建,所得图像不够清晰。

由于70年代以前尚未发现雷唐的论文,当代投影图像精确重建的数学方法是由美国物

理学家布雷斯韦与考马克(A.M.Cormack) 分别于1956、1967 及1963 年确立的。考 马克于1963 年9 月及1964 年10 月在“Journal of Applied Physics”上发表了二篇题为:“用线积分表示一函数的方法及其在放射学上的应用”的系列文章,并将这一方法成功地应用于简单的模拟装置。考马克是从1957 年起在南非开普敦大学为了解决放射治疗计划中剂量的正确分布而研究这个问题的。

第一台临床用的计算机断层成像扫描装置(CT)于1967 年至1970 年间由英国 EMI 公

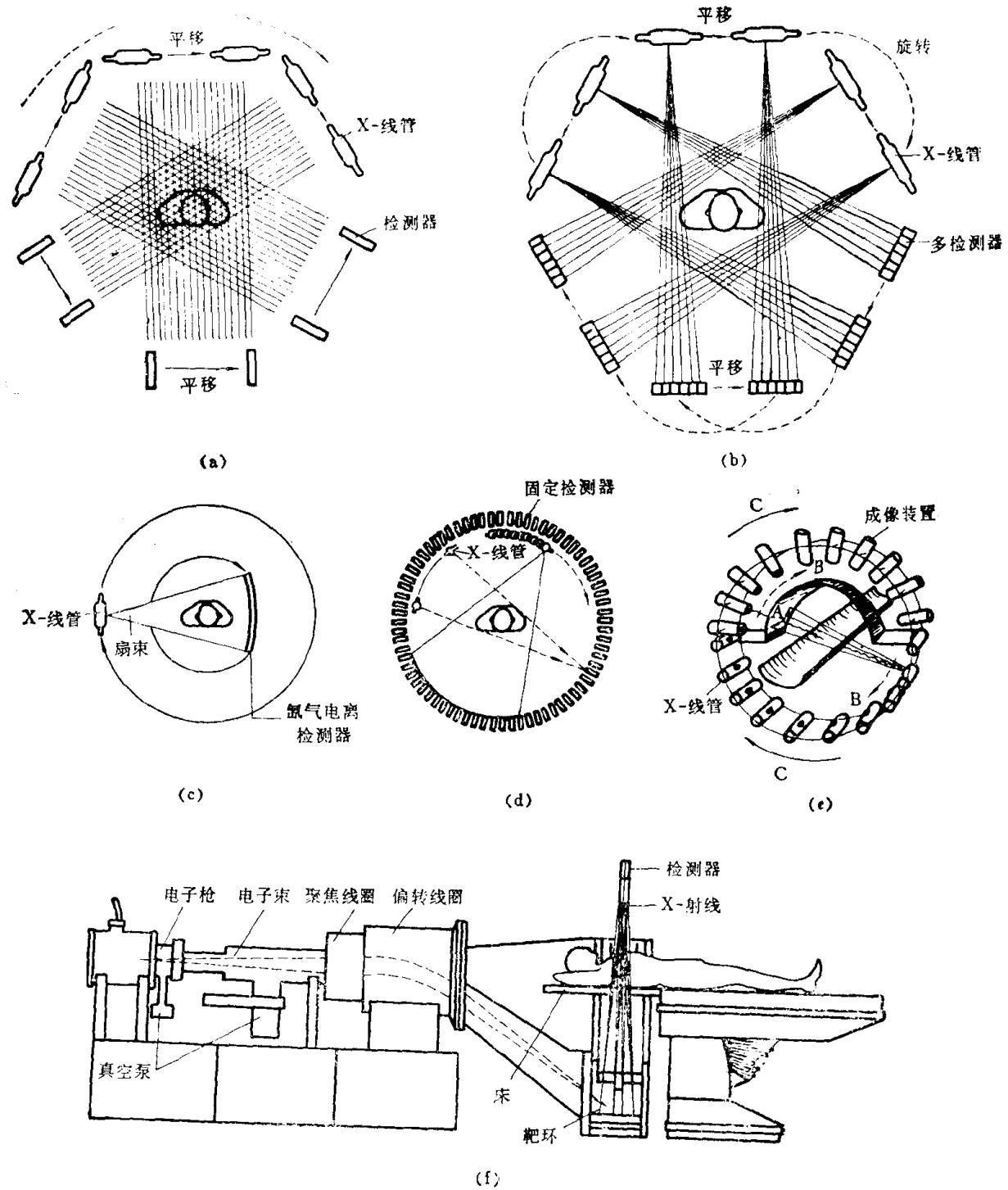


图1.8 各代CT扫描方式

(a) 第一代,笔束平移/旋转; (b) 第二代,扇束平移/旋转; (c) 第三代,扇束,单X射线源多检测器连续同步旋转; (d) 扇束,单旋转源,固定环形检测器; (e) DSR (f) C-100 超高速 CT

司的工程师豪斯菲特(Hounsfield)研制成功,并于1971年9月正式安装在伦敦的 Atkinson-Morley 医院。1972年利用第一台 CT 首次为一名妇女诊断出脑部的囊肿,并取得了世界上第一张 CT 照片。同年,豪斯菲特与医生阿姆勃罗斯(Ambrose)在英国放射学会上发表了第一篇 CT 论文。

CT 的问世在放射学界引起了爆炸性的轰动,被认为是继伦琴发现 X 射线后,工程界对放射学诊断的又一划时代的贡献。1979年的诺贝尔生理和医学奖破例地授予两位没有专门医学经历的科学家:Godfrey N.Hounsfield 与 Allan Macleod Cormack。从此,放射诊断学进入了 CT 时代。CT 装置很快推广,并在短期内获得极大发展。1973年美国 Mayo Clinic 和麻省总医院即相继安装了颅脑 CT, 1974年美国制成第一代全身 CT。1983年我国研制成了第一台颅脑 CT 扫描装置;1985年国产第二代CT 研制成功; 1990年 国产第三代全身 CT 通过鉴定。

自第一台 CT 问世以后十多年来, X-CT 已从第一代发展至第五代(见图 1.8)。扫描时间从 5 min 缩短至 1 s 乃至更短。空间分辨力也达到 1 mm 以下。密度分辨力达到水的吸收系数的 5%。Mayo Clinic 从 1973 年起着手研制至 1982 年完成的动态空间图像重建装置 DSR,即第五代 CT,可在 10 ms 内获得240个平行断层(层厚 1 mm)的28个投影角下的投影数据,或在 60 ms 内获得 112 个投影角下的投影数据。这些数据反映在荧光屏上,再由电视扫描装置按 60 场/秒摄取。舒张期心脏在 60 ms 之内,其位移不到 1 mm。因此,DSR 可在一次心跳期内获得舒张阶段心脏的静止图像。但因技术复杂,造价昂贵,DSR 未得普及。1983年11月,加州大学旧金山分校研制成了动画 CT(Cine Computed Tomography)C-100^[5],扫描速度比传统的 X-CT 快 30 倍以上。关键是采用扫描电子束 X 射线管,球管的阳极与阴极分离。电子束由相当于阴极的电子枪发射,并沿 X 射线管的轴线加速与聚焦。一组偏转线圈将电子束引至在 210° 弧面上分布的阳极靶面。由这些靶面依序发射 X 射线。准直器保证发射的 X 射线呈 30° 的扇束(图 1.8 (f)及图 1.9)、取消了传统 X

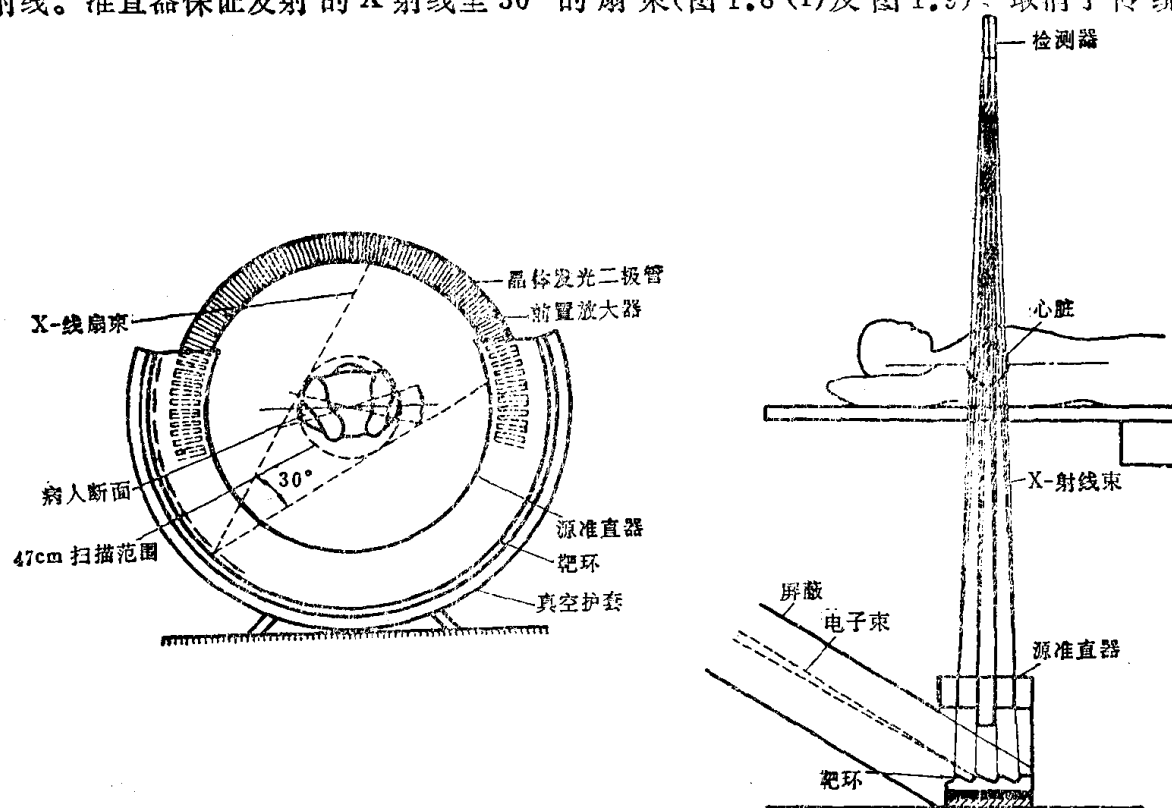


图 1.9 图 1.8(f) 中 X 射线发射部分简图

射线CT的机械旋转,使每层数据采集时间仅化33至100 ms,扫描速率每秒可达24层,可以跟上血液在器官和组织中的流动,可对心脏作动态检查。

除X-CT以外,其他型式的CT也相继问世,如单光子发射CT(SPECT)、正电子发射CT(PET)、核磁共振CT(NMR-CT)等均已付诸临床应用。可用来研究脑的生理与病理功能变化(PET)和了解生化信息(NMR-CT)。超声CT、微波CT的研究也取得了极大的进展。应该指出,各类CT的功能是相互补充而不是相互替代的。

计算机断层成像术作为一种高性能的无创诊断技术显然已在医学成像领域确立了不可动摇的地位!

CT从理论上讲是一个从投影重建图像的反问题,有其普适性,在数学界已引起了广泛的重视。CT作为一种技术,既有坚实的数学理论为依托,又有现代微电子与计算技术相支持,必然在其他领域得到广泛应用。事实上,在工业上,在地球物理的研究上,甚至在农业、林业和环境保护方面已取得了瞩目的成果并展示了美好的前景。兹举几个大的方面为例加以说明。

一、工业无损检测

首先用于反应堆组件的无损评估;钢板焊缝的无损检测;水泥制品质量的检查;电力电容器质量的检验等。目前已将CT技术应用于火箭发动机、导弹等部件的检查,为国防工业服务。美国喷气战略推进公司已制成为这一目的服务的工业CT装置。这些装置可扫描直径为2.4 m,长为5.1 m,重达50 t的物体。由于检查的对象是金属,需要高能的 γ 射线源;不能沿用医用CT的发射源。近来新型工程材料不断涌现,它们包括塑料、陶瓷和以聚合物为基体的复合材料等,使汽车、飞机制造、导弹、航天飞机的制造面临着一场新的革命。为了保证部件质量,对复合材料的检查要求极严,常规的无损探伤技术显然不能胜任,唯独CT扫描机能“明察秋毫”。由于这类材料扫描时所需射线强度与医用CT所用的射线强度相仿,大量制造与使用有其可能。可以预料CT将在材料工业上绽开新花。

二、农林业方面的应用

目前已经制成测量活树的移动式CT,可清楚地显示树的年轮或含水情况。这样,可无破坏植物而研究植物的生理;也可用来评估化学工厂或发电厂对森林等生态环境的影响程度。

三、地球物理方面的应用

这个领域泛指地球资源勘探、地震预测预报、地质构造的确定。具体说来有煤田的开采,水利设施的选址等方面。常用的方法是井间技术。在待测区域周围安排一系列激发点与检测点(图1.10)。在激发点发射电磁波或声波(这些波可由放炮或借其他手段产生),再由安置在接收点的阵列接收器接收。移动发射装置,再测数据(投影),直至把整个区域扫描。随后利用重建算法计算出井间的一些参数分布如折射率、衰减系数、或波速等,这些参数反映一定的地质构造或矿床分布。目前,人们正进一步利用天然地震的数字化记录,结合人工地震的勘探记录探测某些地质的精细结构,研究矿产资源分布规律,预测地震及其他地质灾害。

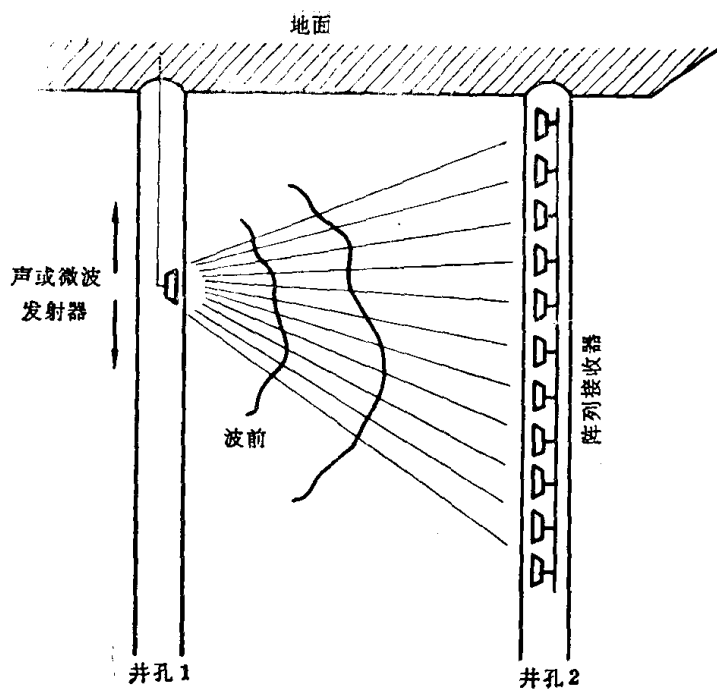


图 1.10 CT 技术应用于地球资源勘探示意

CT 技术的医学应用与非医学应用有其共性,但也各有其特殊性。前者对数据采集速度与成像速度要求较高,并不断提出新的指标;但面临的对象几乎是固定的:固定的人体组织,不变的人体形状。工业应用的要求与医用的正好相反。一般说来,对数据采集速度或成像时间要求较低,但面临的对象的物理性能各异、形状大小相差悬殊,成像环境也各不相同,因此数据缺损现象严重,如何在数据缺损情况下重建图像是 CT 研究的一大方面,综上所述,无论在医学应用抑或在非医学应用方面,对 CT 研究工作者来说都面临着新的挑战。但可以肯定,随着 CT 理论与计算技术的发展,CT 必将在造福人类健康与国民经济建设中作出愈来愈大的贡献。

第三节 若干基本概念

一、投 影

投影是一种变换。它是将一个 N -维函数通过对该函数沿某一特定方向的积分而变换成一个 $(N-1)$ 维函数。例如,二维函数 $f(x_1, x_2)$ 沿 x_2 -轴规定的方向积分得一维函数

$$p_{x_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (1.7)$$

就是 $f(x_1, x_2)$ 沿 x_2 -轴的投影。

一般情况下,积分不一定沿该坐标系中变量所代表的方向进行,而是沿另一方向,它与坐标系某变量方向成一交角。因此,投影的一般定义用数学描述如下:

令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 为 N -维矢量, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 为一 N -维函数。令 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ 表示一新的坐标系。设

$$\mathbf{x} = \mathbf{uA} \quad (1.8)$$

$\mathbf{A}$ 为一正交变换。则 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 在超平面 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_N)$ 上的投影定义为

$$\begin{aligned} p_{u_i}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) du_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{uA}) du_i, \end{aligned} \quad (1.9)$$

坐标轴 u_i 垂直于超平面 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_N)$, 称为投影轴。

$N=2$ 时,矩阵 $\mathbf{A}$ 由下式给出

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

此时坐标轴 (u_1, u_2) 与坐标轴 (x_1, x_2) 相交成 θ 角。对于通常碰到的二维函数,常用视角 θ 来描述投影。所谓视角为 θ 的投影,意指在与 x_1 -轴成 θ 角的坐标 u_1 上的投影(图1.11)。或者说这时投影轴 u_2 与坐标轴 x_2 成 θ 角。方程(1.7)相应于视角为 $\theta=0$ 的投影,或者说,以 x_2 为投影轴的投影。

二、CT 数

前已指出,经CT重建的图像应是衰减系数 μ 的分布。但人体内部大部分软组织的 μ 都与水的 μ 很接近。水的 μ 为 0.19cm^{-1} ,脂肪的 μ 约为 0.18cm^{-1} ,两者仅差 0.01cm^{-1} ,其差值约为水的 μ 值的5%。若直接以这些 μ 值成像,则软组织间的差异很难用它们来明显区别。为了显著地反映组织间的差异,引入CT数。它的定义为

$$P_{u_2}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1 A) du_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u_1, u_2) du_1$$

图 1.11 说明投影轴用图

$$\text{CT 数} = \frac{\mu_t - \mu_w}{\mu_w} \times 1000, \quad (1.11)$$

式中 μ_t 、 μ_w 分别为组织及水的线性衰减系数。CT数又称Hounsfield数,简称 H 。显然可见,水的 H 为零。 $H > 0$,表示 $\mu_t > \mu_w$; $H < 0$ 表示 $\mu_t < \mu_w$ 。骨的 μ 约为 $2\mu_w$,故对骨有 $H = +1000$ 。空气的 μ 近乎零,所以对空气有 $H = -1000$ 。不同组织的 H 如图1.12所示。

一般CT装置的密度分辨力为 $\Delta H = 5$,即能鉴别相当于 $\frac{5}{1000}\mu_w$ 的密度差异,这是靠计算机处理后才达到的。详细过程将在第三章阐明。需要指出的是胶片的密度分辨力远逊于CT,两者可相差一个数量级。对于这一点我们作如下说明。

胶片受X射线照射以后,使乳胶中的溴化银分子电离产生 Ag^+ ,形成潜影,胶片在显影时将潜影还原成金属银而不透光。于是影像变黑,成为看得见的“负像”。胶片的变黑可用透光度 T 表征, $T = L_t/L_i$ 。其中 L_i 为入射于胶片的光强度, L_t 为透过胶片的光强度。实用上又引入另外两个量:密度

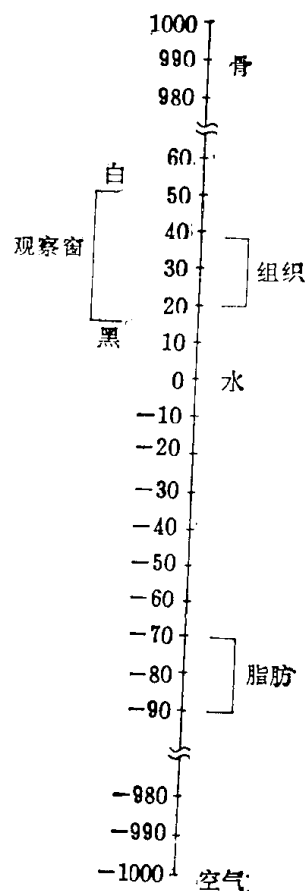


图 1.12 CT数分布

D 和辐照度 E 。其中 $D = \log(1/T)$; $E = It$ 。 I 为 X 射线强度(注意,不是光的强度), t 为照射时间。描述 X 射线照射胶片后引起胶片变黑程度的关系曲线称为 $H-D$ 曲线(H 和 D 指的是 Hurter 及 Driffield。他们是发明这一关系的两位照相工作者)。一条典型的 $H-D$ 曲线见图 1.13。

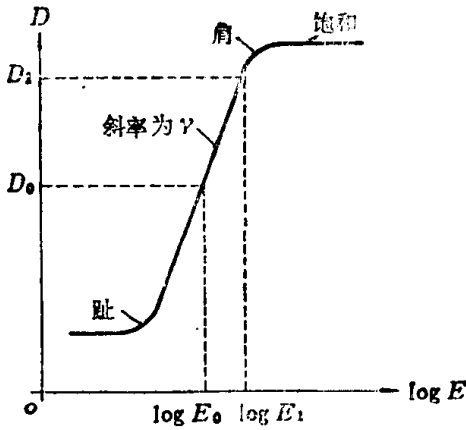


图 1.13 典型的 $H-D$ 曲线

$H-D$ 曲线只在一定范围内呈线性,其斜率为 γ , 称为胶片的反差系数。由图知: $D = \gamma \log E$ 。

若 E 为肿块处对应的辐照度, E_0 为正常组织的辐照度,则密度差(又称 X 射线摄影的对比度)

$$\begin{aligned}\Delta D &= \gamma(\log E - \log E_0) \\ &= \gamma \log(I t / I_0 t) \\ &= \frac{\gamma}{\ln 10} \ln(I / I_0).\end{aligned}\quad (1.12)$$

由前知

$$\ln(I / I_0) = -\Delta \mu \Delta x,$$

这里, $\Delta \mu$ 为两种组织衰减系数的差异, Δx 为组织沿射线方向的厚度。于是

$$\Delta D = \frac{\gamma}{\ln 10} (-\Delta \mu \cdot \Delta x), \quad (1.13)$$

又因

$$D = \log(1/T) = -\frac{\ln T}{\ln 10},$$

则有

$$\Delta D = -\left(\frac{\ln T}{\ln 10}\right)' \Delta T = -\frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{1}{\ln 10} \quad (1.14)$$

比较式(1.13)及式(1.14),可得

$$\frac{\Delta T}{T} = \gamma \Delta \mu \Delta x, \quad (1.15)$$

上式左边表示在正常组织透光度 T 的背景下,因肿块引起的透光度变化为 ΔT ,其相对变化值决定于 μ 之差值与胶片的反差系数。人的视觉鉴别力的阈值为 $(\Delta T)/T = 4\%$,故只有当

$$\Delta \mu \geq \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{\gamma \Delta x}$$

时,这一肿块才能与正常组织分辨出来。设 $\Delta x = 1 \text{ cm}$, γ 的典型值为 2,此时

$$\Delta \mu \geq \frac{2}{100} \text{ cm}^{-1} \approx 10\% \mu_w,$$

相当于 $\Delta H = 100$ 。这个 $\Delta \mu$ 或 ΔH 即为密度分辨力。若要将密度分辨力提高到 $\Delta H = 10$, 唯一出路是提高 γ ,但对胶片来说, γ 是不能随意变动的。CT 情况就不同,解释于下:

由上分析可知: $H-D$ 曲线中横坐标实际上反映 $\Delta \mu$ 或 CT 数的变动 ΔH ;而纵坐标则反映透光度或灰度的变化。CT 情况下也有对应的显示曲线,反映 CT 数与灰度(这里的灰度是指监视器的灰阶)的关系,如图 1.14 所示。这一显示曲线的斜率是可调节的,在横坐标轴

上的截距也可调节(均由计算机设置)。这样,胶片情况下办不到的事,在CT中容易地实现了。调整曲线的斜率,相当于调整胶片的反差系数 γ ,故CT的密度分辨力远高于胶片的密度分辨力。人们可调整曲线在横坐标的截距,使感兴趣的组织的CT数落在曲线的动态范围内,保证这一范围内的组织有较高的密度分辨力。这正是CT优于胶片之点。

三、图像质量评价参数

图像重建算法的研究常常借助于模型作为原始图像。模型(phantom)可以是由若干椭圆组成的、赋予一定密度值的图形(见附录A),也可用其他基本图形(如矩形)构成。对该原始图像进行“扫描”,求出投影值,再根据这些投影,以待研究的算法进行重建,得到重建后的图像评价。重建后图像与原始图像差异的客观标准是采用下面的三个评价参数(或称判据)。

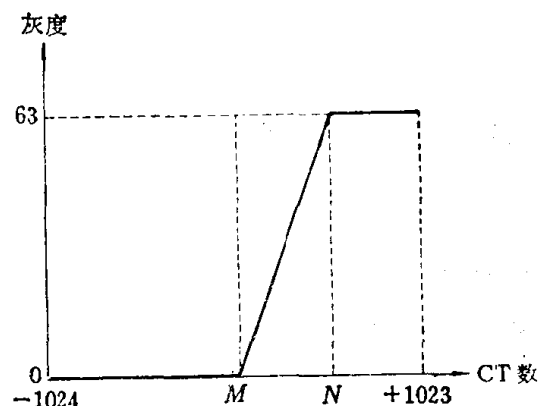


图 1.14 CT的显示曲线

(1) 归一化均方距离判据 d , 即

$$d = \left[\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - \bar{t})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.16)$$

式中, $t_{u,v}$, $r_{u,v}$ 分别表示测试模型和重建后图像中第 u 行、 v 列的像素密度。 $\bar{t}$ 为测试模型密度的平均值; 图像的像素为 $N \times N$ 个。 $d=0$ 表示重建后图像忠实地再现测试模型图像。 d 值愈大表示两者偏差愈大。

(2) 归一化平均绝对距离判据 r , 即

$$r = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v}|}, \quad (1.17)$$

$r=0$, 说明没有误差。 r 增大, 说明误差增大。

(3) 最坏情况距离判据 e , 即

$$e = \max_{\substack{1 \leq i \leq [N/2] \\ 1 \leq j \leq [N/2]}} |T_{i,j} - R_{i,j}|, \quad (1.18)$$

其中

$[N/2]$ 表示小于 $N/2$ 的最大整数,

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (t_{2i,2j} + t_{2i+1,2j} + t_{2i,2j+1} + t_{2i+1,2j+1}); \quad (1.19)$$

$$R_{i,j} = \frac{1}{4} (r_{2i,2j} + r_{2i+1,2j} + r_{2i,2j+1} + r_{2i+1,2j+1}). \quad (1.20)$$

需要指出,上述三个参数对不同类型的图像误差,其敏感程度是不同的。表面看来, d 和 r 两个参数意义相仿,且都有平均意义。仔细考察可知, d 较敏感地反映某几点产生较大误差的情况,而 r 则较敏感地反映许多点均有一些小误差的情况。下面举一个简单例子加以说明。

设有一九像素的原始图像,密度为(1,2,3,4,5,6,7,8,9),而重建后图像的密度为 (6, 2,3,4,5,6,7,8,5),即有 2 个点分别具有密度误差 5 及 4,其他各点没有误差。则可算得:

$$d_1 = 0.83,$$

$$r_1 = 0.2。$$

若设重建后图像的九个像素密度均有 1.5 的误差,则有:

$$d_2 = 0.58,$$

$$r_2 = 0.23。$$

可见 $d_1 > d_2$, 而 $r_1 < r_2$ 。即 d 较敏感地反映少数点的大误差情况,而 r 则较敏感地反映多数点的小误差情况。

参数 e 反映重建后图像与模型图像中最大的(四点)平均密度差。之所以取四点平均密度是因为实际情况下肿瘤等特征常占据几个像素,而我们总是用这些像素的平均密度来估计肿瘤引起的线性衰减系数的变化。

四、点扩展函数、线扩展函数及边扩展函数

评价一个成像系统的优劣,常用点扩展函数这一概念。而点扩展函数有时难以得到,相反,线及边扩展函数却容易求得。我们可通过三者之间的关系来推求点扩展函数。

1) 点质量与点扩展函数(PSF)

在一维线性系统中表征系统特性可用冲激响应 $h(t)$:

$$h(t) = L[\delta(t)], \quad (1.21)$$

符号 $L[]$ 表示系统对输入信号 ($[]$ 中的函数) 作线性变换。若该系统为线性时不变 (LSI) 系统,则有

$$L[\delta(t-t_0)] = h(t-t_0), \quad (1.22)$$

这里 $\delta(t)$ 是狄拉克 δ -函数,它不是普通函数,而是广义函数,不能用普通函数定义,而要用广义函数的规则定义。据此, $\delta(t)$ 定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0), \quad (1.23)$$

式中, $\phi(t)$ 为测试函数, $\phi(t)$ 在 $t=0$ 处连续可导。上式积分符号在涉及广义函数时应理解为“赋值”。这样,用广义函数的语言定义 $\delta(t)$,应作如下陈述: $\delta(t)$ 是这样的函数,它能赋予测试函数 $\phi(t)$ 以 $\phi(0)$ 。不同的广义函数,赋予测试函数 $\phi(t)$ 的值是不同的,如赋值为 $(-\phi'(0))$ 的广义函数是 $\delta'(t)$ 。反之,若两广义函数对同一测试函数 $\phi(t)$ 赋值相等,则这两广义函数相等。

与此相应可以定义二维 δ -函数 $\delta(x,y)$:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) \phi(x,y) dx dy = \phi(0,0)。 \quad (1.24)$$

一个位于坐标原点的体积为 1 的长方体,当底部面积 ϵ^2 趋于无穷小时,其高度 H 即可用 $\delta(x,y)$ 来描述(图 1.15)。位于点 (x_0, y_0) 处的 δ -函数自然是 $\delta(x-x_0, y-y_0)$ 。

当 $\delta(x,y)$ 作用于一个二维线性系统时,所得响应定义为该系统的点扩展函数 $h(x,y)$,即