

实用线性规划基础

谷宝贵 李金林 编著



浙江人民出版社

实用线性规划基础

谷宝贵 李金林 编著

浙江人民出版社

实用线性规划基础

谷宝贵 李金林 编著

浙江人民出版社出版
(杭州武林路125号)

浙江省良渚印刷厂印刷
(杭州莫干山路良化站)

浙江省新华书店发行

开本787×1092 1/32 印张8.125 字数176 000 印数1—6000

1987年8月第1版

1987年8月第1次印刷

ISBN 7-213-00033-0/F·8

统一书号: 4103·139

定 价: 1.40元

内 容 简 介

这是一本比较系统地介绍现代管理的一种重要方法——线性规划的通俗读物。其内容表述力求深入浅出，数学推导尽量从简，所有方法均结合实际背景给出，侧重于基本方法和实际应用。

全书共分八章，即：线性规划引论、求解线性规划的预备知识、线性规划模型的建立与分析、线性规划的解法、对称的经济问题、灵敏度分析、运输问题、线性规划的应用实例等。

本书可供企业经营管理干部的培训和自学之用，也可作为大专院校经济管理专业师生的教学参考书。

前 言

党的十一届三中全会以来,我国企业贯彻执行对内搞活、对外开放的一系列方针政策,又经过1982年以来的分期分批的全面整顿,企业管理工作正在经历着一个历史性的转变,由过去高度集中体制下形成的单纯“生产型”,逐步转变为“经营开拓型”。随着《中共中央关于经济体制改革的决定》的深入贯彻,企业管理的这种转变正在进一步深化。因势利导,采取措施,促使企业管理沿着社会主义现代化的轨道前进,这项战略任务已经迫切地摆在我们的面前。

技术只有同管理相结合,才能变为现实的生产力。现代化的技术,必须有现代化的管理与之相适应。我国不少企业已拥有比较先进的技术装备,然而,由于管理落后,没有发挥其应有的作用。因此,必须努力推进企业的管理现代化,这是经济体制改革的客观需要,其本身又是一场深刻的改革。我们应该全面规划,按照现代化管理的思想和原则对传统的管理实行全面的改革,形成自主经营能力,使之能适应社会主义有计划的商品经济的要求,使管理与技术同步前进,以保证企业获得最佳的经济效益。

线性规划就是研究怎样合理地运用资源,怎样筹划安排生产,在复杂的情况下寻求最合理、最有效的决策方案的一种经济数学方法。它是目前国内外公认比较成熟、应用广

泛、成效很大的一种现代管理技术。在工业、农业、交通运输、商业财贸、基本建设、国防建设等各类经济活动中都有很多的应用。企业中常见的线性规划问题有：资源利用问题、任务分配问题、生产设备调配问题、混合配料问题、物资运输问题、厂站店设置问题、计划综合平衡问题，等等。它可以为企业的经营计划部门、生产管理部门、咨询诊断部门和各级领导者提供较优的决策方案，能大幅度地提高管理水平、工作效率和经济效益。

本书是根据我们的教学实践和企业的应用实践而编写的介绍线性规划的通俗读物。其目的是为广大企业领导者和管理人员提供一些基本方法和应用技巧，作为学习现代管理知识的入门。为了适合初、中级管理人员学习的需要，我们尽量避免高深的数学推导和抽象的描述，并在第二章中对线性规划所用的线性代数知识作了补充介绍。本书可供企业领导干部和管理人员自学之用，也可作为培训教材。

本书在编写过程中，参考了国内外一些有关的书籍和资料，在此，向诸位作者表示衷心的感谢。同时，为满足有些读者深入学习的需要，特将线性规划单纯形法的计算机程序和主要参考资料附于书的末尾。参考资料未能全部列出，敬请作者原谅。由于我们水平有限，书中定有谬误之处，恳切希望读者批评指正。

编 者

1986年8月于北京

目 录

第一章 线性规划引论	1
第一节 为什么要应用线性规划	1
第二节 怎样入手解决线性规划问题	5
第三节 线性规划是怎样发展起来的	10
第二章 求解线性规划的预备知识	13
第一节 行列式	13
第二节 矩阵	25
第三节 一般线性方程组的求解	39
第三章 线性规划模型的建立与分析	46
第一节 线性规划模型的结构与分析	46
第二节 线性规划模型的建立与分析	50
第三节 线性规划模型的标准形式	64
第四章 线性规划的解法	70
第一节 图解法	70
第二节 单纯形法	80
第三节 人工变量法	100
第四节 单纯形法中的特殊情况	110
第五节 改进单纯形法	115
第五章 对称的经济问题	123
第一节 对偶规划的提出	123
第二节 对偶规划的形式	129

第三节	原规划与对偶规划解之间的关系以及对偶规划的其他用途	135
第四节	影子价格及其应用	140
第五节	对偶单纯形法	153
第六章	灵敏度分析	159
第一节	资源、利润、工艺结构变化对最优解的影响	161
第二节	增加一件新产品、增加一道工序对最优解的影响	173
第七章	运输问题	179
第一节	运输问题的特殊性	179
第二节	寻找最优的运输方案——表上作业法	182
第三节	产销不平衡的运输问题	205
第八章	线性规划的应用实例	211
第一节	生产计划问题	211
第二节	运输问题	219
第三节	下料问题	227
第四节	改善物资管理问题	237
附录一：	线性规划单纯形法的计算机程序	
	(BASIC语言)	245
附录二：	主要参考资料	250

第一章 线性规划引论

第一节 为什么要应用线性规划

一、线性规划问题是怎样提到管理日程上来的

近几年来，一些企业的领导者向我们提出了这样的问题：你们在讲课中不是常说管理可以出效益吗？我们工厂存在着有时没有任务而“吃不饱”，有时有了任务又“吃不了”的问题，能有什么办法去解决呢？

这段问话，形象地提出了企业经营管理中的两类重要的决策问题。我们可以这样来分析：

“吃不饱”问题，一般地讲属于企业的战略性决策。战略性决策是企业与经常变化中的企业外部环境之间，谋求动态平衡，协调发展的一种决策。主要是根据国家的长远规划，社会生产技术的发展趋势和市场的变化情况，决定企业的发展方向、生产规模、经营方针以及企业外部的经济联系。如果发生“吃不饱”的问题，说明企业经营战略上存在着问题，那就应该根据实际情况，重新确定或改变企业的经营目标和经营方向、经营方针和生产规模、新产品的开发和

产品设计的选择等决策，以满足国家或市场的需求。只有这样，才能从根本上改变那种“吃不饱”的现象。

“吃不了”问题，一般地讲属于企业的管理性决策。管理性决策是为了保证企业战略性决策所需要的人力、财力、物力的准备及其构成的决策，是在企业既定的外部环境和内部条件下提高经济效益和工作效率的决策。如果发生“吃不了”的问题，可以从两个方面去解决：一是改进生产技术，如使用新技术设备、改善生产工艺、采用新型原材料等；二是改进组织管理，如合理地安排利用资源、合理地组织生产过程、合理地确定产品数量等。而后者就是线性规划所能解决的问题。线性规划是在企业经济活动中，统筹安排、合理使用有限的资源，以求得最佳的经济效益而使用的经济数学方法。用线性规划来解决“吃不了”的现象，就是发掘企业现有潜力，增加经济效益，从一系列可行方案中选择一个最优的方案，以挖潜和充分利用现有的生产能力。

例如，有一个工厂，生产甲、乙两种产品。每种产品都必须经过两台机床加工，这两台机床分别为A和B。生产一件甲产品，需要在机床A上加工2个工时，在机床B上加工3个工时。生产一件乙产品，在机床A和机床B上各需加工2个工时。机床A一天的运转时间不得超过10小时，而机床B由于陈旧和性能不良，一天的可用工时不超过6小时。每件甲产品提供的利润是1.50元，每件乙产品提供的利润是1.00元。

我们要回答的问题是：该工厂应如何安排这两台设备的生产？或每种产品每天的生产量应是多少就可以获得最大的利润？显然，这是一个合理选择产品品种并确定每种产品的数量问题。如果两种产品在市场上都畅销，那就有多种生产

方案可供选择。可以只生产甲、乙两种产品中的一种，也可以同时生产甲、乙两种产品，但数量的配比可以不同。这样就会有多种可行方案，究竟选哪一种生产方案使其利润最大呢？这个问题表面上看来似乎很简单，凭经验来选择并不是很容易的，有时是不可能的。而利用线性规划方法来解决，就可以很快地找到最优的方案。这是线性规划问题的一种类型。类似这样的问题还有许多种类型，后面将详细介绍。企业的经营活动、经营目标、资源条件千差万别，变动也很频繁，能否用数学方法来描述企业系统复杂的经济活动呢？回答是肯定的。

线性规划就是把企业经营活动的内在规律抽象出来，归纳为一些特定的类型，形成简练易懂的数学表达式，帮助人们进行科学的思考，定量地分析问题，从而使领导作出最优的决策。线性规划在国外企业中已经推广应用了几十年，取得了不小的成就。据美国对1000个企业的调查，有78%的企业应用了线性规划，他们总结出在既定条件下，只采用线性规划方法，就可以提高利润20%左右。我国由于管理落后，长期没有引用线性规划等经济数学方法。近几年来，随着对管理的重视和管理现代化的需要，不少先进的企业开始应用线性规划，并收到了较好的效果。这样，线性规划的推广终于被提到了我国企业管理的日程上来了。这是非常可喜的事情。我们要从每个企业的实际情况出发，边学习、边宣传、边推广，注重实效。

二、线性规划能解决企业管理中的哪些问题

总的来讲，线性规划是解决企业中合理利用现有资源，

以发挥最大效益的问题。具体有两类：一类是确定了一项任务，研究怎样精打细算，使用最少的人力、财力和物力去完成它；另一类是已有一定量的人力、财力和物力，研究怎样合理安排，使之发挥最大限度的作用，而完成最多的任务。

主要有以下几个方面的问题：

（一）生产计划与组织问题。

如何组织生产是企业经营管理的关键环节之一。企业的领导者，不仅要了解市场、开发新产品，使企业有饭吃，而且还要研究如何把企业内部的人力、物力和自然资源合理地组织起来，充分挖掘企业内部的潜力，为社会提供尽可能多的产品和创造更大的利润。它包括：企业长远发展规划的论证；生产计划的综合平衡；生产计划的制定；生产方法的选择；生产任务的分配；产品结构的配比；等等。

（二）运输与布局问题。

企业的经营活动是一个投入与产出的有机活动过程，既是一个生产过程，又是一个消费过程。供、产、运、销贯穿于企业活动的整个过程，它们之间的关系是很复杂的，定量地研究这些活动关系，对于搞好企业的经营管理、提高经济效益都是相当重要的。它包括：从产地到销地之间的运输问题；生产中的成品、半成品、原材料的调运问题；厂址、供应站、商店的选择与布局问题；工厂内车间的布局、车间内设备的布置问题；零件的加工路线、管道的铺设路线、通讯线路的布置等问题。

（三）配料与下料问题。

配料是产品生产过程中的一个重要的环节，采用不同配方进行配料，不仅会带来产品质量的差异，而且会使原料成

本发生很大变化，这些都将影响企业的综合经济效益。因此，在冶金、纺织、石油、化工、水泥、造纸、玻璃、机械、饲料加工、医疗等行业，研究在不同要求条件下的最佳配方问题是管理与技术相结合的优化方法。我们通过建立线性规划模型，可以从各种原材料的不同品种搭配上建立系列化最优配方来组织生产，能合理地使用原材料，降低成本，达到提高企业经济效益的目的。

下料是许多工业部门，特别是机械制造部门、缝纫工业部门、制鞋帽工业部门等，常遇到的问题。要求在一定的条形材料上，或面积、形状一定的材料上切割若干具有一定形状、尺寸的毛坯，在一般情况下，材料不可能被完全利用，会有一定的残料。如何最大限度地减少残料，使得切割规定数量的毛坯所用的材料最少，这就是研究合理下料问题的重要意义。

此外，诸如库存问题、劳力组合问题、企业生产能力配置问题、最优设计问题，等等，虽然来自各个不同的业务部门，有着各种不同的特点，但都属于计划、安排、调度和规划人力和物力问题，也就是“物尽其用”、“人尽其才”、“地尽其利”的问题。从数学处理上来看，就没有什么区别，同属于线性规划问题，都是线性规划所能解决的范畴。

第二节 怎样入手解决线性规划问题

一、用数学模型来描述线性规划问题

(一) 什么叫数学模型。

模型是我们日常生活中经常使用的一个名词，在不同的场合，往往有不同的含义。简单地说，模型是对一个真实系统或业务活动的简单描述。在科学的模型中，这些概念总是与数量的测定有关，而其相互关系则用数学方程式予以表达，这种用数学公式的方式抽象地描述现实系统或活动的部分或全部特征的模拟物，就叫做数学模型。

（二）为什么要用数学模型。

我们为什么愿意和一个取代现实系统的数学模型打交道、而不愿和现实系统打交道呢？这是因为一个合适的数学模型建立起来以后，它有很多现实系统所不能比拟的优点：

1. 由于要对现实系统建立数学模型，就要研究现实系统的各个方面，并通过建立模型的思维活动来掌握系统的本质特征，还可以指出现实系统不能直接看到的某些重要因素。

2. 利用数学模型可以精练地陈述所研究的问题，避免文字语言叙述的缺点，并有大量的数学定理可供使用。

3. 利用数学模型可以对现实系统进行定量的分析，以参数的变化来研究对现实系统的影响，而不必真实地改变现实系统，因为那样是非常困难的，有时甚至是不可能的。数学模型可以在相当短的时间内获得所需要的结果，并能节省时间和费用。还可以为运用电子计算机创造条件。

二、怎样建立线性规划的数学模型

（一）建立数学模型的一般步骤。

建立数学模型，一要深刻地了解所要描述的现实系统，二要有一定的想象力、数学知识和技巧。一般有以下几个步骤：

1. 数据分析。

根据实际问题进行定义，把定义的参数，如目标、变量、约束等有关建立数学模型过程中的重要因素数据列出来，这些数据是实际问题中的主要信息的综合。

2. 模型设计。

根据数据分析所列出来的参数构造模型。这里要认真分析和确定：描述实际问题的性能或效果的客观量度是什么？例如用销售数量、最低成本、最大利润表示，等等；我们可以控制的因素即决策变量是什么？例如用成本状况、生产产品的数量表示，等等；我们不能控制的因素即环境变量是什么？例如资源的数量、产品的最低产量、原材料的最低耗用量，等等；可控和不可控因素及目标的关系是什么？例如企业的利润与生产的数量成线性函数关系，等等。在这个阶段中，要用一定的数学符号把常量、参数、变量表示成函数关系，并进行一定的分析。

3. 模型检验。

就是检查已建立的模型是否能取得所必需的数据、能在模型中达到目标的要求吗？如果不能，那就必须重新提出模型的要点，或许还要重新阐述问题，重新修正模型，使之更为精确，这样一步一步地深入下去，才能建立一个较准确而完备的数学模型。

总之，要想自如地建立各种数学模型，唯一的秘诀是反复练习，直至娴熟。

(二) 建立线性规划模型的步骤。

使用线性规划方法解决各种实际问题，必须符合一定的要求或条件。确定这些典型条件的过程，就是建立线性规划

模型的步骤。

1. 确定决策变量。

对企业的决策者来说，通常存在着可以进行控制的因素，如产量的多少、运输量的多少、配料的比例、下料的方案，等等。这些因素可以用变量来表示，称为决策变量。如用 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，表示一组决策变量。每一组变量的取值就代表了一个具体的行动方案或策略。在实际应用中，可行方案的数目几乎是无限的。

2. 确定目标函数。

企业的决策者必须有一个明确目标。这个目标可以是总运输量最小、成套产品最多、利润最大、成本最低，等等。它是决策变量的函数，称为目标函数，记为 $Z=f(x)$ 。

3. 确定约束条件。

实现上述目标，决策者的行为必须受到限制，如运输量要受到供应能力和需要量的限制、机床的加工任务要受到生产能力的限制，等等。这些变量的限制条件或限制范围，称为约束条件。它是一些限制决策者的条件的数学描述。

4. 线性规划问题的描述。

所谓线性规划问题，从上面的分析中可以这样来概括：在约束条件下寻求一组决策变量的值，使目标函数达到最大值或最小值。而模型中无论是目标函数或约束条件对变量来说都是线性的。所谓“线性”，就是指函数中所含变量均为一次项，即都是一次函数。例如，输入量与输出量成正比就是线性形式。约束条件一般是一组线性等式或不等式。总之，“线性”表示问题的各变量之间的关系，而“规划”指的是数学方法。

(三) 建立线性规划模型示例。

以第一节所提到的那个如何安排产品生产计划的简例为例，按上述步骤建立模型。

1. 确定决策变量。

可控因素是计划期内甲、乙两种产品的生产量，用数学语言描述，可设其为 x_1 、 x_2 件。

2. 确定目标函数。

由于每一件甲产品提供的利润是1.50元，因此生产 x_1 件所获利润为 $1.50x_1$ 元；而每一件乙产品提供的利润是1.00元，因此生产 x_2 件所获利润为 $1.00x_2$ 元。于是总共获得的利润为 $1.50x_1 + 1.00x_2$ 。用 Z 代表目标函数，则可表示为：

$$Z = 1.5x_1 + 1.0x_2$$

求最大值。

3. 确定约束条件。

从以上目标函数表达式看出，不同的产量 x_1 和 x_2 ，将带来不同的利润水平。如果没有任何约束，产量 x_1 和 x_2 越大，利润 Z 也会越大。但是，由于生产产品都要消耗设备的生产能力，而A和B设备的生产能力是有限制的，因而甲、乙两种产品数量也不能任意增加。根据条件，生产一件甲产品需消耗A机床2个工时，而现生产 x_1 件甲产品，则需A机床的生产时间为 $2x_1$ ；又生产一件乙产品需消耗A机床2个工时，现生产 x_2 件乙产品，则需A机床的生产时间为 $2x_2$ 。所以生产 x_1 件甲产品和生产 x_2 件乙产品一共消耗A机床的生产时间为： $2x_1 + 2x_2$ 。当然，这个生产时间不能比A机床可用的生产时间10个工时多，即可以小于或等于10个工时。用不等式描述为：