

经典物理学

(II)

〔日〕汤川秀树 主编

科学出版社

T411.242/110

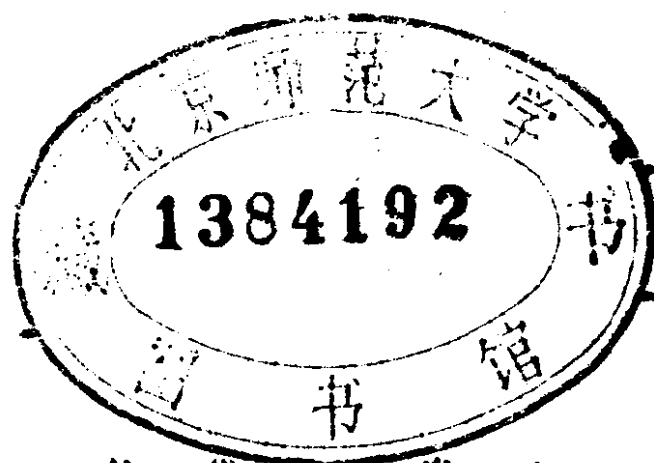
经典物理学

(II)

〔日〕汤川秀树 主编

郭永江 徐庚武 姜兆仁 译

郑哲湊 校



科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是日本著名物理学家汤川秀树主编的《岩波讲座 现代物理学基础》的第二卷,重点介绍经典物理学中的相对论、热力学及经典统计力学。由浅入深地阐述了相对论、热力学和经典统计力学的过去和现在,较为系统地介绍了物理学发展中具有重大历史意义的观点和方法,并指出了许多尚待解决的问题。

本书翻译分工:第三部分为徐庚武;第四部分为郭永江;第五、六部分为姜兆仁;周茂青校阅了第五部分的数学。郭永江整理了全书译文。

本书适合于理工科高等院校师生阅读,也可供其它科研人员参考。

監修湯川秀樹

古典物理学 (II)

岩波書店 1978

经 典 物 理 学 (II)

〔日〕汤川秀树 主编

郭永江 徐庚武 姜兆仁 译

郑哲洙 校

责任编辑 荣毓敏

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年10月第一版 开本:787×1092 1/32

1986年10月第一次印刷 印张:13 插页:1

印数:0001—4,200 字数:299,000

统一书号:13031·3309

本社书号:4892·13—3

定价: 3.10 元

目 录

第三部分 相 对 论

第六章 伽利略变换与力学定律.....	1
§ 6.1 相对性原理的发现及其发展	1
第七章 洛伦兹变换.....	11
§ 7.1 光速	11
§ 7.2 牛顿运动方程的推广	13
§ 7.3 洛伦兹变换的构造	29
第八章 从洛伦兹变换到物理学的几何学化.....	41
§ 8.1 从洛伦兹变换到加速度变换	41
§ 8.2 广义相对论的基本概念	49
§ 8.3 引力场方程的解	62
§ 8.4 关于引力场的能量-动量问题	88
§ 8.5 引力场与电磁场	99

第四部分 宏观状态的概念

前言.....	114
第九章 功与热量.....	116
§ 9.1 宏观描述	116
§ 9.2 外界条件和功	120
§ 9.3 能量守恒定律和热量(热力学第一定律)	123
第十章 热平衡与温度.....	125
§ 10.1 热平衡和温度	125
第十一章 熵.....	130
§ 11.1 热力学第二定律	130

§ 11.2	不可逆过程	147
§ 11.3	平衡条件和不等式	158
§ 11.4	热力学第三定律	170
第十二章	相	174
§ 12.1	第一类相变	175
§ 12.2	第二类相变	187
第十三章	相对论热力学	195
§ 13.1	热力学量的相对论变换性质	195
§ 13.2	引力场中的热平衡	208
第十四章	微小系统与涨落	211
§ 14.1	微小系统热力学	211
§ 14.2	涨落	219

第五部分 经典力学的概率论处理

第十五章	力学系统与其观测量	224
§ 15.1	经典物理学中的命题结构	224
§ 15.2	命题的概率与测度	229
第十六章	概率论经典力学	244
§ 16.1	概率过程的公式化及其分类	244
§ 16.2	布朗运动与势	256
§ 16.3	布朗运动的动力学	280
第十七章	碰撞过程与各态历经性	299
§ 17.1	完全弹性球的碰撞	300
§ 17.2	玻耳兹曼的 H 定理	307
§ 17.3	各态历经性的力学解释	325

第六部分 经典物理学的世界图象

第十八章	经典力学的世界图象	342
§ 18.1	牛顿-拉普拉斯因果律	342

§ 18.2	原子论与热力学	348
§ 18.3	热现象的不可逆性	360
§ 18.4	惯性系与绝对运动	365
第十九章	相对论世界	371
§ 19.1	光和以太	371
§ 19.2	电磁场与电子	375
§ 19.3	狭义相对论中的时间、空间及因果律	378
§ 19.4	引力与广义相对论	394
文献与参考书		400

第三部分 相 对 论

第六章 伽利略变换与力学定律

在物理学的建立过程中,不言而喻,自然现象同观察它的手段或操作有着深刻的联系,但以定律形式明确地掌握这一点,却是不太久远的事。我们借助于定律认识自然时,这些定律必须对每个观察者有相同的表现形式。对不同的观察者,现象的描述当然一般是不同的。尽管许多现象具有共同的本质,但通常在描述这些现象时却表现出明显的个性。只有通过定律,以明确的形式将它们相互联系起来之后,我们才能说,在这些定律适用的范围内,从物理上理解了这些现象。

§ 6.1 相对性原理的发现及其发展

哥白尼 (N. Copernicus, 1473—1543) 提出的地动说,更确切说是太阳中心说 (heliocentrism), 对近代物理学的诞生起了直接的刺激作用 (*De revolutionibus orbium coelestium*, 1543), 而伽利略 (Galileo Galilei, 1564—1642) 则发现了这种学说不仅简单地描述行星运动,而且还包含着更深刻的含意。在伽利略之前,从柏拉图 (Platon) 的“自然的单纯性”这种哲学观点出发,支持哥白尼地动说的人未必为数很少,其中甚至有象布鲁诺 (Giordano Bruno, 1548—1600) 那样真正以生命来维护地动说的人。尽管如此,与其说这些人不能回答

当时“无知的”庶民对地动说提出的朴素疑问，倒不如说他们没有注意到回答这个问题的重要性。假定地球静止不动，那末在此基础上能够圆满地处理种种自然现象的描述形式，会不会因为地球在运动着而使它全部土崩瓦解呢？我们依据从许多经验得来的知识，搬动物体、建造房屋或桥梁，这时设想大地是不动的，不是毫无影响吗？

从正面回答这一问题的是伽利略。他的主要著作之一《天文问答》(*Dialogo dei due massimi sistemi del mondo Tolemico e Copernico*, 1632) 的中心内容“第二天问答”(giornata seconda)，可以说是专门阐述这一问题的。其中他举出了如下一个有名的实验。在平静海面匀速航行的船上和岸边各有观察者 A、B。现使小石从船的桅杆上下落，并观察其运动。对小石下落这同一现象，A 观察到的是铅直的直线运动，而 B 观察到的是抛物线运动。然后，在船静止时，再让小石从桅杆上下落。这时，无疑 A 和 B 观察到的都是铅直下落运动。这样从实验上证明了，对 A 来说，不论船对岸边运动还是静止，小石从桅杆下落的运动都是不变的。

伽利略虽是在以后才完成落体运动的定量研究，但他在这个阶段就已注意到，对于彼此作匀速运动的不同观察者而言，力学现象的定律取相同的形式。他认为这正是解答庶民对地动说朴素疑问的关键，在《天文问答》中，他对此展开了极为详细的论述。当时，研究的自然现象主要是狭义的力学现象，因此，“对彼此作匀速运动的不同观察者而言，描述自然现象的定律具有相同的形式”，这一点被认为具有科学原理的意义。即使地球在转动，但在不太大的空间、时间范围内研究物体运动时，也不妨认为大地作匀速运动。因此，这一原理的发现对消除庶民对地动说的不安肯定是非常有力的。

这一原理用数学符号可表示如下。对观察者 A、B 分

别固定以坐标系 $Oxyz$ 、 $O'x'y'z'$ 来考虑问题,如图 6.1. 简称为 Σ 系、 Σ' 系. 设 O' 沿 Ox 轴以匀速度 v 前进, $t=0$ 时坐标轴 $O'x'$ 与 Ox 重合. 空间任一点的位置, t 时刻 A 的观测值为 (x, y, z) , 同时刻 B 的观测值为 (x', y', z') , 则

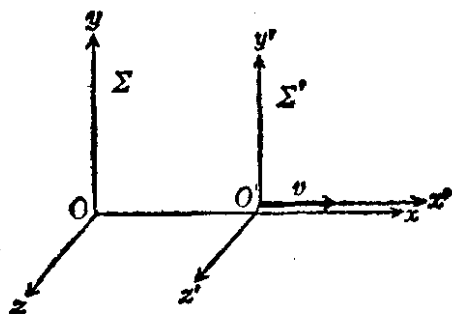


图 6.1 坐标系的平行移动

有下列关系:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

再有,根据日常经验,看不出 Σ 与 Σ' 中时钟的走法有什么不同. 因此, A 观测的时刻 t 和 B 观测的时刻 t' , 可以认为总是相同的. 于是,暂时我们姑且从形式上加上

$$t' = t,$$

并用矩阵方法把 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 之间的关系写成:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}. \quad (6.1.1)$$

虽然同一个力学现象以坐标系 Σ 描述,与以坐标系 Σ' 描述时表现形式一般是不同的,但支配这些现象的力学定律可望表述为同一形式. 更恰当地说,应该认为这就是物理定律的定义.

式(6.1.1)叫做狭义伽利略变换. 至于广义伽利略变换请

参阅本讲座第三卷《量子力学 I》 (§8.7)。本卷中把狭义伽利略变换简称伽利略变换。变换 (6.1.1) 的特点是, 在两坐标系中不仅保留了同时刻的概念, 而且空间矢量也保持不变。即如果

$$t_2 = t_1, \text{ 则 } t'_2 = t'_1.$$

因而

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= x_2 - x_1, \quad y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1, \\ z'_2 - z'_1 &= z_2 - z_1. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

对上述小石下落运动来说, 在一个坐标系中是铅直轨道, 在另一坐标系中是抛物线轨道, 乍一看似乎表现形式是不同的, 但运动定律却可表为同一形式:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g, \quad (6.1.3)$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = -g. \quad (6.1.4)$$

自由下落时式 (6.1.3) 的解为

$$z = -\frac{1}{2} g t^2, \quad x = y = 0.$$

这显然是直线。另外, 对坐标系 Σ' 来说, 由 (6.1.1) 可得

$$\begin{aligned} z' &= z = -\frac{1}{2} g t^2, \quad x' = x - vt = -vt, \\ y' &= y = 0. \end{aligned}$$

由此可知, 在坐标系 Σ' 中轨道形状为抛物线 $z' = \frac{1}{2} \frac{g}{v^2} x'^2$ 。

质量为 m 的质点受力 $\mathbf{F}$ 作用而运动时, 其运动方程为

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (6.1.5)$$

此方程在伽利略变换下保持不变, 如果 $\mathbf{F}$ 的变换和 (6.1.2) 相同, 那末这一点是很清楚的。

于是,问题变为:力 $\mathbf{F}$ 的变换性质对伽利略变换是否总有(6.1.2)那种形式。力当中除弹簧伸缩引起的力、重力等以外,还有电力、磁力等。电力、磁力本来是作为场强,即表示带有单位电荷或单位磁荷的试探体所受力的矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 而引入的,由此曾认为它们和机械力的变换相同。然而, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的变换性质,理所当然要根据存在于它们之间的物理定律来仔细考察。

为简单起见,我们来考虑不存在电荷和电流的真空中的某一点处的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 性质。它们由叫做麦克斯韦方程组的下列四个联立偏微分方程给出。

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.1.6)$$

其中 c 是由物理量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的单位制取法所决定的常数,具有速度量纲,大小与实测光速相同。

为研究式(6.1.6)的变换性质,用矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 ϕ 来改写式(6.1.6)。即由(6.1.6)的两个式子,保证有将 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

的 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的存在,由此,(6.1.6)的其余二式变为达朗伯方程的形式:

$$\left. \begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} &= 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.1.8)$$

我们要问式(6.1.8)在伽利略变换(6.1.1)下是否能保持不

变? 即对以匀速相对运动的两个观察者来说, 是否有同样的表示式? B 的坐标系 Σ' 中的一切量都用加“'”表示时, 为了研究在伽利略变换下由式(6.1.8)能否导出关系式

$$\left. \begin{aligned} \left(\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \mathbf{A}' &= 0 \\ \left(\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \phi' &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.1.9)$$

先写出有关微分算符在(6.1.1)变换下的变换。因 x, t 为独立变量, 所以

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

从而

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \neq \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

其次, 必须考虑 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的变换, 由于式(6.1.1)给出的伽利略变换不包含空间转动, 因而显然有 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, $\phi' = \phi$.

我们考虑到牛顿力学在解释日常周围自然现象时所起的伟大作用, 无论如何不能完全抛弃构成牛顿力学基本框架的伽利略变换。于是, 我们要进行保留伽利略变换的本质并以最小限度的修正来保持达朗伯方程形式的尝试。为此, 取下式来代替式(6.1.1):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} & 0 \\ -\frac{v}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}. \quad (6.1.10)$$

由此立即可以证明,关系式

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \quad (6.1.11)$$

严格成立。式(6.1.10)叫做在 Ox 轴方向具有相对速度 v 的洛伦兹变换。当两坐标系的相对速度远小于光速 c 时,即

$$\frac{v}{c} \ll 1$$

时,式(6.1.10)与式(6.1.1)近似相同。

这样看来,可以认为洛伦兹变换是伽利略变换的必然发展。但是,当爱因斯坦彻底揭示出这一发展所蕴藏的时空观念的变革时,物理学才发生了巨大变革。爱因斯坦首先根据物理定律在洛伦兹变换下具有协变性的要求,完成了狭义相对论。进而根据物理定律对于代替洛伦兹变换的一般坐标变换也必须写成协变形式这一更强的要求,又建立了广义相对论。

物理定律与其表述方式或表现形式之间如何密切相关,是与观测问题有深刻联系的。本卷中不涉及量子力学的观测

理论。在这种意义上，下面讲述的相对论归入经典物理学范畴。关于量子论和相对论的统一，虽有种种尝试，但它的完成是遗留于今后的一大课题。

上面，我们没有按历史如实地追溯相对论的形成过程，而是简单地重点说明了理论结构的发展。下一章以后，也打算按这一方针进行。关于此部分的科学史，可以参考广重徹的论文、著作[广重，1、2]，弗朗福特（U. I. Frankfurt）的著作[Frankfurt]，以及最近的巴拉兹（N. L. Balazs）的论文[Balazs]等等。

考虑到读者的方便，在这里主要根据上述论文，简单叙述一下从发现洛伦兹变换到狭义相对论问世的历史过程。

1690年惠更斯（C. Huygens, 1629—95）以今日用他的名字称呼的原理形式，使人们掌握了作为波动现象的光的传播的基本原理（*Traité de la Lumière*, 1690）。但是，能说明光的干涉、衍射的真正的光的波动理论是以杨氏（T. Young, 1773—1829）为开端的。随后，菲涅耳（A. J. Fresnel, 1788—1827）与此独立地在麦克斯韦（J. C. Maxwell）电磁理论以前的阶段大体上完成了考虑介质在内的光的波动理论。如果将光作为波动现象来理解，那末自然会产生传播介质是什么的问题。可是，光在“真空”中也能传播，所以“真空”中也应该有不同于通常物质的“某种东西”存在。当时，称其为以太（ether）。但是，从实验上直接研究以太的性质是困难的，所以从传播光的普通物质即透明物质与光的相对速度着手来研究二者的关系，似乎是可行的。1818年菲涅耳从弹性理论方面得出结论：以速度 v_1 运动的折射率为 n 的透明体以 $(1 - 1/n^2)v_1$ 的速度拖动其内部的以太。现在称 $1 - 1/n^2$ 为菲涅耳曳引系数（Fresnel's dragging coefficient）。因而，当折射率为 n 的介质相对于观察者以速度 v_1 运动时，介质内的光速不是

c/n , 而是

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_1. \quad (6.1.12)$$

1851年斐索 (H. L. Fizeau, 1819—96) 从实验上证明了这个关系。其实, 此关系式是作为狭义相对论的简单例题之一在下一章要说明的

$$v = \frac{c/n + v_1}{1 + v_1/nc} \quad (6.1.13)$$

中, 忽略 v_1^2 以上各项的近似公式。在此意义上, 可以说菲涅耳的这项工作起了发现相对论的先驱作用。

如本讲座第一卷《经典物理学 I》中所述, 1864年, 麦克斯韦从数学上对法拉第 (Faraday) 的电磁场理论加以整理, 提出了光的电磁波理论。因此, 从麦克斯韦理论也应该能说明菲涅耳曳引系数。但处理电介质内的电磁现象时必须考虑物质结构, 因此需要从电子论方面加以考察。提出这个问题, 并进行精心研究的是洛伦兹 (H. A. Lorentz, 1853—1928)。他在研究这一问题的过程中, 引入了洛伦兹力和运动物体缩短假说。几乎同时 (一说稍前) 斐兹杰惹 (G. F. Fitzgerald, 1851—1901) 独立地提出了缩短假说。

彭加勒 (J. H. Poincaré, 1854—1912) 首先指出洛伦兹针对菲涅耳曳引系数所进行的工作, 特别是在缩短假说的公式化中表现出来的变换含意的重要性 (1900)。早在 1895 年彭加勒本人在讨论电磁理论中运动的相对性时就指出: “不可能检验出物质对以太的运动。”作为对彭加勒这一高度评价和鼓励的回答, 洛伦兹将理论发展到了和现在的狭义相对论几乎同样公式化的阶段 (1904)。彭加勒立即仔细研究了这个问题, 明确指出使麦克斯韦方程严格保持不变的时空变换的集合将形成一种群, 而且这些群具有由李 (M. S. Lie, 1842—

99) 引入分析力学中的那种李群的结构, 对这些变换和群分别给以洛伦兹变换 (Lorentz transformation)、洛伦兹群 (Lorentz group) 的名称(1905)。

再说, 迈克耳孙 (A. A. Michelson, 1852—1931) 继承了斐索所开创的光干涉实验, 并发明了叫做迈克耳孙干涉仪的精密干涉仪(1881)。1887年迈克耳孙和莫雷 (E. W. Morley, 1838—1923) 合作进行了试图发现地球对绝对静止以太的相对运动的实验, 结果更加有力地支持了洛伦兹假说。

彭加勒从相对性原理的观点, 认识到牛顿力学中伽利略变换的重要意义, 并明确理解到为保持麦克斯韦方程的协变性, 必须将伽利略变换推广到洛伦兹变换。但是, 由他看来洛伦兹变换始终是与麦克斯韦-洛伦兹电动力学紧密结合的, 并没有想到它对整个物理定律所具有的普遍性。据说他的研究未能在物理学家之间传开的理由之一就是他运用了远超过当时物理学家水平的数学技巧。其实彭加勒本人被“所谓以太的奇异性质”弄得极为烦恼, 而未能进行抽象化、普遍化的工作, 这些工作理应是数学所擅长的。

恰在此时, 1905年爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955) 连续发表了五篇论文。其中两篇关于狭义相对论, 两篇关于布朗运动, 一篇关于光子假设。这些都反映了他对自然界离散构造的强烈关心, 尽管看上去很不相同, 但它们之间却有密切的内在联系。狭义相对论的第一篇论文题为“关于运动物体的电动力学” (Zur Elektrodynamik bewegter Körper), 它从导线与磁铁的相对运动描述的非对称性开始讨论的, 透彻地研究了以光为信号的经典测量的内容。作为第二篇论文的重要结论之一, 首次指出了质量和能量的等价性 ([Einstein (4)1]。于是, 爱因斯坦发现, 洛伦兹变换从根本上动摇了传统的时空观念。

第七章 洛伦兹变换

§ 7.1 光速

伽利略曾试图测定光速,但以当时的原始测量技术,甚至无法验证光究竟是否具有速度.后来,经过许多人的努力,逐渐精确测出了光速数值.当前可以认为,它是物理量当中最精确的测定值之一.毫无疑问,光速是个有限值,它决非无限大,其数值与麦克斯韦方程组中的常数 c 相同.由此麦克斯韦作出结论,光不外乎是作为麦克斯韦方程的解而得到的电磁波.

根据日常经验,有理由认为,如果光速具有有限值,那末彼此作相对运动的两个观察者就会测得不同的数值.因此,只要伽利略变换对光的传播也能适用,那末一个人测得的光速为 c ,另一个人就应该测得为 $c - v$ 或 $c + v$.如果能够从实验上检测出这种差异,我们就可以设想,对光的传播存在一种特定的介质,或固定于这种介质的坐标系,而其它坐标系相对于它运动.

迈克耳孙与莫雷的精心实验,对于这种预期给了明确的否定答案.这一事实不能不促使我们深入探讨我们所用的速度概念.为了从物理上定义速度概念,需要有刻度的尺和时钟.不仅如此,观察它们的操作也是必不可少的.只要没有任何外力和内力作用,尺和时钟一定具有不变的形状.但是,进行测量的观察者作相对运动时,是否能得到同一数值,这需要研究具体的操作过程.也就是说,要靠假想实验来进行仔细推敲.