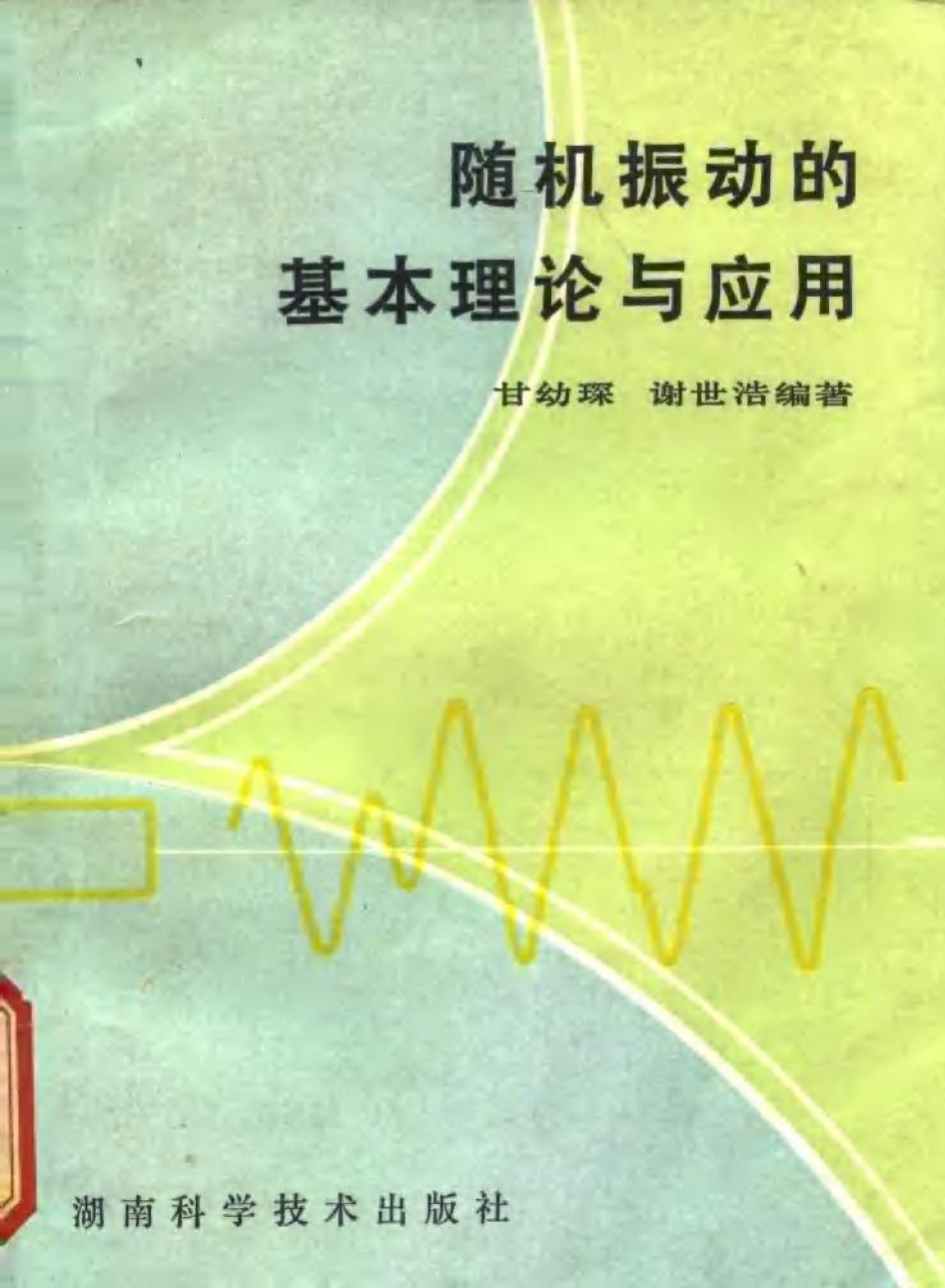


随机振动的 基本理论与应用

甘幼琛 谢世浩编著



湖南科学技术出版社

随机振动的基本理论与应用

甘幼琛 谢世浩 编著

湖南科学技术出版社

随机振动的基本理论与应用

甘幼霖 谢世浩 编著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年5月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：12.5 字数：284,000

印数：1—3,600

统一书号：13204·52 定价：1.30元

序

近一、二十年来，人们开始将概率论的方法引入土木、机械等工程领域，处理随机荷载作用下的各种振动问题，以满足设计与实验上的要求，这就逐步形成了一门很有实用价值的新兴学科——随机振动。它的基本理论与方法不仅能够用来解决各种过去难以解决的机械振动问题，而且在自动控制、资源勘探、信息分析处理等领域都有着广泛的应用。因此，近年来，随机振动理论在运输、船舶、机械、建筑、地质及其他部门都得到了愈来愈广泛的重视。许多大学在有关专业的高年级学生与研究生中都已正式开设“随机振动”课程；不少部门与单位，不仅举办了关于这一课题的讲习班，并且开展了这方面的研究工作。

然而，如果对于这一学科的基本理论缺乏完整、深入的理解，想要应用它是很困难的。目前，国内虽然有几种较为流行的著作与参考资料，但全是从国外引进的，它们大多不完全符合我国的实际情况。初学者阅读这些书时，往往感到十分困难。因此，我们想向读者介绍关于这一学科的有价值的知识，以资学习参考。

基于上述思想，本书的主要特点是：它不仅对随机振动的基本理论（特别是它的数学基础），按由浅入深的原则作了比较系统的阐述，而且对其应用的几个主要专题也作了初步的介绍。这样做，就是试图使读者毋须查阅更多的数学力学专著，并且只需花不太多的时间，就可以把握问题的实质，乃至迈向本学

科的前沿。因此，本书可供具有普通高等数学与理论力学知识的工程技术人员、高年级大学生、研究生和力学工作者阅读，也可供从事系统工程、水文气象等方面工作的人员参考。

本书的出版，曾得到侯振挺教授、杨向群教授的热情支持与具体指导，又烦张荣义、覃武陵等同志认真誊稿，在此一并致谢。

本书难免有错误之处，敬祈读者批评指正。

作 者

1981年五月于长沙

目 录

第一章 绪论

- § 1.1 随机振动的特征 (1)
- § 1.2 振动系统的力学模型 (4)
- § 1.3 随机振动产生的原因及其危害 (8)
- § 1.4 随机振动的研究方法 (12)
- § 1.5 关于本书内容安排的说明 (14)

第二章 古典振动的一般理论

- § 2.1 拉格兰日(Lagrange)方程 (17)
- § 2.2 关于阻尼 (25)
- § 2.3 主振型 (30)
- § 2.4 主坐标 (40)
- § 2.5 线性多自由度系统对激励的动力响应 (48)
- § 2.6 分布参数系统对激励的动力响应 (53)

第三章 统计分析基础

- § 3.1 随机事件 频率与概率 (66)
- § 3.2 事件的关系与运算 (67)
- § 3.3 事件的概率计算 (69)
- § 3.4 随机变量及其概率分布 (76)
- § 3.5 随机变量分布的几种重要形式 (82)
- § 3.6 随机变量的数字特征 (89)
- § 3.7 随机变量系 (93)
- § 3.8 随机变量函数的分布与数字特征 (106)

第四章 随机过程的幅域描述——概率分布

- § 4.1 随机过程的一般概念..... (116)
- § 4.2 随机过程统计特性的描述——概率分布..... (118)
- § 4.3 几种重要的随机过程..... (123)
- § 4.4 随机过程系的统计特性的描述..... (129)

第五章 随机过程的时域描述——数字特征

- § 5.1 随机过程的数字特征..... (132)
- § 5.2 随机过程函数的数字特征..... (137)
- § 5.3 随机过程的微分和积分..... (145)
- § 5.4 广义平稳随机过程..... (151)
- § 5.5 各态历经性..... (158)

第六章 随机过程的频域描述——波谱分析

- § 6.1 周期函数的波谱分析——富里叶级数..... (166)
- § 6.2 非周期函数的波谱分析——富里叶变换..... (178)
- § 6.3 复时间函数和 δ -函数的富里叶变换..... (185)
- § 6.4 卷积及其富里叶变换..... (197)
- § 6.5 相关函数及其富里叶变换..... (203)
- § 6.6 随机过程的频域描述——功率谱分析..... (206)
- § 6.7 分布密度的富里叶变换——特征函数..... (216)

第七章 物理系统的动态特性

- § 7.1 线性与非线性系统..... (222)
- § 7.2 线性定常系统的时域特性单位脉冲响应函数 $h(t)$ (225)
- § 7.3 线性定常系统的频域特性频率响应函数 $H(f)$
..... (234)
- § 7.4 线性定常系统的幅域特性..... (239)
- § 7.5 脉冲响应 $h(t)$ 与频率响应 $H(f)$ 之间的关系

.....	(240)
§ 7.6 确定系统频率特性的试验方法.....	(242)
第八章 集中参数系统对随机激励的响应	
§ 8.1 响应的数学期望 $E[Y(t)]$	(246)
§ 8.2 响应的自相关函数 $R_y(\tau)$ 和谱密度 $S_y(f)$	(248)
§ 8.3 响应的方差 D_y	(254)
§ 8.4 激励与响应的互相关 $R_{xy}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{xy}(f)$	(257)
§ 8.5 多输入的系统响应的解答形式.....	(260)
§ 8.6 确定系统频率特性 $H(f)$ 的随机试验方法.....	(263)
§ 8.7 系统响应的数字特征微分方程解法.....	(264)
§ 8.8 系统响应的概率分布.....	(267)
§ 8.9 多自由度系统对随机激励的响应.....	(269)
第九章 分布参数系统对随机激励的响应	
§ 9.1 引言.....	(279)
§ 9.2 受一个集中随机荷载作用的简支梁的响应	(280)
§ 9.3 受分布随机荷载作用的简支梁的响应.....	(293)
§ 9.4 分布荷载为白噪声时简支梁的响应.....	(300)
§ 9.5 弹性梁在基础发生随机位移时的响应.....	(305)
第十章 系统的非平稳随机振动	
§ 10.1 引言.....	(310)
§ 10.2 非平稳过程的功率谱密度.....	(312)
§ 10.3 线性振动系统的响应.....	(314)
§ 10.4 非平稳白噪声时的响应.....	(319)
§ 10.5 地震时结构的响应.....	(323)

第十一章 随机参数系统分析

§ 11.1 引言	(329)
§ 11.2 马尔可夫过程	(330)
§ 11.3 一个简单例子	(335)
§ 11.4 解决问题的途径	(338)
§ 11.5 问题的进一步讨论	(344)

第十二章 随机振动系统的可靠性分析

§ 12.1 可靠性的概念	(350)
§ 12.2 元件的可靠度	(351)
§ 12.3 故障率 λ_0 的计算	(357)
§ 12.4 元件的安全度	(360)
§ 12.5 最大与最小值分布	(364)
§ 12.6 逻辑图与数学模型	(369)

第十三章 随机振动的模拟

§ 13.1 引言	(373)
§ 13.2 模拟的一般问题	(374)
§ 13.3 单输入系统的模拟	(377)
§ 13.4 多输入系统的模拟	(380)
§ 13.5 随机模拟的其它问题	(385)
主要参考书目	(389)

第一章 绪 论

§ 1.1 随机振动的特征

随机振动，是用当代先进的数学工具——随机过程理论来处理振动问题的一门新学科。从力学观点来说，它是古典振动理论的新发展；从数学观点来说，它是随机过程理论在振动领域里的重要应用；从实际应用的角度来说，它基本上还是一个工程问题。

我们知道，振动现象是普遍存在着的自然现象。不仅在日常生活中（如时钟的摆动，车辆行驶时的颠簸，脉搏的跳动等等），经常遇到，而且在各种工程技术领域中（无论是设计、制造，还是检修、运用各方面的工作），都可能涉及到振动问题，例如，突风对高耸建筑物的作用，海浪对船舶的作用，大气湍流对飞机机翼的作用等都会产生振动。

与其它的自然现象可以笼统地分为确定性的与随机性的两大类一样，我们也将振动现象分成确定性振动与随机振动两大类。

确定性振动，也称为定则振动。它是指那些能够用明确的数学关系式来描述的振动。例如，考虑一个用线性弹簧悬挂在固定板上的物体的运动，如图1.1—1所示，设物体质量为 m ，弹簧的弹性系数为 k ，当物体被 F 拉至离静平衡位置 O 的距离为 x_0 后，自由释放，则其运动方程为

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (1.1-1)$$

由此式可确定物体在任意时刻 t 的精确位置 $x(t)$,进而也可以确定其在任意时刻 t 的速度 $\dot{x}(t)$ 与加速度 $\ddot{x}(t)$,所以,该物体的振动是确定性的.若按(1.1—1)式作出曲线即如图1.1—2所示.

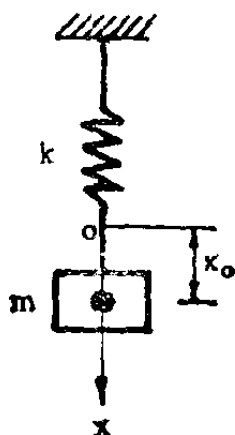


图1.1—1

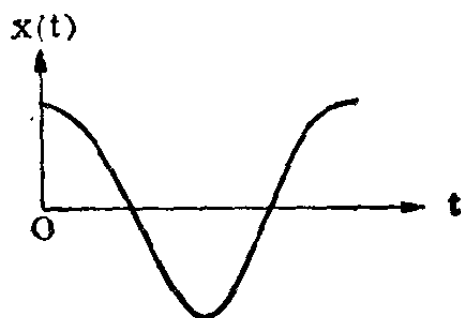


图1.1—2

由此可见,其运动规律是完全确定的.这种定则振动是古典振动理论研究的对象.

然而,随机振动与此大不相同.例如,由于道路不平,它将给车轮以时间间隔不规则、量值大小不定的冲击激励,从而引起车辆的振动,就是一种随机振动.现测得车辆上某点的运动图象如图1.1—3所示.

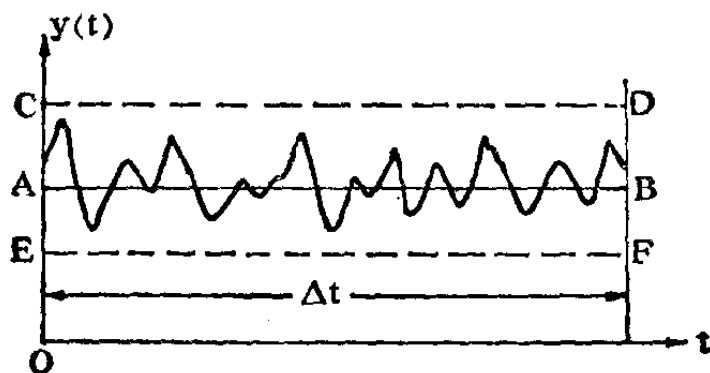


图1.1—3

从这个记录可以发现,振动的大小是随着时间而不规则变

化的。然而我们无法用一个确定性的函数来描述它，因此，我们也就无法预测在记录时刻 Δt 之外的任一时刻它会取怎样的数值。另外，在整个振动过程中，任意取出两个相等的时间间隔所记录的图象来进行比较，可以发现，它们绝不会是完全相同的，即记录是不会重复的。所以，我们说，这种振动的第一个特征是它们的不可重复性与不可预测性，或者说，这种振动具有随机性。

但是，这并不意味着这种振动是毫无规律的，更不能认为它是不可描述的。比方说，如果我们有理由相信，产生振动的机理如道路条件是不变的，则可期望在记录时间 Δt 之外，振动 $Y(t)$ 的某些基本特征也将是保持不变的。例如，只要记录时间 Δt 不是太短，则 $Y(t)$ 在 Δt 之外的平均值将和它在 Δt 之内的平均值（图中以 AB 表示）相同，并且 $Y(t)$ 的那些峰值仍将落在 CD 与 EF 所表示的范围内（除非可能发生的非常例外的个别情况）等等。因此，我们可以借助统计的概念，根据在时间间隔 Δt 上的记录 $Y(t)$ 的特性，来对整个振动过程 $Y(t)$ 的基本特性作出比较精确的描述。也就是说，这种振动具有一定的统计规律性，可以用随机过程理论来描述，这是它的又一个特征。

根据随机振动的特征，我们就可以来考察各种实际系统的振动，看它是属于定则振动还是属于随机振动。但是不要认为，凡是波形复杂的振动就是随机振动。不错，随机振动是复杂的，然而复杂并不等于随机。也就是说，随机是“概率”的意思，而不是复杂的意思。

在工程中，一个具体系统的振动往往是很复杂的。它同时受着许多因素的影响，其中有的因素是确定性的、可以估计的，也有的因素是随机的、无法估计的。因此，一切实际系统的振动都具有一定的随机性。也就是说，严格地讲，一切实际的振

动都是随机振动。只是当对问题解答的精度要求不高，可以略去次要的随机因素的影响时，就把问题简化为确定性的罢了。

随机振动理论的应用十分广泛。它的早期发展起因于高速飞行——飞机与火箭。五十年代以后，才开始应用于土木，机械等工程领域，以解决诸如随机激振源的调查，关于在随机激励（如地震、海浪、突风等）作用下结构的振动计算、疲劳强度设计、可靠性、噪声与隔振以及随机振动实验等一系列的动力学问题。至今，它已发展成为一门公认的课程。短短几十年的历史证明，这一新兴课题是很有生命力的，它使得工程与科学的各个实用部门都得到了显著的进展。目前，世界各国都正把随机振动理论介绍给大学生，看来，作为当代一个受过良好教育的工程师来说，这方面的概念与方法已经成为不可缺少的素养。本书的目的就是试图给读者提供关于这一新兴课题而又有着实用价值的知识。

§ 1.2 振动系统的力学模型

我们所讨论的振动基本上是一个工程问题。与其它的工程学科一样，我们研究振动也是借助于模型的。

所谓“模型”，就是从实际问题中，经过去粗取精而抽象出来的东西。例如，力学中的质点、刚体、梁、板和壳等都是模型。这种科学的抽象能更深刻、更正确、更完全地反映实际问题的本质。

我们知道，任何机器、结构或它们的零部件，由于都具有弹性和质量，都可能发生振动。我们称之为“振动系统”，也可简称“系统”。由于系统振动时，不可避免地会遇到阻尼，因此，弹性、质量和阻尼是振动系统的基本参数。系统的振动情况与

这些参数有着直接的关系。于是，在振动研究中，我们必须建立描述这些基本参数的力学模型，即质量模型、弹簧模型与阻尼器。

所谓质量（包括转动惯量），是指物体惯性大小的量度。因此，质量模型只具有惯性；弹性是指物体产生变形的难易程度。因此，用弹簧模型来描述它，即弹簧模型只具有弹性，而其本身的质量可略去不计。最常见的是弹性力与变形的一次方成正比的弹簧，我们称之为线性弹簧；阻尼是指消耗振动能量的因素。我们用阻尼器模型来描述它，即阻尼器模型是既不具有惯性，也不具有弹性的一种耗能元件。它在系统振动时产生阻力。最常见的阻尼器是它产生的阻力与系统运动速度的一次方成正比，称之为线性阻尼器。

一般说来，任何即使是很复杂的振动系统，它们的振动模型都可以归结为上述三种基本模型的组合。在处理实际问题时，往往根据系统的上述三种参数的不同情况，将振动系统的力学模型进行分类，从而也将振动按系统进行了分类。

一、按系统参数在空间的分布情况分为

1. 离散系统或称集中参数系统 离散系统是由集中参数元件组成的，这在工程中有着广泛的应用。例如，安装在混凝土基础上的精密机床，为了隔振的目的，在基础下面往往还铺有弹性衬垫，如图1.2—1(a)所示，在振动分析中，需要考察机床与基础的整体振动。此时，机床与基础可视为刚体，起着质量的作用，弹性衬垫起着弹簧的作用，衬垫本身的内摩擦以及基础与周围约束之间的摩擦起着阻尼的作用，从而，这一系统的力学模型可以归结为图1.2—1(b)所示的集中参数系统。以后我们会知道，对于离散系统的振动，在数学上用常微分方程来描述。

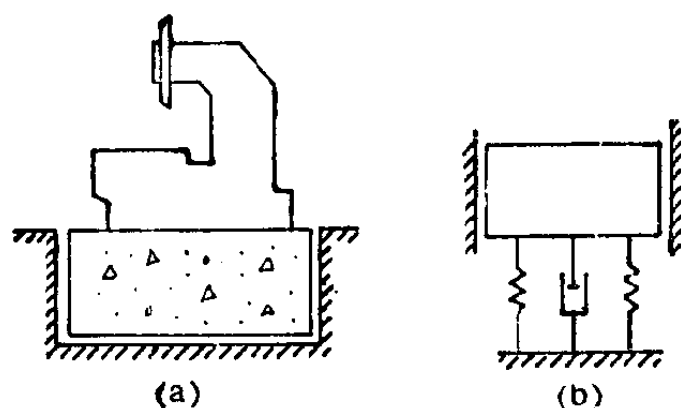


图1.2—1

2. 连续系统或称分布参数系统 连续系统是由分布参数元件组成的。具体地说，它是由弹性体元件组成的。所谓弹性体是指质量、弹性与阻尼都是连续分布的一种力学模型。典型的弹性体元件有杆、梁、轴、板与壳等等。工程上有许多实际的振动问题需要简化为连续系统模型。例如，在研究涡轮叶片的振动问题时，往往将它简化为变截面梁或壳。以后我们也会知道，对于连续系统的振动，在数学上用偏微分方程来描述。

二、按系统的自由度分为

1. 单自由度系统 确定系统振动时任意瞬时的几何位置所需要的独立坐标个数叫做系统的自由度。只需要一个独立坐标就可以确定其位置的系统叫单自由度系统。例如图1.2—1(b)所示的弹簧-质量系统的振动就是单自由度振动。单自由度系统的振动的研究，不仅可以解决许多比较简单的实际问题，而且它是研究更为复杂的振动的基础。

2. 双自由度系统 只需要两个独立坐标就可以确定其位置的系统叫双自由度系统。对双自由度系统振动的研究不难推广到多自由度系统中去。

3. 多自由度系统 需要多于两个的独立坐标才可确定其

位置的系统叫多自由度系统。

上述1、2、3种情况，统称为有限自由度系统，它们都是集中参数系统。

4. 无限自由度系统 需要无限多个独立坐标才能确定其位置的系统，即在任一瞬时，其各点的位移与各点的坐标成一定的函数关系的系统。例如弹性梁、板和壳的振动就属于无限自由度振动。

三、按描述系统所得方程分为

1. 线性系统 若描述系统所得的方程是线性方程(包括代数方程、微分方程、差分方程)，则该系统叫线性系统。这种系统所产生的振动就叫做线性振动。

线性振动的特点是：系统的固有频率只决定于结构本身的参数，而与振幅无关。当系统发生多种振动时，可以运用迭加原理。这一点是很有意义的。在工程领域里，常见的大多数机械系统与结构，在发生微振动时，其位移与速度的变化范围很小，可以认为系统的结构参数不随运动状态而改变，即系统的振动可以归结为线性振动来处理。

2. 非线性振动 只能用非线性方程描述的系统叫非线性系统，这种系统所产生的振动就叫非线性振动。非线性振动的固有频率与振幅有关，且系统发生多个振动时，不能使用上述的迭加原理。本书不涉及非线性问题。

严格说来，工程领域中的振动系统都是非线性的，只是我们把它线性化以作近似描述罢了。但是，盲目地把一切问题都线性化，不但会影响问题解答的精确度，而且往往会使问题的基本性质发生改变，导致荒谬的结论。

四、按系统参数是否随时间变化分为

1. 定常系统 若系统参数在振动过程中，可认为是不随时

间而改变的，则该系统称为定常系统。

2. 非定常系统 若系统参数在振动过程中是随时间而改变的，即参数为时间 t 的函数，该系统是非定常系统。

五、按系统参数的描述方法不同分为

1. 确定性系统 若系统的参数是用确定性函数来描述的，则为确定性系统。

2. 随机系统 若系统参数是随机变量，只能用统计方法来描述，则称为随机系统。

对于一个实际的振动系统，究竟应该采用什么样的力学模型，这完全视具体情况而定。也就是说，即使是同一个系统，在不同的条件下，也可以采用不同的模型。例如，当系统作强迫振动时，在远离共振区的条件下，阻尼的影响可略去不计，从而可使计算大为简化；但在研究共振现象时，阻尼将起着决定性的作用，绝不可略去不计。又例如，在计算简支梁自由振动的最低固有频率时，可以假定梁的一半质量集中在梁的中点而得到很准确的结果；但在讨论梁在突加荷载作用下的响应时，仍作上述假定则会导致完全错误的结论。

实践是检验真理的唯一标准。我们根据实际问题建立系统模型，进而由这种模型分析所得出的结论是否正确，还必须通过科学试验与生产实践来检验。只有那些与客观实际相符合或大体上相符合的模型，才能认为是正确的或基本上是正确的。

除非线性系统外，本书将逐一地讨论上述各种系统模型的随机振动问题。

§ 1.3 随机振动产生的原因及其危害

一、随机振动产生的原因 在 § 1.1 末已经指出，对于具体