

数学物理方程

陈昌平 许明 王学锋 徐元钟 编
汪礼初 蒋鲁敏 王继延

高等学校试用教材



等教育出版社

高等学校试用教材

数学物理方程

陈昌平 许明 王学锋 徐元钟 编
汪礼初 蒋鲁敏 王继延

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是编者在华东师范大学数学系讲授〈数理方程〉的讲稿基础上修改而成的,可供一学期 60 学时的课程作为教材使用。

本书主要讨论三类典型的数理方程。也介绍了一般区域上 Dirichlet 问题的 Perron 解法和 Cauchy-Ковалевская 定理,学时不够可以不学。

附录附有“特殊函数”与“历史简介”等。各节、各章配有适量的练习与习题,书末附有答案或提示。

本书选材适当,叙述详尽,通俗易懂,可以作为师范学院,师专的试用教材,也可作为自学教材。

高等学校试用教材

数 学 物 理 方 程

陈昌平、许明、王学锋、徐元钟
汪礼祁、蒋鲁敏、王继延 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 11.25 字数 270 000

1989 年 2 月第 1 版—1989 年 2 月第 1 次印刷

印数 0001—2,690

ISBN7-04-001143-3/O·215

定价 2.60 元

序 言

本书是在编者多年讲授数理方程课的讲稿基础上改写而成的,其目的是供一学期 60 学时的课程作为教材使用。编者力求精选内容,使学生在有限的课时内学到必需的基础知识,掌握基本的解题方法,以培养解决实际问题的能力和为进一步学习偏微分方程理论提供基础;在叙述上力求通俗易懂,便于学生自学。

本书主要讨论三类典型的数理方程;所使用的工具不超出古典分析的范围。为了扩大学生的眼界,也介绍了一般区域上 Dirichlet 问题的 Perron 解法和 Cauchy-Ковалевская 定理。如果学时不够,这些内容可以略去不学。为了查阅方便,添加了特殊函数作为附录 II,其中的部分内容也可作为正文中基本内容的补充材料。此外,依照一些同志的建议,还添加了历史简介作为附录 IV,供读者参考。每章都配备了一定数量的习题,书末附有答案和提示,供学生自学使用。

本书成稿与修改过程中得到许多同志特别是齐民友,李大潜两位教授的指教,关于 Duhamel 原理和 Huygens 原理的物理解释是齐民友教授提供的,编者对他们的热诚帮助表示深切的感谢。

限于编者的水平,疏漏与错误之处在所难免,我们虔诚希望读者给予批评和指正。

编 者

1986 年 8 月

目 录

第一章 引言	1
§ 1 方程的推导	1
1.1 均匀弦的横振动与波动方程 (1)	
1.2 热传导方程 (5)	
1.3 Laplace 方程和 Poisson 方程 (9)	
练习 1-1 (10)	
§ 2 偏微分方程的一些定义	11
练习 1-2 (12)	
§ 3 定解条件与定解问题	12
3.1 弦振动方程的初始条件和边界条件 (13)	
3.2 热传导方程的初始条件和边界条件 (17)	
3.3 定解问题的提法 (19)	
练习 1-3 (20)	
§ 4 两个自变量的二阶线性方程的分类与化简	21
4.1 两个自变量的二阶线性方程的分类 (22)	
4.2 两个自变量的二阶线性方程的化简 (24)	
练习 1-4 (32)	
§ 5 多个自变量的二阶线性方程的分类	32
练习 1-5 (38)	
§ 6 定解问题的适定性	38
6.1 定解问题的适定性概念 (38)	
6.2 不适定问题举例 (41)	
6.3 不适定问题有待研究 (43)	
习题 1	44
第二章 波动方程	47
§ 1 弦振动方程的初值问题	47
1.1 无界弦的自由振动 d'Alembert 公式 (47)	
1.2 波的传播 依赖区域 决定区域和影响区域 (49)	
1.3 迭加原理 (55)	
1.4 无界弦的受迫振动 (57)	
1.5 齐次化原理 (Duhamel 原理) (61)	
练习 2-1 (64)	
§ 2 高维波动方程的初值问题	65
2.1 三维齐次波动方程初值问题的球平均法 (65)	
2.2 三维非齐次波动方程初值问题的解 推迟势 (71)	
2.3 二维波动方程初值问题的降维法 (73)	
2.4 依赖区域 决定区域 影响区域与特征锥 (76)	
2.5 三维波与二维	

波在传播上的区别 Huygens 原理 波的弥散(80) 练习 2-2(83)	
§ 3 半无界弦的混合问题	84
练习 2-3(89)	
§ 4 有界域上混合问题的分离变量法	89
4.1 齐次边界条件下有界弦的自由振动 分离变量法(90) 4.2 解的存在性(93) 4.3 解的物理意义(100) 4.4 齐次定解条件下有界弦的受迫振动 齐次化原理 (102) 4.5 非齐次边界条件下非齐次方程的混合问题 边界条件的齐次化(104) 4.6 分离变量法的进一步应用举例——矩形膜的横振动(106) 练习 2-4(109)	
§ 5 波动方程定解问题解的唯一性与对初始条件的连续依赖性	110
5.1 二维波动方程的能量积分 能量不等式 混合问题解的唯一性与对初始条件的连续依赖性(110) 5.2 波动方程初值问题解的唯一性与对初始条件的连续依赖性(117)	
习题 2	123
第三章 热传导方程	129
§ 1 有界域上的混合问题和分离变量法	129
1.1 齐次边界条件下齐次热传导方程混合问题的分离变量法(130) 1.2 解的存在性(132) 1.3 齐次定解条件下非齐次热传导方程的混合问题 齐次化原理(134) 1.4 边界条件的齐次化(135) 练习 3-1(137)	
§ 2 Fourier 变换和 Laplace 变换	138
2.1 Fourier 积分和 Fourier 变换(138) 2.2 Laplace 变换(143) 2.3 Fourier 变换和 Laplace 变换的基本性质(148) 练习 3-2(154)	
§ 3 Fourier 变换和 Laplace 变换的应用	154
3.1 应用 Fourier 变换解初值问题(154) 3.2 解的存在性(157) 3.3 应用 Laplace 变换解半无界域上的混合问题(162)	
§ 4 极值原理与解的唯一性和稳定性	164
4.1 极值原理(164) 4.2 混合问题解的唯一性和稳定性(166) 4.3 初值问题解的唯一性和稳定性(167)	
习题 3	170
第四章 Laplace 方程	176
§ 1 定解问题的提法	176

练习 4-1(179)	
§ 2 分离变量法	180
2.1 矩形区域上的 Dirichlet 问题(180)	
2.2 圆上的 Dirichlet 问题(184)	
2.3 Poisson 方程的 Dirichlet 问题(192) 练习 4-2(194)	
§ 3 基本解 Green 公式与 Green 函数	195
3.1 基本解(195)	
3.2 Green 公式与调和函数的积分表达式(195)	
3.3 Green 函数(199) 练习4-3(210)	
§ 4 调和函数的基本性质 边值问题 解的唯一性和稳定性	210
4.1 三维空间区域上调和函数的基本性质(210)	
4.2 边值问题解的唯一性和稳定性(213)	
4.3 调和函数的另外一些重要性质(219)	
* § 5 一般区域上的 Dirichlet 问题解的存在证明 (Perron 方法)	224
5.1 上(下)调和函数与上(下)函数及其性质(224)	
5.2 上函数集的下确界的调和性(228)	
5.3 Dirichlet 问题的解(231)	
§ 6 Poisson 方程的 Dirichlet 问题的解	233
习题 4	239
附录 I Cauchy-Ковалевская 定理	243
§ 1 实值解析函数与优函数	243
§ 2 常微分方程的解析解	246
§ 3 Cauchy-Ковалевская 定理——一阶偏微分方程情况	249
§ 4 Cauchy-Ковалевская 定理——高阶偏微分方程情况	256
附录 II, 特殊函数(一) Bessel 函数	260
§ 1 Bessel 方程的引入	260
§ 2 Bessel 方程的解	261
§ 3 Bessel 函数的递推公式	265
§ 4 Bessel 函数的生成函数和积分形式	268
§ 5 Bessel 函数的零点	270
§ 6 Bessel 函数的正交性	271
§ 7 Bessel 函数对边值问题的应用	274

附录 II₂ 特殊函数(二) Legendre 多项式	278
§ 1 Legendre 方程的引入.....	278
§ 2 Legendre 方程的求解.....	280
§ 3 Legendre 多项式.....	281
§ 4 Legendre 多项式的 Rodrigues 表达式.....	284
§ 5 $P_n(x)$ 的生成函数.....	286
§ 6 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 的正交性.....	289
§ 7 Legendre 多项式的应用——球形域内的电势分布.....	291
附录 III Fourier 变换表和 Laplace 变换表	294
附录 IV 历史简介	296
§ 1 弦振动方程与分离变量法.....	296
§ 2 热传导方程与 Fourier 级数.....	300
§ 3 Laplace 方程与势论.....	305
§ 4 Cauchy-Ковалевская 定理.....	312
§ 5 Fourier 积分.....	314
§ 6 新发展素描.....	318
文献	327
练习与习题参考答案与提示	328
索引	349

第一章 引言

数学物理方程包括描述某些物理现象的微分方程、积分方程和函数方程。本书只研究最常见的偏微分方程——波动方程、热传导方程和 Laplace(拉普拉斯)方程。通过对这些方程的研究,一方面有助于解决有关的工程技术问题,另一方面也能掌握一些数学方法,供进一步探讨工程技术与自然科学提出的新问题时参考和借鉴。

§ 1 方程的推导

1.1 均匀弦的横振动与波动方程

我们从物理假设出发来推导弦振动方程,这是一种最简单的波动方程。

考虑一根紧拉着的均匀、柔软而有弹性的轻弦。“柔软”是指发生于弦中的张力的方向总是沿着弦所在曲线的切线方向,这表示弦不抵抗弯曲;“有弹性”表示张力的的大小可以按照 Hooke(虎克)定律来计算;而“轻弦”则表示和张力相比,弦的重量可以略去不计。

设弦的长度为 l , 两端固定在 O, L 两点。由于受一垂直于 OL 方向的横向力的作用,弦在平衡位置附近作垂直于 OL 方向的微小横振动(横振动是指弦的运动发生在一个平面内,而且弦上各点的位移与弦的平衡位置相垂直)。求弦上各点的运动规律

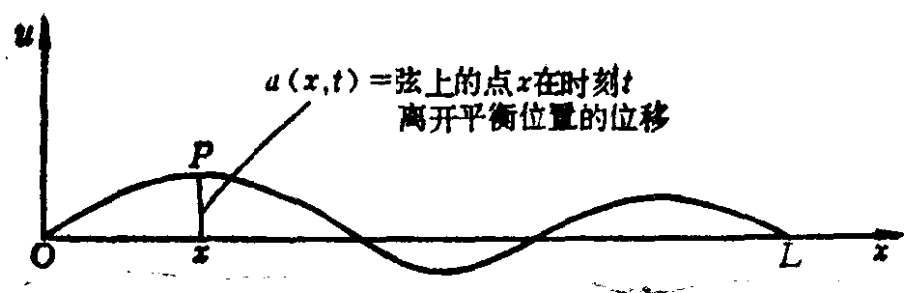


图 1.1.1 弦的横振动

(图 1.1.1)。

取弦的平衡位置为 x 轴, O 点为坐标原点, 并以 u 表示弦上 P 点在时刻 t 的横向位移, 它和点 P 的坐标 x 及观察的时刻 t 有关, 所以 $u = u(x, t)$ 。因为弦作微小的横振动, 可以认为 $u_x^2 \ll 1$, 即在计算中可以把 $1 + u_x^2$ 等同于 1 , $\sin u_x$ 等同于 u_x 等等。

我们来考虑作用在弦上任一个小弦段上的力。

1. 弦的张力 T

首先, 利用前面所说的物理假设来计算弦上某一小段的伸长。在弦上任取一小段 $\widehat{MM'}$ (设它在 x 轴上的投影为 $[x, x + \Delta x]$) (图 1.1.2), 它的弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

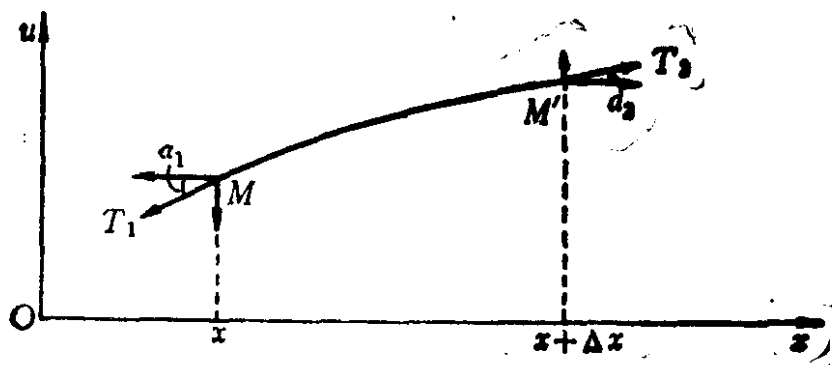


图 1.1.2 振动的小弦段

这表明在我们所假定的条件 $u_x^2 \ll 1$ 之下，可以认为这个弦段在振动过程中并未伸长；因此，由 Hooke 定律，弦上每点的张力 T 的数值不随时间 t 而改变。其次，由于弦作横振动，即小弦段在 x 轴方向没有位移，因而合力在 x 轴方向的分量为零。因为作用于小弦段 $\widehat{MM'}$ 上的力除了张力之外，在 x 轴方向的分量都是零，根据力的平衡方程，合力沿 x 轴方向的分量满足

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

因为

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sec \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx 1$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sec \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x + \Delta x, t)}} \approx 1$$

所以 $T_1 = T_2$ ，即张力 T 的数值也不依赖于 x ，从而推出 $T = \text{常量}$ 。

作用于小弦段 $\widehat{MM'}$ 上的张力沿 u 轴方向的分量是

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 \approx T [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

2. 所受外力

设弦所受横向外力的线密度(单位长度上的外力)为 $F(x, t)$ ，则小弦段 $\widehat{MM'}$ 在时刻 t 所受沿 u 轴方向的外力近似等于

$$(\Delta x) F(x, t)。$$

3. 阻尼力和重力

它们与张力、外力相比是很小的，因此在不要求十分精确的情况下可以忽略不计。

根据 Newton(牛顿)第二定律，作用于小弦段上任一方向上力的总和等于小弦段的质量与这弦段在该方向上运动的加速度的乘积，我们得到

$$(\rho \Delta x) \bar{u}_{tt} = T [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + (\Delta x) \cdot F(x, t)$$

其中，由均匀弦的假设，弦的线密度 $\rho = \text{常数}$ ； \bar{u}_{tt} 为小弦段加速度

$u_{,t}$ 的平均值。

若函数 $u(x, t)$ 二次连续可微, 应用 Lagrange(拉格朗日)中值公式, 有

$$u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t) = u_{xx}(x + \theta\Delta x, t)\Delta x, 0 < \theta < 1$$

把它代入上式, 再用 $\rho\Delta x$ 除所得式子的两边, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 此时 $\bar{u}_{,t} \rightarrow u_{,t}$, 即得

$$u_{,t} = a^2 u_{,xx} + f(x, t) \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1.1.1)$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$ 。

(1.1.1) 是弦的受迫振动方程。若弦不受外力作用, 则得到弦的自由振动方程

$$u_{,t} = a^2 u_{,xx} \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1.1.2)$$

对于弦的自由振动方程(1.1.2)有下面的直观解释。方程中 $u_{,t}$ 表示弦在 x 点的垂直加速度。因此, 方程(1.1.2)可理解为弦上每一点的加速度是由于弦张紧而产生的, 较大的凹度 $u_{,xx}$ 对应较强的力(比例常数 $a^2 = T/\rho$)(见图 1.1.3)

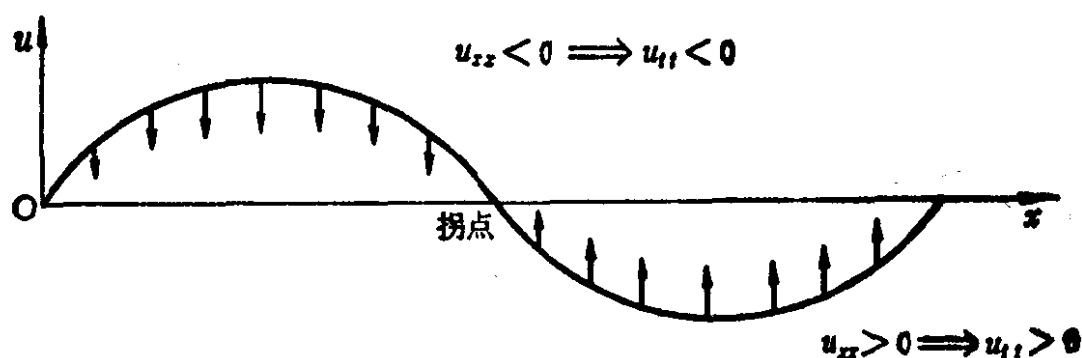


图 1.1.3 $u_{,t} = a^2 u_{,xx}$ 的解释

在有两个空间变量 x, y 的情形, 类似地可导出二维波动方程

$$u_{,t} = a^2 (u_{,xx} + u_{,yy}) \quad (\text{自由振动}) \quad (1.1.3)$$

$$u_{,t} = a^2 (u_{,xx} + u_{,yy}) + f(x, y, t) \quad (\text{受迫振动}) \quad (1.1.4)$$

它们在物理上描述了薄膜的微小横振动, 因此又称为膜振动方程。

在三个空间变量 x, y, z 的情形, 也有三维波动方程

$$u_{,tt} = a^2(u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) \quad (\text{自由振动}) \quad (1.1.5)$$

$$u_{,tt} = a^2(u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) + f(x, y, z, t) \quad (\text{受迫振动}) \quad (1.1.6)$$

它们在物理上描述了空间电磁波的传播等现象。

还有一些可用波动方程描述的物理现象, 我们把它们列入习题。

1.2 热传导方程

在数学分析中, 我们曾经学过如下的散度定理。

定理1.2.1(散度定理) 设 Ω 是三维 Euclid(欧几里得)空间 R^3 中一个有界开域, Ω 的边界 $\partial\Omega$ 分片光滑, 记 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 。设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内有一阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz \\ = \iint_{\partial\Omega} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

其中, $\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z)$ 是 $\partial\Omega$ 上面积元 dS 的外法线方向的方向余弦。

下面利用这个定理推导热传导方程。

设 R^3 的某区域 G 内充满某种介质, G 内一点 (x, y, z) 在时刻 t 的温度用函数 $u(x, y, z, t)$ 来表示。我们要建立温度函数 $u(x, y, z, t)$ 所满足的微分方程。

在 G 内任取一个区域 Ω , 使 $\bar{\Omega} \subset G$, 它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑闭曲面, $\partial\Omega$ 上面积元 dS 的外法线向量记作 n (图 1.1.4)。根据 Fourier(傅里叶)传热定律, 在无穷小时间间隔 dt 内, 从 Ω 内经过 dS 流

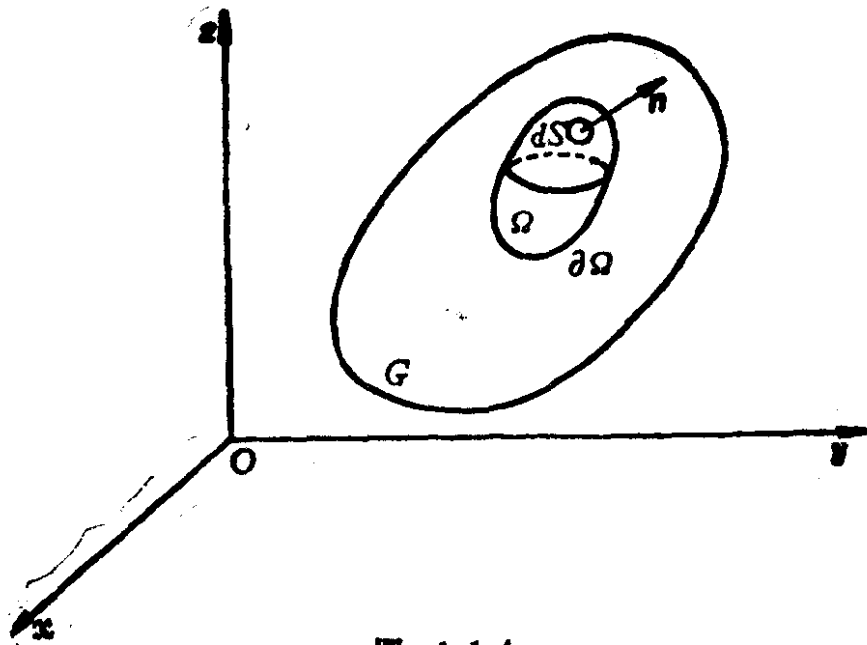


图 1.1.4

出的热量 dQ 与温度沿 dS 的外法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比, 即

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt$$

其中 $k(x, y, z)$ 是介质在点 (x, y, z) 处的热传导系数, 它总是取正值; 负号表示热量总是从温度高处传到温度低处, 即热量传播的方向与温度梯度的方向刚好相反。因此, 在时间间隔 dt 内经过 dS 流入 Ω 的热量是

$$dQ = k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt$$

而从时刻 t_1 到时刻 t_2 经过 $\partial\Omega$ 流入 Ω 的全部热量应是

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial\Omega} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt$$

这些流进来的热量使 Ω 内介质温度升高。另一方面, 由比热定律, 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间中, Ω 内介质温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 升高到 $u(x, y, z, t_2)$ 所需要吸收的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz$$

其中 $c(x, y, z)$ 、 $\rho(x, y, z)$ 分别是介质在 Ω 内的点 (x, y, z) 处的比热和密度。根据热量平衡原理, 应有 $Q_1 = Q_2$, 即

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial\Omega} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt \\ &= \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

假定函数 $u(x, y, z, t)$ 对任意的 $t > 0$ 在 G 上有关于 x, y, z 的二阶连续偏导数 (记为 $u \in C^2(G)$), 函数 $k(x, y, z)$ 在 G 上有一阶连续偏导数 (记为 $k \in C^1(G)$), 就能对 (1.1.8) 式的左边在区域 Ω 上应用散度定理而得到

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial\Omega} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \right\} dt \end{aligned}$$

再假定函数 $u(x, y, z, t)$ 对任意的 $(x, y, z) \in G$ 在 $[t_1, t_2]$ 上有关于 t 的一阶连续偏导数, 并对 (1.1.8) 式的右边应用 Newton-Leibniz (牛顿-莱布尼兹) 公式就有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt \right\} dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz \right\} dt \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_{\Omega} \left\{ c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\} dx dy dz \right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

由于区域 Ω 和时间间隔 $[t_1, t_2]$ 都是任意选取的, 因而^①

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$(x, y, z) \in G, t > 0 \quad (1.1.9)$$

这就是我们所要求的温度函数 $u(x, y, z, t)$ 所满足的微分方程, 它称为热传导方程。

如果介质是均匀和各向同性的, 则 c, ρ, k 都是大于零的常数。这时热传导方程可改写成

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (x, y, z) \in G, t > 0 \quad (1.1.10)$$

其中 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ 。

如果 G 内有热源, 设热源强度为 $F(x, y, z, t)$ (即在时刻 t , 在点 (x, y, z) 处的单位体积在单位时间内发出的热量), 且 $F(x, y, z, t) \in C(G)$, 则(1.1.8)的左边应该等于

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t) \right] dx dy dz \right\} dt$$

在这种情况下, (1.1.10) 成为

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in G, t > 0$$

$$(1.1.11)$$

其中 $f(x, y, z, t) = \frac{1}{c\rho}F(x, y, z, t)$, (1.1.11) 称为有热源的热传导方程。(1.1.10)、(1.1.11) 是三维的情形。如果考虑平行于 xOy 平面的一块薄板内的温度分布, 并假定上下两面都是绝热的, 温度

① 假如被积函数不恒为零, 则有 $(x', y', z') \in G$ 及 $t' > 0$, 使被积函数在 (x', y', z', t') 不等于零 (例如大于零)。由被积函数的连续性, 如果取 Ω 为含 (x', y', z') 的很小的球, $[t_1, t_2]$ 为含 t' 的很小的区间, 则上面的积分将不等于零。

函数只与 x, y, t 有关, 与 z 无关; 若有热源时, 热源强度也只和 x, y, t 有关, 与 z 无关, 就得到二维热传导方程

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad (\text{无热源}) \quad (1.1.12)$$

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad (\text{有热源}) \quad (1.1.13)$$

如果考虑母线平行于 x 轴的柱形区域内的温度分布, 并假定它的侧面绝热, 每个平行于 yOz 平面的截面上温度分布都相同(即 u 只与 x, t 有关, 与 y, z 无关); 若有热源时, 热源强度也只和 x, t 有关, 与 y, z 无关, 则得到一维热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (\text{无热源}) \quad (1.1.14)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{有热源}) \quad (1.1.15)$$

与热传导方程的推导相类似, 可以导出扩散方程。请读者参阅习题。

1.3 Laplace 方程和 Poisson 方程

在上面研究的温度分布问题中, 如果经过相当长时间后, 区域 G 内各点的温度随时间的改变所发生的变化已不显著, 在数学上可近似看作 $u_t = 0$ (即温度函数 u 与时间 t 无关, 仅为 x, y, z 的函数)。这时, 我们就说温度分布趋于定常。方程(1.1.10)则变为

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (1.1.16)$$

通常称(1.1.16)为三维 Laplace 方程。在有热源(与时间无关)而且温度分布是定常的情况下, 方程(1.1.11)成为

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \bar{f}(x, y, z) = 0$$

它也可以写成

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \quad (1.1.17)$$

其中 $f(x, y, z) = -\bar{f}(x, y, z) = -\frac{F(x, y, z)}{k}$, $F(x, y, z)$ 是热源强度。

通常称(1.1.17)为三维 Poisson (泊松) 方程。