應用數學

錢偉長 著

安徽科學技術出版社

●錢偉長 著

應用數學

安徽科學技術出版社

（皖）新登字02号

责任编辑：王春阳
封面设计：王国亮
责任校对：杨小红

应用数学

钱伟长 著

*

安徽科学技术出版社出版
（合肥市九州大厦八楼）
邮政编码：230063
安徽省新华书店发行 商务印书馆上海印刷厂排版
安徽新华印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32 印张：29.875 插页：2 650千字
1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷
印数：2 000
ISBN 7-5337-0663-3/O·22 定价：28.00元

序　　言

从长期审阅文稿、科技报告中看到，在目前科技工作中存在着运用数学工具的种种缺点．这并不是说，我国科学工作者的数学理论水平不够；恰好相反，根据过去和当前我国高等学校理工的课程设置和教学大纲看，数学理论学得不少，并有许多高等的和专用的数学课程，在这一方面甚至有时可能学得很深．问题的症结所在，是不把数学和物理问题或技术问题相结合，通俗些讲就是理论脱离实际．其中包括：不能正确处理物理量和数学量的关系；不会运用锐利的武器无量纲量来处理问题，从而比较其大小，决定取舍；有时不会正确建立物理方程，甚至有的方程各项之间量纲不等；不会处理坐标，不懂得在处理各项几何问题中运用张量分析；不会处理实际数据，有些很好的实验数据，如果处理不当，便可能导致错误的结论．在一些数值计算中，多数人不明白计算误差的积累，有一些计算机的计算结果，计算误差的积累业已超出允许的范围；在数值计算上，因为用计算机，常常把计算结果写成七八位数，其实原始的技

术参数，一般的只正确到三四位数，利用三四位数的原始数据竟然算出了七八位数的结论，这是毫无意义的；许多实验数据由于不正确的平均而造成了误差很大的结论，更不会正确分析实验诸因素的误差从而进一步改进实验；在用曲线匹配实际数据时，不知道用最小二乘方法，只是通过拼凑达到目的；不知道正确地建立物理方程的过程，所建方程往往是错误的；求根用拼凑的方法，很不正确，在有限元计算展开以后，矩阵计算问题更严重，尤其是接近于零的不良矩阵经常发生．所有这些问题，多得不胜枚举．

作者在50年代就注意到上述问题，它是我们教学上必须解决的问题．因此自1955年夏季起，为教师进修就在清华大学开讲《应用数学》这门课．每星期一次晚间讲两小时．当时听课的约400人；讲课一年半，写成第一种讲义．其后，为中国科学院（力学研究所）和高教部（由清华大学执行）合办的全国力学研究班，再次讲这门课，为此重写，补充了许多材料，写成第二种讲义，并由当时北京大学教师叶开源同志准备了习题；当时该班的班长是现任上海交大党委书记何友声同志，课代表是现在四川绵阳29基地的领导之一张涵信同志．这份讲义印了不少份分发给学员们．1957年春，科学出版社曾约稿出版，到1958年春业已排好版，校过清样，但因反右问题毁版停发．力学研究班的课也另由教师担任．我在班上原定克服数

学上的理论脱离实际的教学方针，也半途而废了.

1960年，学校为“落实政策”，组成一个力学教师培训班(有10位学员)，使我重又在新的条件下再讲《应用数学》. 当时，上述的各种弊端，在国内变本加厉. 而且由于计算机开始传入国内，数值计算问题更为严重. 为此，我针对时弊，基本仍按前两次讲课的方针，解决数学运用中的理论脱离实际问题，而加强实用性的方向. 同时，为迎接计算机时代的来临，加强了计算数学的内容. 当时国内对计算数学尚无现成材料，为此，我化费不少精力编写了第三种讲稿. 在班上有两位学员是较为用心努力的，其中一位就是现任上海市应用数学和力学研究所副所长赵兴华教授. 他是班长，每月必来一两次面谈，每次都要提出几十个问题以求探讨. 他这样认真好学的态度，在当时那样荒漠般的学术环境中，实在是难得的.

其后，在文化大革命中，三种讲义丢失了一种. 在文化大革命以后，我曾多次在昆明、重庆、武汉、无锡、绵阳、兰州、天津、贵阳等地讲学，有不少内容和应用数学有关. 现在对第三稿又加增删，形成本书. 至于有关变分法、有限元、奇异摄动理论等材料，由于份量太重，决定另写专集出版.

本书是根据这些实践基础，和30年来的教学心得体会写成，现在由安徽科学技术出版社约稿出版. 当前出版这样一本“离经叛道”的应

用数学书籍，还是有现实意义的．特此向出版社致谢．

钱伟长

（上海工业大学）

1990年1月20日于北京

本书的相当一部分在出版中，承兰州大学力学系主任叶开源教授协助整理，特此致谢．

钱伟长附志

1990年冬于上海

目　　录

第　一　章

无穷级数及其应用

§ 1.1　应用数学的范围

早在 18、19 世纪，工程和物理的发展曾经推动了数学，尤其是分析数学的发展．那时不少有名的物理学家、力学家和工程学家，往往也是有名的数学家．但是到了 19 世纪末叶，由于近代科学要求更细致的分工，工程、物理和数学便向着不同的途径发展，因此它们之间，开始有了较大的分野，工程和物理要求数学处理更具体的问题，数值计算和近似计算便是首先由工程学家和物理学家开始运用，后来经过数学家的整理，因而发展成为一门学问．到现在，人们常常把数值计算、近似计算和数学物理方程等合在一起叫做应用数学．也有人把应用数学当作处理力学、电磁辐射、场论、光学设计等问题的数学．

在近数十年来，电子计算机的迅速发展，使应用数学进入了一个新的领域，大大地扩大了人类运用数学计算处理问题的范围．应用数学业已从解线性的简单问题向着解非线性的大量复杂问题的途径迈进．我们常常把运用电子计算机的数学称为机械数学或计算数学．

应用数学的目的，是为了更有效地处理实际问题中量的问题，但是，在实际的问题里，数量问题永远带有近似的性质，所以应用数学的重点就是研究这些近似的可靠性和误差．

我们祖国古代数学家，就一向以解决实际问题作为数学发展

的内容的．譬如，九章算术就是古代人民为了分田、运输、施工、度量等目的而发展的数学．我们古代数学家也曾成功地创造了很多近似的计算方法．

§1.2 无穷级数

无穷级数的展开及其收敛性在应用数学中占很重要的地位．首先，在处理实际问题中，有不少物理量是作为微量来处理的，我们一般都将物理方程展开为这些微量的级数，并取其前几项进行计算．这样做是不是合理，要看这种展开是不是收敛，后面的无穷项是不是可以略去而定．例如梁的静不定方程，实质上就是按挠度 w 为微量展开而得到的级数的第一项．胡克定律也是广义应力应变关系当应变为微量时展开的第一项．其次，在求解方程时，我们将用各种各样的级数来进行求解．这种解是否有效，不但要看它是否收敛，而且还要看它是否收敛得很快．因此在纯粹数学的理论中，往往满足于知道是否收敛就足够了，但在实际问题的运算中，还要进一步考虑，怎样使级数有足够快的收敛，也就是要有改进收敛速度的办法．第三，有不少近似计算的理论，是建立在微量的展开理论基础上的．仅此数端，就足够说明无穷级数在应用数学中的重要性了．

在这一章中，我们将讨论无穷级数的收敛性，改进收敛性的简单方法，及其有关的应用．顺便将讲一下基本超越函数．这是引论性质的，级数的进一步的讨论，将在以后各章中引入．

§1.3 关于无穷级数的定义及基本概念

序列 按一定的规律排列的数项称为序列．例如：

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25 \tag{1.1}$$