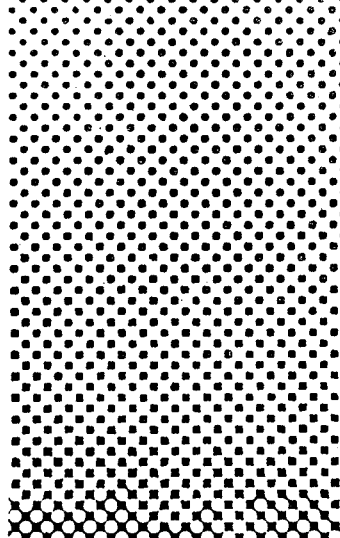


数学 习题 理论

SHUOXUE
XITITHE
LILUN

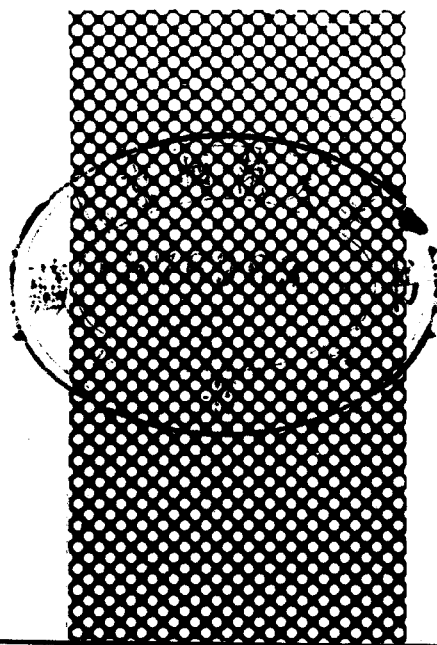
· 戴再平 著 ·
上海教育出版社



数学习题理论

· 戴再平 著 ·

上海教育出版社



数学习题理论

戴再平著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.75 插页 5 字数 158,000

1991年3月第1版 1991年5月第1次印刷

印数 1—2,400本

ISBN 7-5320-2129-7/G·2068 定价: 2.90元

1991/3/27

自序

对习题的广泛而深入的研究是当代中国数学教育的一大特色,但人们的注意力似乎集中于解法方面.其实对于一个数学教师来说,从数学习题的功能、结构、方法等理论问题上深入探讨,乃是提高素质和职业技能的更为重要的方面,即使是解法,掌握高层次的解题策略也比掌握低层次的具体解法意义更大.笔者深感,在我国丰富的解题实践基础上,对数学习题的有关理论问题进行反思,通过归纳、分析、批判等方法,形成系统的学问,这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切要求,也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来,形成独立的科学体系的一种历史的必然.

本书反映了笔者自1982年以来就数学习题理论方面所进行的研究工作,这些工作的不尽的源泉是我国60万中学数学教师的辛勤劳动.本书的主要内容曾在浙江教育学院经过五年的教学实践的检验.笔者要特别感谢浙江教育学院对形成和出版本书的一贯的鼓励和支持.必须提到的是,本书第三章第四节是笔者与时承权副教授共同研究的成果;对于第五章的内容,章建雄副教授曾提供了不少精辟的见解和有益的建议.至于本书所引用的众多的成果,我们就恕难对有关的作者一一致谢了.

数学习题理论是一个新的概念,这个概念的内涵和外延目前尚未得到国内外专家的探讨,笔者深知目前所建立的理论框架是初步的,不完善的,但是形势的需要迫使我们不得不先作抛砖之

举。“始生之物，其形必丑。”我们热切地期待着同行和专家的斧正。

戴 再 平

1989年5月

目 录

第一章 引论	1
第一节 建立数学习题理论的必要性	1
第二节 问题是数学的心脏	3
第二章 数学习题的分类和功能	9
第一节 数学习题的分类	9
第二节 数学习题的功能	18
第三章 数学习题的科学性	24
第一节 有关的概念必须是被定义的	25
第二节 有关的记号必须是被阐明的	27
第三节 条件必须是充分的、不矛盾的	29
第四节 恒等式与条件等式中的条件不足问题	37
第五节 条件必须是独立的、最少的	41
第六节 叙述必须是清楚的	44
第七节 要求必须是可行的	46
第四章 数学习题的编制	49
第一节 演绎法	51
第二节 基本量法	54
第三节 倒推法	60
第四节 变换条件法	66
第五节 类比与推广	74
第六节 演变	79
第七节 模型法	88

第五章 数学习题的解题策略	93
第一节 解题策略的概念和发现过程	94
第二节 枚举法	102
第三节 模式识别	105
第四节 问题转化	108
第五节 中途点法	112
第六节 以退求进	118
第七节 推进到一般	123
第八节 从整体看问题	126
第九节 正难则反	129
第十节 解题策略的可训练性	135
第六章 数学解题的错误分析	141
第一节 知识性错误	143
第二节 逻辑性错误	146
第三节 策略性错误	153
第四节 心理性错误	159
第五节 潜在假设	164
第六节 数学习题的检验	172
第七章 数学选择题	180
第一节 结构和类型	180
第二节 解法	188
第三节 编制	199
第四节 可靠性和评分标准	206

第一章 引 论

数学习题理论(Mathematical Exercise Theory)是关于研究数学习题的功能、结构、方法等规律性知识的学问。

第一节 建立数学习题理论的必要性

数学,由于它具有广泛的应用价值、卓越的智力价值和深刻的文化价值,因此在基础教育中占有特殊重要的地位。在中学的数学教育中,主导的内容不是那些正在发展中的现代数学分支,而是在人类文化宝库中业已形成的数学思想、知识和方法。在数学教育活动中,“解题”是最基本的活动形式。无论是学生的数学概念的形成、数学命题的掌握、数学方法和技能技巧的获得,还是学生智力的培养和发展,都必须通过“解题”。“解题”也是评价学生的知识和发展水平的主要手段。现代的中学数学课本都无例外地配置大量的例题和习题。余元庆认为:“习题是中学数学课本中的重要组成部分。习题配备得好不好,直接影响到学生学习质量的高低。许多优秀中学数学教师的教学质量所以高,一部分原因也是由于习题选择和处理得恰当。”(《数学通报》1980年第3期第6页。)在某些情况下,解题训练的需要甚至决定了课程和课本内容的取舍,如欧几里得几何,虽然在科学发展上它是古老的,但是由于它的智力价值,能提供不同难易程度的智力训练的题目。因此尽管近百余年以来,从英国的大数学家西尔维斯特(J. J. Sylvester)、布尔巴基学派的创始人之一迪多内(J. A. Dieudonné),到某

些中国数学家都曾经主张在中学数学课程中摒弃欧几里得几何,但是迄今为止,我们仍然没有找到理想的代替物.欧几里得几何在目前的中学数学课程中依旧占有其重要的位置.

我国中学数学界普遍重视解题,特别是近十年来,在高考制度的引导下,解题方法的研究成果相当可观,其中相当一部分已初具理论形态,不少学者和教师,已经从解法的分类深入到解题策略和思维过程的探求.数学习题的一般理论,如数学习题的科学性、数学习题的编制、数学习题的错误分析、数学习题的评价、客观性习题等也有一定的发展.尤其是1978年恢复数学竞赛以后,对竞赛命题的研究推动了数学习题理论的发展.但是我们必须看到,也有相当一部分中学数学教师沉缅于解题之中,忘记了“解答数学的习题本身不是目的,而只是一种训练手段”(J. M. 弗里德曼),这种情况,其危害性正如柯朗(R. Courant)所说:“数学的教学,逐渐流于无意义的单纯的演算习题的训练,固然,这可以发展形式演算的能力,但却无助于提高独立思考的能力.”我们甚至可以说,不能正确地对待解题,将学生的手脚束缚在题海之中,这是当前中学数学教学中亟待解决的问题.

再让我们来看几件事:

1. 目前我国三十种以上的以中学数学教育为主要内容的报刊、杂志中,数学习题文章所占的比例最大.1980年,根据张友余编的《中国中等数学文摘》(陕西科学技术出版社1983年3月第1版)辑录的当年中学数学教育文献共2140条,到1985年,仅据28种中学数学专业期刊统计,发表的文章就有3625篇,如果加上其他散见于各种报刊、杂志、书籍之中的文章,则不下5000篇.在这大量的文献中有哪些数学习题理论方面的成果?有哪些数学习题的资料经过整理可以上升到理论?目前这类文章是寥寥无几.

2. 在地区性甚至全国性的刊物、书籍和试题中不断出现错

题,屡批不绝;在不应出现成题的场合,如数学竞赛试题、高考和中考试题中的灵活题,屡次出现成题.这些现象与其说是有关人员的疏忽,还不如说是有关人员缺少评价习题科学性的理论和编制数学习题理论的指导.

3. 人们都认识到,解题是数学教师的基本功,但是目前在高等师范院校的课程中,在教师的岗位培训中却缺乏对这种基本功的系统训练,教师只能从零散的解题实践中,逐渐地积累和形成,一旦在教学中需要对学生进行指导时,便感到自身理论上的不足.

从上述情况来看,对数学习题的功能、结构、方法等理论问题进行反思,通过归纳、分析、判断等方法,形成系统的数学习题理论,这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切需要,也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来,形成独立的科学体系的一种历史的必然.

数学教育理论要成为一门独立的科学,就必须从本身的特点和实践经验出发,运用现代教学论、现代认知心理学、思维科学、系统科学等现代科学成果,通过科学的概括和整理,真正达到一种系统的、规律的、理性的认识.本书就是从“数学习题”这个领域,就有关的理论问题作出简要的叙述.

第二节 问题是数学的心脏

数学界曾经接受美国数学家哈尔莫斯(P. R. Halmos)的下述说法:数学究竟是由什么组成的?是公理?定理?证明?概念?定义?理论?公式?方式?诚然,没有这些组成部分,数学就不存在,这些都是数学的组成部分.但是,它们中的任何一个都不是数学的心脏,这个观点是站得住脚的,数学家存在的主要理由就是解题.因此,数学的真正的组成部分是问题和解.

按系统论的观点,若 S 代表某个主体, R 代表某个抽象或具体的系统的集合,则系统 (S, R) 中集合 R 称之“题系统”。如果主体接触 R 后认为其全部元素、性质及关系都是他知道的,就称 R 为稳定系统,否则便称为问题系统。问题系统以 R_0 表示。当求某个主体从 R 中确定他所不了解的元素、性质和关系时,集合 R 对该主体就变成了题。解题就是将问题系统 R_0 转变为稳定系统。

从历史上看,成书于公元一世纪前后的我国辉煌数学文献《九章算术》就是一本问题集,其中收集的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、句股九类共246个问题几乎反映了当时社会生活的各方面的实际问题,记载了世界上最先进的分数四则、比例算法及线性方程组的解法。我国南宋数学家秦九韶所著《数书九章》是又一部百科全书式的问题集,他将81个问题分成九类,其中包括对贾宪的“增乘开方法”(高次方程数值解法)的发展这样一些创造性工作,这些程序化的思想方法直至今日仍然是数学家进行研究工作吸取营养的源泉。吴文俊说过:“中国古代创造了方程术、增乘开方法等构造性的方法,它的数学基本上是构造性的。作者从事几何机器证明的研究就是在中国古代数学的启发下提出问题并想出解决办法的。”(《复兴构造性的数学》,《数学进展》Vol. 14, No. 4)在西方,成书于公元前三世纪的欧几里得《原本》已把要求作出图形的命题和要求证明的命题分开,并开创了里程碑式的公理化工作。在演绎、算法这两种倾向交替地取得主导地位的西方数学发展过程中,积累了丰富的解题知识。通过中外数学家如刘徽、秦九韶、李善兰、笛卡儿、莱布尼兹、欧拉、高斯等人的工作,我们可以看到对解题的思维策略的探讨,始终是数学发展中的一条线索。欧拉应用了从有限过渡到无限,从有限次方程过渡到无限次方程的方法,求得了伯努利(Jacob Bernoulli)没能解决的级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

迄今仍为人们所推崇,被认为是运用类比推理的典范. 笛卡尔在发明解析几何之后,进一步设想过一个包罗万象的解题方案:将任何种类的问题化归为数学问题;将任何数学问题化归为代数问题;将任何代数问题化归为方程求解. 如果我们看到,人们为了解决诸如费尔马大定理、希尔伯特二十三问题等这些著名问题的过程中对数学发展的推动,就可以清楚地认识到,本节开头所提到的哈尔莫斯的话是相当正确的.

不仅对于数学科学而且对于学校数学来说,问题也是她的心脏,当代最著名的数学教育家波利亚(G. Polya)强调指出:“中学数学教学首要任务就是加强解题训练.”(1961)他还说过:“掌握数学意味着什么呢?这就是说善于解题,不仅善于解一些标准的题,而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题.”但是解题毕竟是一种复杂的智力劳动,它是最富有创造性特征的人类活动. 对于一般意义下的问题解决(problem solving),长期以来,刺激-反应派心理学家与认知派心理学家的见解存在着分歧,前者倾向于用尝试错误来解释问题解决,后者倾向于用顿悟来解释问题解决. 从本世纪50年代开始,现代认知心理学家,以纽威尔(A. Newell)与西蒙(H. A. Simon)为代表,吸收了前面两派心理学的有益成果,用信息加工观点来解释人的问题解决的过程,取得了一系列卓越的成果. 在现代认知心理学关于问题解决的研究工作进展的鼓舞下,经过对新数学运动的得失成败的检讨,从80年代开始,“问题解决”已成为世界性的数学教育的一个热点,著名的美国全国数学教师联合会《行动的议事日程(An Agenda for action)》(1980)、英国的《科克柯罗夫特报告(Mathematics Counts)》(1982)都把“问题解决”当作数学教育的中心任务.

什么是“问题解决”?数学教育中要解决什么样的问题,各国数学教育家理解上不尽一致,但他们的研究工作实际上包含了各种层次和形式的问题.1988年在布达佩斯举行的第六次国际数学教育大会(ICME-6),参加“问题解决的模式与应用”课题组讨论的代表有500名之多,他们认为应该对以下各种形式的问题加以识别:

1. 虚设的习题(“dressed-up” exercise);
2. 进一步的习题(“advancement” exercise);
3. 经典问题(“classical” problems);
4. 新经典问题(“neoclassical” problems);
5. 开放问题(open problems);
6. 探究题(investigations).

一些国家在“问题解决”的研究中,往往侧重于解决现实生活中的实际数学问题,和数学中的非常规问题,但是常规的、经典的问题的解决,仍然是大多数人关注的中心.如上述美国《行动的议事日程》认为解决问题的含义是:

1. 问题解决包括数学应用于现实世界,包括为现时和将来出现的科学理论与实际服务,也包括解决拓广数学科学本身前沿的问题;

2. 问题解决从本质上来说是一种创造性的活动;

3. 问题解决能力的发展,其基础是虚心,是好奇和探究的态度,是进行试验和猜测的意向.

在美国报刊和研究文献中曾被广泛运用的一个例子是:“每辆军车可载士兵36名,现有1128名士兵要求被运送到训练基地,问需用军车多少辆?”如果学生得出带余数的商,或是干脆略去余数,就说明学生对问题的情景和未知数的性质一无所知.

日本数学教育家在“答案不是唯一确定”的数学问题的解决方

面作了不少开创性的研究，如泽田利夫的“无终结 (open-end) 问题”和能田伸彦的“开放处理 (open approach)”法都是关于这方面的工作。泽田利夫提出的一个例子是：“ A, B, C 三人作掷石子游戏，结果如下图，这个游戏是以石子散落的距离小者为优胜。请想一想如何用‘数’来表示这个‘散度’？”

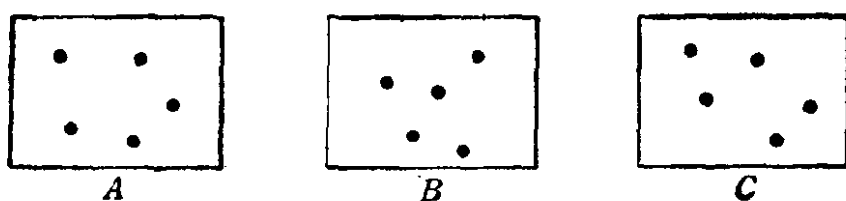


图 1-1

下面是学生考虑到的几种比较“散度”的方法。

1. 多角形面积；
2. 多角形的周长；
3. 连结两点的最长线段；
4. 线段之和；
5. 从任意一点引向各点的长度之和；
6. 覆盖各点的圆的最小半径；
7. 由于坐标的导入而产生的平均差；
8. 标准差。

我国中学数学界近十年以来关于解题教学的研究，和上述国际上的“问题解决”的热潮在本质上是完全合拍的，而我国中学数学教学内容与不少国家相比较，有程度较深、理论严谨等特点，所以关于解题研究方面的深度和广度在世界上是可以和任何国家媲美的，1986—1988 连续三届国际数学奥林匹克竞赛中我国选手成绩出色，1985 年、1987 年上海师范大学和美国霍普金斯大学通过 SAT-M 测验进行的一项对比研究表明，中国学生的成绩都明显优

于美国学生^①，这些都说明我国中学数学解题教学中蕴含着丰富而卓有成效的经验。但是，如何紧密地联系我国数学教育中发展变化的实际情况，不懈地追踪解题教学中涌现的新问题，从教育的眼光观照数学解题活动，把数学解题的功能、结构、方法的研究提高到理论层次上来，从而建立起能够指导实际教学工作的数学习题理论，这项任务是相当繁重的。

^① 见《教育研究》1986年第11期《中国有丰富的数学人才资源》及1988年第6期《学生数学能力差异研究》两文。

第二章 数学习题的分类和功能

为熟悉和掌握教学计划、教学大纲对学生的要求,发展学生的智能的问题系统称为习题. 以数学为内容,或者虽不以数学为内容,但必须运用数学知识或方法才能解决的习题称为数学习题.如数学课中教师提问的题、例题、练习题、测验题都是数学习题.

解数学习题就是要找到一种一般的数学原理用于习题的条件或条件的推论(中间结果),通过一定的程序得到习题所要求的答案.

第一节 数学习题的分类

数学习题可以按不同的标准加以分类.

一、按知识内容分类

将数学习题按知识内容的不同分为算术题、代数题、平面几何题、立体几何题、解析几何题和三角题等,这是一种最常用的分类方法.

按知识内容不同的分类可在不同的层次上进行,如代数题又可分为代数式、集合对应、函数、方程、不等式、复数、排列组合、二项式定理、数列等习题;解方程又可再分为解整式方程、分式方程、根式方程和超越方程等.

一个数学习题,如果所涉及的知识超出某一单元或学科,这样的习题称为综合题. 综合题有利于培养学生综合、灵活运用知识来分析问题与解决问题的能力,有利于培养学生的广阔性、多向性

等思维品质,因此在教学中教师乐于采用这种题型,特别是在复习和能力考查中更是离不开数学综合题.但是综合题必须体现知识的内在联系,要注意综合题与堆砌题的区别.吕学礼于1985年就提出这种观点.如

【例1】 钢杆 AB, BC 在 B 点铰接. $BO \perp AC, BO = 1800 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$. 因受外力作用, AB 被压短 0.69 mm , BC 被拉长 0.66 mm . 计算 B 点移动了多少. (图 2-1)

此题是材料力学中遇到的实际问题,可以用解三角形的方法解答,也可以用解析几何的方法解答,这样的习题,既可培养学生的能力,又可使学生初步接触实际,是一个较好的综合题. (具体解法见《数学教学》1982年第2期吕学礼文)

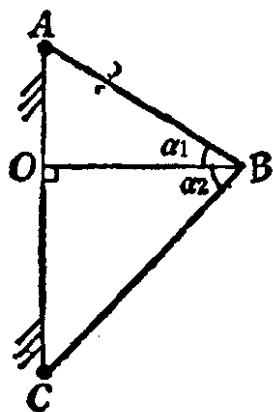


图 2-1

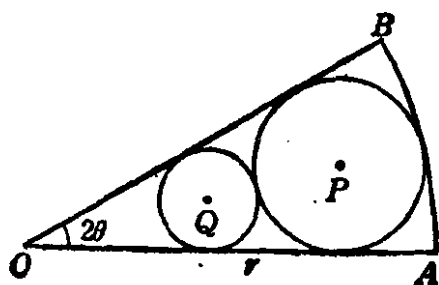


图 2-2

【例2】 在中心角是 2θ 、半径是 r 的扇形 OAB 内作一内切圆 P , 再在扇形内作一与扇形两半径相切并与圆 P 外切的小圆 Q , 若 θ 使圆 Q 的面积最大, 求出 $\sin \theta$. (图 2-2)

此题融合了平面几何、三角、导数等多方面知识,也是一个较好的综合题.

【例3】 解方程 $ax^4 + bx^3 + c = 0$. 其中系数 a, b, c 分别满足:

- (1) $(0.2)^{\sqrt{a}} = 0.008$;
- (2) b 的相反数是方程