解析几何常用方法

王向东　韩普宪　马合成　主编

重庆大学出版社

解析几何常用方法

主　编　王向东　韩普宪　马合成

副主编　鲁柏林　张成恒　李冬辉

编　委　王　庚　王定江　张　林

张步林　张克敏　杨　谦

杨世国　杜芹香　肖凤翔

宋鑫[illegible]　[illegible]苗民　谭水木

重庆大学出版社

内容提要

本书主要内容分为两部分，共9章。第一部分是平面解析几何，包括直线、参数方程、极坐标和二次曲线的一般理论等4章。这一部分内容不是中学平面解析几何的重复，而是在它的基础上，系统归纳、概括、加深平面解析几何的主要内容和常用方法；第二部分内容是空间解析几何的常用方法和解题技巧，在空间坐标系的基础上，以向量代数为基本工具，着重讨论空间平面、直线、二次曲面等内容。

本书可供高等师范院校、理工科院校师生教学使用，对各类成人高等学校师生以及中学数学教师也有一定的参考价值。

解析几何常用方法
王向东　韩普宪　马合成　主编
责任编辑　何光杰　刘茂林

重庆大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
重庆后勤工程学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：14　字数：314千
1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷
印数：1—4500
ISBN 7-5624-0993-5/O·112　定价：8.10元
（川）新登字020号

前　言

目前，国内有关解析几何这门重要基础学科的教科书、参考书及各种习题集虽然不少，但以论述解析几何解题方法为主的参考书，尚不多见，这似乎是一种缺陷和不足。因为，随着我国教育体制改革的不断深化，高等教育尤其是各类成人高等教育发展十分迅速，广大师生以及广大工程技术人员，甚至社会科学工作者，都急需掌握解析几何这门应用极为广泛的基础性学科的方法和技巧，但由于没有合适的参考书，给教学和自学带来许多不便，直接影响了教学质量的提高，为此编写了这本专门论述解析几何解题方法与技巧的参考书。

本书用大量的典型实例揭示了解析几何的解题规律和技巧，归纳、总结了解析几何的常用解题方法。全书共9章，各章自成体系，包括了解析几何这门学科的全部经典内容。在章节安排上不拘于通常的逻辑次序，每一方法都独立成节，并按照“基本内容”、“常用方法及应用举例”及“练习”这三步曲逐步展开。“基本内容”是必须掌握的基本概念和基本定理（为节省篇幅，大多定型的证明均略去）；“常用方法及应用举例”是解决各类问题的方法的系统归纳和总结，用典型例题揭示方法的运用技巧和应注意的事宜，并用评注的形式说明例题的类型和方法的适用范围。书中有些问题还用多种方法予以解决，并比较方法的优劣，以达到举一反三、触类旁通之目的。作者对本书大部分例题都给出了解题的思路和思维的方法。另外，

各章编写的具体格式，又因其内容而定，并不强求一律。

作者虽然为本书取得理想的效果作了不少努力，但限于水平，加之是初次尝试，时间仓促，难免有处理不当与片面之处，热诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

1994年2月

目　　录

第1章 直　　线

利用坐标方法把几何问题转化为代数问题，并通过代数问题的研究来解决几何问题，是解析几何学的基本方法. 本章的目的就是要用坐标的方法来研究平面直线及其之间的关系.

§1.1 两点间的距离与线段定比分点

一、基本内容

1. 两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是坐标平面上的两点，则 P_1 与 P_2 间的距离与两点的坐标有如下关系

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1-1)$$

显然，在两点 P_1 与 P_2 的距离公式中，P_1、P_2 具有对称性.

2. 线段的定比分点

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是坐标平面上的两点，点 P 分线段 P_1P_2 的比为：$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (1.1-2)$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，这就是中点坐标公式.

3. 三角形的面积公式

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$为坐标平面上不共线

的三点，则$\triangle ABC$的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.1—3)$$

以A、B、C顺序为顺时针方向时，求出的面积值为负；而当A、B、C顺序为逆时针方向时，面积值为正. 所以，在求三角形面积时，一般要加一个绝对值符号.

对于A、B、C三点共线，面积公式同样适用，只是面积为零，反之亦成立.

二、常用方法及应用举例

例1 已知平面上三点$A(1,2)$、$B(a,6)$、$C(2,-8)$，$|AB|=5$，且B点在第一象限，求$|BC|$.

解

$\because |BC|=\sqrt{(2-a)^2+(-8-6)^2}$
$\quad\quad =\sqrt{(2-a)^2+196}$

$\therefore$，要求$|BC|$，只要求出a即可，由于

$$|AB|=5=\sqrt{(a-1)^2+(6-2)^2}$$

所以，$a=4$或$a=-2$，但已知B在第一象限，所以$a=4$，故

$$|BC|=\sqrt{(2-4)^2+196}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

评注 本例解答关键是根据$|AB|=5$求出a，并由B的象限确定a取正值.

例2 已知平面上三点A、B、C的坐标分别是$(-2,-2)$、$(3,3)$、$(5,-2)$，判断A、B、C是否共线，若不共线，求$S_{\triangle ABC}$，并判断$\triangle ABC$的形状.

分析 本例首先要判定A、B、C三点是否共线，不共线

时，又要求 $S_{\triangle ABC}$，因而可直接求 $S_{\triangle ABC}$，由其是否为零来判定 $S_{\triangle ABC}$是否共线.

解

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\times(-35)\right|=17.5$$

显然，A、B、C 三点不共线.

又 $|AB|^2=[3-(-2)]^2+[3-(-2)]^2=25+25=50$

$|BC|^2=(5-3)^2+(-2-3)^2=4+25=29$

$|CA|^2=(-2-5)^2+[-2-(-2)]^2=49$

因为，$|AB|$、$|BC|$、$|CA|$ 皆不相等，且有最长边，$|AB|^2<|BC|^2+|CA|^2$，故$\triangle ABC$ 是锐角三角形，不是等腰三角形.

评注 本例也可先计算 $|AB|$、$|BC|$、$|CA|$，并由它们的关系判定 A、B、C 是否共线.

例 3 已知 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面上的任意一点，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

分析 由于矩形相邻两边都是互相垂直的，因而可以取其一个顶点为坐标原点，相邻两边所在直线分别作为 x 轴和 y 轴见图 1—1.

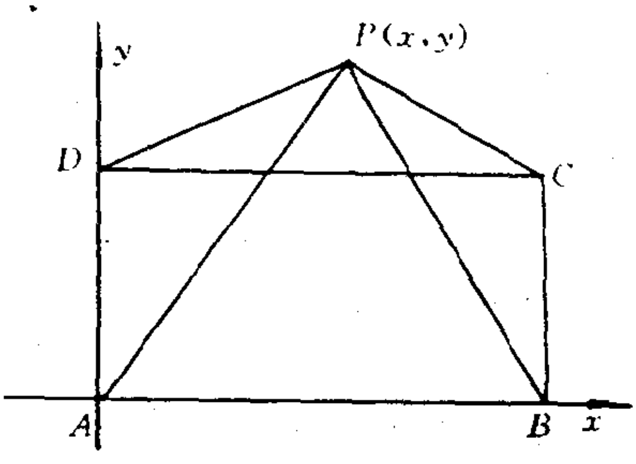

图 1—1

证明 取矩形 AB 边所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，并设矩形相邻两边

AB、AD 的长分别为 a、b，点 P 的坐标为 (x,y)，则有 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$，故

$$PA^2+PC^2=(x^2+y^2)+[(a-x)^2+(b-y)^2]$$
$$=2(x^2+y^2-ax-by)+a^2+b^2$$
$$PB^2+PD^2=[(a-x)^2+y^2]+[x^2+(b-y)^2]$$
$$=2(x^2+y^2-ax-by)+a^2+b^2$$
$$\therefore PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

例 4 已知 $A(1,3)$、$B(4,6)$，求分点 P，使 $AB=3PB$.

解 $\because AB=AP+PB$，而 $AB=3PB$，

$\therefore AP+PB=3PB$，于是

$$AP=2PB$$
$$\therefore \lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{2PB}{PB}=2$$

故 $$x=\frac{1+2\times 4}{1+2}=3,\ y=\frac{3+2\times 6}{1+2}=5$$

所以，$P(3,5)$是要求的分点.

评注 关键是求出 $\lambda=2$.

例 5 见图 1—2，已知三角形顶点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，求$\triangle ABC$ 的重心的坐标 (x,y)。

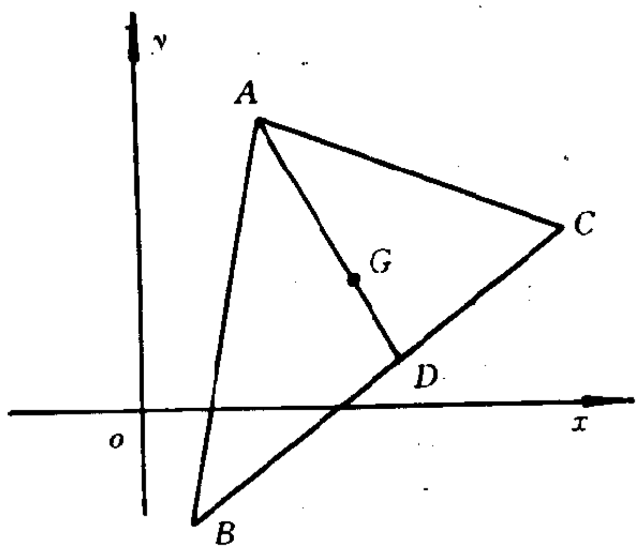

图 1—2

解 设 BC 边的中点为 D，由中点坐标公式，则

D 点的坐标为$(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$

又设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 G 分线 AD 的比 $\lambda=\frac{AG}{GD}=2$，所以 G 点的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

即重心 G 点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \quad (1.1-4)$$

评注 本例推得的结果可以作公式应用.

习 题 1.1

1. 已知某零件一个面上有 3 个孔，孔中心的坐标分别为：$A(-10,30)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求每两孔中心的距离，并判断 A、B、C 是否共线.

2. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求 $S_{\triangle ABC}$，并判断$\triangle ABC$ 是否是等腰三角形.

3. 已知 $A(1,-1)$、$B(3,3)$、$C(4,5)$，用两种方法证明 A、B、C 共线.

4. 在$\triangle ABC$ 中，AM 是 BC 边上的中线，求证 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$.

5. 已知两点 $P_1(3,2)$、$P_2(-9,4)$，点 $P(x,0)$在 P_1P_2 所在的直线上，求 P 点分 P_1P_2 所成的比 λ 及 x 值.

6. 已知$\triangle ABC$ 的二顶点 $A(2,3)$、$B(8,-4)$和重心 $G(2,-1)$，求 $C(x,y)$.

7. 线段 P_1P_2 长 5cm，写出点 P 分 P_1P_2 所成的比 λ 值：

(1)点 P 在 P_1P_2 上，求 $|P_1P|=3\text{cm}$；

(2)点 P 在 P_1P_2 延长线上，$|P_2P|=10\text{cm}$；

(3)点 P 在 P_2P_1 延长线上，$|PP_1|=1\text{cm}$.

8. (1)一条线段的两个端点坐标为$(-1,2)$、$(-10,-1)$，求这条线段的二个三等分点的坐标；

(2)已知点$A(1,-1)$，$B(-4,5)$，将线段AB延长至C，使$AC=5|AB|$，求C点的坐标.

§1.2 直线方程的几种形式

一、基本内容

1. 直线的斜率

一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角. 若直线 l 平行于 x 轴，规定它的倾斜角为零，因此，对任一直线它的倾斜角 α 的取值范围是：$0\leqslant\alpha<\pi$.

一直线倾斜角的正切，叫做该直线的斜率，常用 k 表示斜率：$k=\operatorname{tg}\alpha$.

应当指出的是，平行于 x 轴的直线，其斜率为零，垂直于 x 轴的直线斜率不存在.

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$所在直线的斜率为 k，则有

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1.2—1)$$

在式(1.2—1)中，P_1、P_2 两点具有对称性.

2. 点斜式

已知直线 l 过定点 $P(x_1,y_1)$，斜率为 k，直线 l 的方程是

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (1.2—2)$$

3. 两点式

已知直线过两点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$，直线 l 的方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{1.2—3}$$

特别地，当 $x_1=x_2$ 时，方程为 $x=x_1$；当 $y_1=y_2$ 时，方程为 $y=y_1$.

4. 截斜式

已知直线的斜率是 k，在 y 轴上截距是 b，即和 y 轴交于 $P(0,b)$，直线 l 的方程是

$$y=kx+b \tag{1.2—4}$$

5. 截距式

已知直线 l 在 x 轴和 y 轴的截距分别是 a 和 b(a、$b\neq0$)，直线 l 的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{1.2—5}$$

6. 一般式

定理 1.2.1 在坐标平面内，任何直线都可用含有变量 x 和 y 的一次方程 $Ax+By+C=0$ 来表示. 反之，任何含有变量 x 和 y 的一次方程 $Ax+By+C=0$ 都表示坐标平面内的一条直线.

方程 $Ax+By+C=0$ 称为直线的一般式方程.

二、常用方法及应用举例

例 1 已知下列各条件，建立直线方程，并将它们化为一般式.

(1) 过点(9，−3)，倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$；

(2) 在 y 轴上的截距为−2，倾斜角为$\frac{\pi}{6}$；

(3) 过两点(2，0)，(0，−3)；

(4) 过原点，平分Ⅰ、Ⅲ象限角；

(5) 过点(3,1)和(7,1);

(6) x 轴上的截距为-5,倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$.

解 (1) 直线的斜率为 $k=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$,由点斜式方程得直线方程为

$$y-(-3)=-1(x-9)$$

即 $\quad x+y-6=0$

(2) 直线的斜率 $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,由截斜式得直线方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+(-2)$$

即 $$\sqrt{3}x-3y-6=0$$

(3) 由已知,直线在 x 轴和 y 轴的截距分别为 $a=2,b=-3$,由截距式得直线的方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1,\text{即 } 3x-2y-6=0$$

(4) 平分Ⅰ、Ⅲ象限角的直线斜率为 $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$,由点斜式得直线方程为

$$y-0=1\times(x-0)$$

即 $$x-y=0$$

(5) 由于直线上两点(3,1)和(7,1)的纵坐标均为1,故直线的方程为 $y=1$,即 $y-1=0$.

(6) 由于直线在x轴上的截距为-5,所以它过点$(-5,0)$,斜率为 $k=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,由点斜式得直线方程是

$y-0=-\frac{\sqrt{3}}{3}[x-(-5)]$

即 $\sqrt{3}x+3y+5\sqrt{3}=0$

小结 根据已知条件求直线方程，一般做法是：

1° 判断直线是否平行于坐标轴，平行时，写出特殊形式的方程，如(5).

2° 创造条件使其满足直线方程的某种形式，写出这种形式的直线方程.

3° 化为一般式 $Ax+By+C=0$ 的方程.

评注 直线在坐标轴上的截距 a、b 可正可负，在代入方程时应特别注意，这里截距的概念同距离的概念不同.

例 2 已知 $P_1(3,5)$、$P_2(x_2,7)$、$P_3(-1,y_3)$是斜率 $k=2$ 的直线 l 上的三个点，求 x_2、y_3.

解 过点 $P_1(3,5)$且斜率为 $k=2$ 的直线方程为

$y-5=2(x-3)$，即 $y=2x-1$

由于 $P_2(x_2,7)$、$P_3(-1,y_3)$在直线上，所以它们的坐标适合方程，因此有

$$7=2x_2-1, y_3=2\times(-1)-1$$

解得 $x_2=4, y_3=-3$.

例 3 已知 $A(-1,1)$、$B(-1,3)$、$C(2,3)$、$D(2,-1)$是坐标平面上的四点，求四边形 $ABCD$ 的面积 S，并判断其类型.

解 如图 1—3 所示. 四边形的面积为

$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$

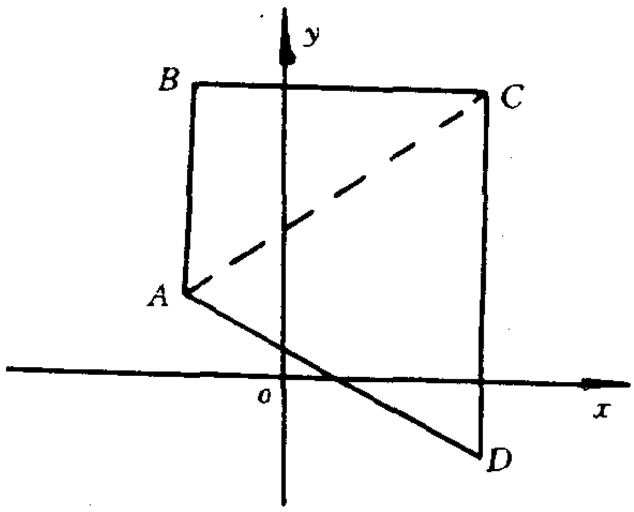

图 1 3