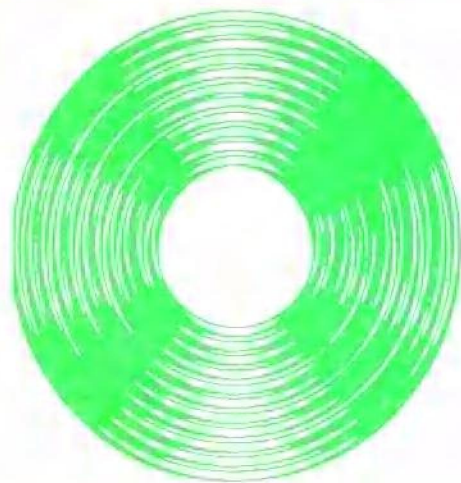
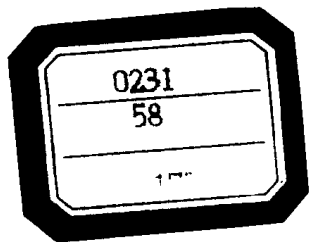


现代 控制 引论



舒兆根 编著

国防科技大学出版社

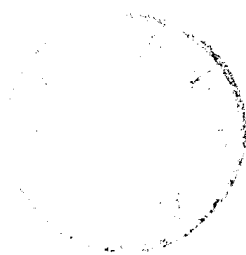


1751713

现代控制引论

舒兆根 编著

JUL 1977/25



国防科技大学出版社



北师大图书 B1369952

图书在版编目(CIP)数据

现代控制引论/舒兆根—长沙:国防科技大学出版社,1997.7

ISBN 7—81024—426—4

I 现代控制引论

II 舒兆根

III ①自动控制 ②状态空间 ③最佳控制

IV TP13

责任编辑:潘 生

责任校对:石少平

封面设计:陆荣斌

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

新华书店总店北京发行所经销

湖南大学印刷厂印装

开本:787×1092 1/16 印张:11 字数:254 千

1997年7月第1版第1次印刷 印数:1—3000册

ISBN 7—81024—426—4

TP·86 定价:12.50元

前 言

本书在十几期教学的原讲义的基础上,经过修改而成。全书的结构在 79、80 及 81 级大学生的授课过程中初步形成,1986 年后由笔记改为胶印的讲义。后来,经学生及多方面的意见,在几次重印中进行了修改。为了便于自学理解,把必需的习题,交插在有关的课程后,并在书后给出了解答。本书的内容简练,理论与实际及思考与练习的结合较好。十多年来,与类似的书籍相比,本书的内容组织,深度调整等都较合理。

“现代控制”是相对于“经典控制”而言,随着科技的发展,特别是控制技术被广泛的应用,“现代”也只能是一个相对的概念而已。“现代控制”仅是由于其内容的特殊性而被人们所认识与沿用。具体地讲,它是采用状态去描述对象,以线性空间及其映象为手段,有利于计算机使用的一种控制原理。本书称为《现代控制引论》主要是它的内容是为进入“现代控制”的一种入门书而编排,着重于初学者易于接受、并找到与经典控制理论的联系。它是工科院校自动控制专业学生的基础课程,也可为非自控专业研究生的选修课程。对于工程技术人员可以当作自学参考书。

学习“现代控制”理论的人们反映的一个共同点,就是这种理论较抽象,与实际结合困难,做题不易下手。因此,《现代控制引论》在各章节中,都是通过例子及练习,重点在于熟悉并应用状态空间法对系统进行描述及计算,并且使学习者逐渐地习惯于抽象空间的分析及具体系统的设计。当学完全书后,对“现代控制”能有一个明确的看法,并初步学会用现代控制理论对系统进行分析及设计的方法。对于更深入更广泛的内容,就不在本书的范围之内。

本书的各章节都自成体系,除第一、二、三章必须保证基本内容之外,其它都可根据需要而选学。学时大约在 40~60 小时之间。

蔡嗣忠教授在本书基本内容形成中提出了宝贵意见;教研室在开展“现代控制”的教学及科研中给予的支持及帮助,使得本书能够比较充实;唐修俊副教授曾对原讲义进行过校核并提供了意见。还值得提到的是,本书采用了 79 级后的一些同学,尤其是 80 级的王晶文、于杉同学的算题结果。刘明俊教授详细地审阅了全书,并在文字上作了润色。在此一并表示感谢。

作者水平有限,错误难免,欢迎读者批评指正。

作 者

1996 年 11 月 18 日

内 容 简 介

现代控制论是工科自动化专业重要的专业基础课,本书在多年使用的讲义上修订而成。内容力求精干、叙述方法力求联系工程实际,比较易学。本书共分五章,第一章状态空间分析法,第二章线性系统的能控性及能观测性,第三章系统的稳定性,第四章状态空间综合法,第五章现代控制有关理论概述。

本书适用于工科自动控制专业本科生,非自控专业研究生作教材之用,也适合于广大工程技术人员参考。

绪 论

目前控制理论被分为“经典”与“现代”两部分。经典控制理论,一般是指四五十年代的单变量系统理论。在频域中,较多地采用作图、列表,或借助于复变函数及 Laplace 变换方法,对系统动态特性进行研究分析。现代控制理论是指 60 年代后发展的控制理论,内容上可概括为多变量系统,在时域上以线性控制理论并借助于数字计算机,对系统进行分析、计算与设计。该理论在内容上推理与证明严谨。由于控制系统研究及实际需要、计算机技术的巨大进展,促使现代控制理论向深度和广度上发展。

现代控制发展初期,具有重大意义的几个代表性成果有 Pontryagin 的极大值原理、Bellman 的动态规划、Kalman 的最佳滤波理论及能控与能观测性理论等。正是这些理论,对现代控制理论起到了奠基的作用。“现代控制理论”这个名称,是 1960 年在美国自动控制联合会第一届年会上才首次被提出。

现代控制作为一门课程,它只能包括最基本的内容。目前对这些内容还没有统一的规定,但学习该理论的目的是可以确定的。《现代控制引论》是以工科高年级学生在修完经典控制理论后进行的一门专业基础课。为了加强课程的实用性,本课程注重了演算,介绍了实用例子。

现代控制理论的主要特点是,一方面能用数学理论严格地推理及演算,另一方面把数字计算机作为必要的辅助工具。当一个具体系统的特性状态转化为抽象的数学空间中的状态之后,用计算机进行运算和演绎,就非常方便,且概念清晰。但这容易忽视与物理对象的联系以及在实践中实现的可能性,从而把实践性很强的控制理论当作数学定理来对待。这样也就失去了控制理论的生命力。为了实践的需要,应该从在实际中发展起来的现代控制理论的大量的丰富内容中,挑选最基本、最必需并且较为实用的内容,作为基本课程。

为了达到上述目的,本书分为五章,前三章为现代控制理论的基本知识,包括状态空间分析法、线性系统的能控性及能观性和 Liapouov 稳定性理论。这部分内容是进入现代控制领域的门槛,提供了较多的习题,以学会基本的解题方法与技巧。第四章为状态空间综合法。第五章是为扩大知识面而介绍某些包含在现代控制领域内的理论。可以认为,前三章是本书的基本内容。它可以为学生今后的工作或进一步学习奠定基础。掌握了第四章的知识,不仅为深入的学习作准备,并可以对较简单的系统进行设计计算。

目 录

绪 论

第一章 状态空间分析法	1
§ 1-1 系统的状态描述	1
一、系统的结构组成及控制	1
二、系统的状态选择及定义	3
三、系统状态方程列写举例	7
习题 1	10
§ 1-2 系统描述的转换	11
一、高价微分方程化为状态空间表达式	11
二、传递函数化为状态空间表达式	15
三、结构图变换法	19
习题 2	22
§ 1-3 线性变换与标准形	22
一、实际系统的线性化处理	22
二、线性变换与状态空间表达式	24
三、线性变换与标准形	26
习题 3	30
§ 1-4 线性定常系统方程的解	30
一、齐次方程的解	31
二、非齐次方程的解	32
三、状态转移矩阵	33
§ 1-5 线性非定常系统状态方程的解	37
一、齐次方程的解	37
二、非齐次方程的解	39
习题 4	41
§ 1-6 传递函数阵	41
一、单输入单输出 (SI/SO) 系统线性定常系统传递函数	42
二、多输入多输出 (MI/MO) 系统传递函数阵	42
三、组合系统的传递函数阵	43
§ 1-7 状态方程离散化	45
一、线性非定常系统离散化	46
二、线性定常系统离散化	47
三、定常离散状态方程解	48

四、时变离散状态方程解	50
第二章 线性系统的能控性及能观测性	52
§ 2-1 能控性及能观测性	52
一、能控性及能观测性的物理含义	52
二、能控性定义	54
三、能观测性定义	56
§ 2-2 能控性及能观测性判据	57
一、连续时变系统	57
二、定常系统能控性判据	59
三、定常系统能观测性判据	61
习题 5	62
§ 2-3 对角形判据	63
一、完全可控判据 3	64
二、完全可观测判据 3	66
§ 2-4 对偶关系	68
一、状态转移阵的对偶	68
二、对偶系统	69
三、能控性与能观测性的对偶	69
§ 2-5 系统完全能控及完全能观的几个问题	70
一、系统传递函数与能控及能观的关系	70
二、标准形	72
三、连续系统离散化对能控能观保持的条件	75
第三章 系统的稳定性	79
§ 3-1 系统的稳定性	79
一、平衡状态	79
二、Liapunov 稳定性	79
三、李氏稳定性定义	80
§ 3-2 李亚普诺夫稳定性判据	81
一、李氏第一法（间接法）	82
二、李氏第二法（直接法）	82
习题 6	87
§ 3-3 李氏第二法的应用	88
一、线性定常系统稳定性的分析	88
二、线性定常系统稳定性校正	88
三、系统动态响应快速性的估计	89
§ 3-4 非线性系统李氏判别法	90
一、变量梯度法	90
二、Krasovski 方法	92

§ 3—5 离散系统李氏稳定性分析	93
习题 7	94
第四章 状态空间综合法	95
§ 4—1 极点配置	95
一、状态反馈	95
二、输出反馈	98
三、极点配置定理 (SI/SO)	99
习题 8	101
§ 4—2 系统的分解及实现	101
一、系统状态分解	102
二、实现问题	106
§ 4—3 状态观测器 (状态重构问题)	108
一、状态观测器的结构原理 (全维观测器)	108
二、降维观测器	110
三、状态观测器的应用	112
四、具有观测器的反馈系统频域表示	115
习题 9	116
§ 4—4 线性二次型最优控制	116
一、最优控制问题	116
二、最优调节器	117
三、最优调节器的稳定性	118
四、关于性能指标的设计问题	120
五、线性最优控制系统在频域的特性	121
习题 10	125
§ 4—5 系统解耦	125
一、系统的去耦	126
二、去耦条件的证明	127
三、极点任意设定零点去耦系统的设计	131
第五章 现代控制有关理论概述	133
§ 5—1 关于最优控制	133
一、变分法介绍	133
二、由变分法解最优控制	137
三、庞特里雅金极小值原理	138
习题 11	141
§ 5—2 正投影定理	142
一、有用的抽象空间	142
二、正交定理 (正投影定理)	144
三、正交定理在向量空间的表达式	145

四、正交定理应用举例	146
§ 5-3 系统辨识	149
一、最小二乘法辨识	149
二、递推最小二乘法辨识	151
§ 5-4 卡尔曼滤波	153
一、卡尔曼滤波问题	153
二、离散卡尔曼方程推导	155
三、卡尔曼预测系统	157
习题答案	158
参考文献	166

第一章 状态空间分析法

经典控制理论,主要是当系统在一定的输入作用之下,观察分析其输出,从而确定该系统的动态性能,也就是把系统的输入输出关系,所谓外部关系当作主要的研究对象。这种研究方法常把系统的内部当作一个盒子。如图所示,不管系统的内部如何复杂,对单输入单输出系统的动态特性总可以由一个高阶微分方程去描述。若是定常系统,又可以用传递函数的形式来表示即

$$Y(s) = G(s)u(s).$$

式中的 s —复变数、 $G(s)$ —传递函数、 $u(s)$ —输入的拉氏变换函数、 $Y(s)$ —输出的拉氏变换函数。

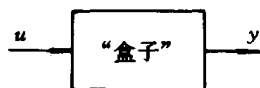


图 1-1-0

因此,可在复数域或频率域内对系统进行研究,这就是经典控制理论的概貌。对单变量系统,从频率特性上综合设计某个具有一定性能指标的系统是方便的。当然,这些指标只能是概略的,有的还是定性的,并且多半还须依靠足够的经验。因此相同的指标会得到性能不同的系统,尤其在处理多变量及非定常系统时困难更大。

现代控制理论主要是在时域中对系统的内部特性进行分析研究。首先是把系统的内部结构,分解成基本的组元—状态来表达。每个状态的动态特性由一个一阶微分方程来描述。一阶微分方程组就表征了一个系统的动态过程。研究这组状态之间的关系及状态微分方程组的特点,就是现代控制理论的基本内容。系统的输入输出关系即外部特性,可以由内部特性结合系统的输出关系来表达。这种理论在处理多变量系统时较方便,对时变系统在设计最优控制,并且采用数字计算机作为辅助工具时,更显出了优点。

§ 1-1 系统的状态描述

一、系统的结构组成及控制

控制的中心问题是研究系统。控制理论实际上可以说是对系统的改进及护理的科学。直观上我们可以把系统看成是一组相互关联的元件,它们在各个输入之下产生一组输出。如钟表机械系统,收音机的电系统,汽车是电—机械—化学系统,更广泛地讨论,如工厂这样的工业管理系统,医院这样的医疗系统。人体所谓的生命系统及计算机那样的信息处理系统等,都是我们熟悉的不同的系统。因此,“系统”包含了当今文化、科学的深邃概念之一,它的内容丰富多采。即使如此,我们可由图 1-1-0 对“系统”进行概括,或以图 1-1-1 表示了有 r 个输入, m 个输出的多输入多输出系统,如果需要表示系统内的局部结构,可以进一步画出子系统的方框,如图 1-1-2 所示。根据分析及设计的需要,可以画出同一个系统的不同的结构方框图。

这种结构图是为了方便而表示。确定“系统”的根本问题是建立数学模型。利用数学

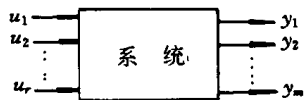


图 1-1-1

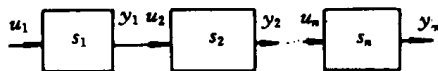


图 1-1-2

结构去描述一个系统的实际结构,只能是一种恰当的近似,要获得完全符合实际系统的数学模型几乎是办不到的。因此,应该记住,数学系统仅是实际系统在概念上的表示而已。

为使实际系统的运转符合要求,可以对系统进行改造或者改善输入特点。这样就提出了各种控制问题。因此,“控制”可理解成对系统性能改善的各种方法的统称,可由图 1-1-3 表示。

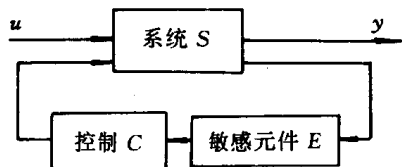


图 1-1-3

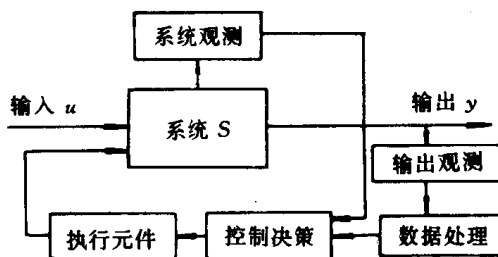


图 1-1-4

如果对系统的性能提出某种要求,“控制”就是通过执行元件去变动或修正系统的调整部位,或是寻求在某个输入之下使系统的性能符合要求。系统的特性与输出都同时由观测得到。这可由图 1-1-4 来表示。若要对一个系统的观测和控制包含的实际操作作更深入的分析,还可以把系统分解成若干个子系统。从上面的叙述看到,一个数学模型的形成相当繁杂,作为控制工作者都应谨慎从事。

据信息和干扰的确定性与随机性,把控制问题划分为两大类,所谓确定性控制及随机控制。当系统中的信息传递是依靠连续量或离散量而区别时,系统划分为连续系统及离散系统控制。当两者兼而有之,则称为混合控制。

确定性控制的典型问题,如图 1-1-5 所示的三种情况。其一是设计控制器 C 以使闭环系统稳定且性能最优,如图(a)。其次,通过量测到的输入 u 、输出 y ,确定系统 S 的数学模型,所谓系统辨识问题,如图(b)。再则,就是不断地量测输入 u 及输出 y ,随时辨识系统模型,并按一定准则使系统保持最优状态,即自适应控制问题,由图(c)所示。

当系统中存在随机干扰时,则上述问题就要作为统计问题来处理,因而就复杂得多。如信息的量测将要采用信号过滤的办法,即著名的 Kalman 滤波理论,系统的控制也将涉及随机控制理论。另外,如控制系统中参入了计算机,则需要采用相应的离散控制理论。

现代控制理论包括大系统理论、可靠性理论、智能控制及微分对策理论等,目前还在不断地充实及发展,并渗透到各个领域而产生新的学科或技术。因此,控制理论将冲破专

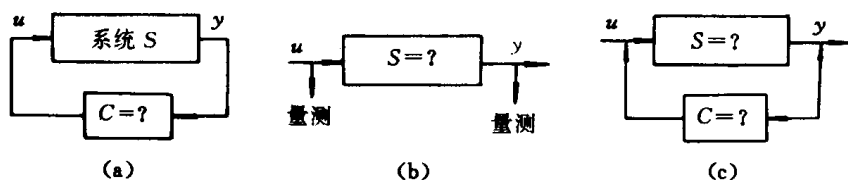


图 1-1-5

业范围,变成一般理论与技术,被人们去掌握、去应用。

二、系统的状态选择及定义

状态一般是指系统在运动过程中的某种特征量,如简单的 R 、 L 、 C 串联电路,由图 1-1-6 表示。 R 、 L 、 C 为系统的结构参数,物理表示量有 U 、 U_R 、 U_L 、 U_C 及 I 、 I_R 、 I_C 、 I_L ...等,而且可以包括这些量的各阶导数。当输入电压 U 改变时,由电路原理可知,上述的各量均作相应的变化。这些量都可以当作该电路的“状态”。

又如力学系统,如图 1-1-7 所示。从运动力学可知,重块受外力 f 作用时就有位移 x 、速度 $\dot{x}$ 及加速度 $\ddot{x}$ 表示重块运动特征。重块的质量为 M ,与弹簧及阻尼器连接, K 为弹簧的刚性系统, D 为阻尼系数。当重块运动时就有弹簧力 Kx 及阻尼力 $D\dot{x}$ 阻止重块运动。该系统的结构参数为 M 、 K 、 D ,当重块上的外作用力 f 改变时,它的位移,速度及加速度都将作相应的变化,就可称为该重块的状态作了改变。

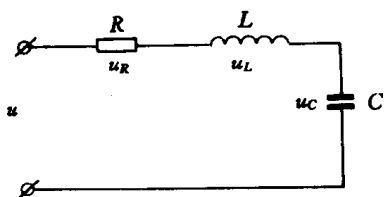


图 1-1-6

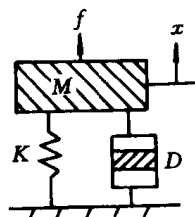


图 1-1-7

为了较深入地理解“状态”的概念,通过例子说明较好。我们再看储水罐系统的动态过程,如图 1-1-8 所示。该储水罐截面 S_1 、出水管截面 S_2 ,高出基准为 h_2 , A 为进水管,供水使储水罐液面保持于一定水位 h_1 。此系统可当作不同截面流管中,理想流体的运动来考虑。把伯努利方程用到 S_1 及 S_2 两个不同的截面上,就有

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 \quad (1-1-1)$$

当考虑到 $S_1 \gg S_2$, 则有 $v_1 \rightarrow 0$, 就有 $v_2 = \sqrt{2gh}$, $h = h_1 - h_2$ 。水管输出的流量为 $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{2gh}$ 。可把水罐的水位 h 当作系统状态。设水流平衡时,水位 $h(t) = h_0$, 由进水管补充的流量 $Q_{10} = Q_{20}$, 在时刻 t , 当输入水量有改变量 ΔQ_1 , 相应的水位变化 Δh 及输出变化量 ΔQ_2 , 则在 dt 时间内系统水量有平衡关系式

$$S_1 d\Delta h + \Delta Q_2 dt = \Delta Q_1 dt$$

可得储水罐水位的动态方程

$$\frac{d\Delta h}{dt} = -\frac{1}{S_1}\Delta Q_2 + \frac{1}{S_1}\Delta Q_1 \quad (1-1-2)$$

把 $Q_2 = S_2 \sqrt{2gh}$, 线性化并取一级近似

有 $Q_2 = \frac{S_2 \sqrt{2gh_0}}{2h_0} \Delta h = \frac{Q_{20}}{2h_0} \Delta h$ 。故有表示水位状态改变量的动态方程

$$\frac{d}{dt} \Delta h = -\frac{Q_{20}}{2S_1 h_0} \Delta h + \frac{1}{S_1} \Delta Q_1 \quad (1-1-3)$$

对于更一般的系统, 同样可以根据

研究的问题, 选择恰当的状态变量。若某个国家被划分为三个行政区, 现在研究各区内的人口变化。假定人口可以自由迁移, 每个区的人口按自然增长率(指数增长)为 a_{ii} 变化, a_{ij} 为各区之间人口的交流, 政府在三区内提供不同的就业机会若为 $g_i u$, 当作系统的输入, 把三个区内的人口 x_1, x_2, x_3 当作系统状态。就可以设以下的动态方程表示人口变化过程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 u, \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + g_3 u. \end{cases} \quad (1-1-4)$$

方程中 $g_1 = 0$, 表明政府在第一区内不提供就业机会, 系数 a_{ii} 及 a_{ij} 可以通过人口普查的统计得到。

再如我们研究社会经济系统时, 可以把资本当作状态变量, 而资本的变化就是该系统由于生产、税收、劳务及商品流通等的动态过程的反应。

状态变量

为了对系统的动力学特性进行研究, 必须从系统的运动状态组合中挑选一组, 称之为状态变量。因此, 状态变量是系统的某个状态组合。从前面例中可看到, 系统的电流及电压 I, U_R, U_L, U_C ; 力学系统中的位移 x 、速度 v 及加速度 a ; 储水罐系统的水位 h ; 再如社会生活中的人口迁移系统的区域人口 x_1, x_2, x_3 及社会财经系统的资本等都可选作状态变量。通过它们之间的联系找出因果关系, 或者寻求描述这些变量的运动方程。稍加考虑即可看出, 状态变量之间有些是存在联系的, 这种联系有的是明显的, 如串联电路中通过电阻、电感及电容的电流都是 I ; 但有的联系并非一目了然, 如串联的电感与电容之间的电压关系为 $U_L = LC\ddot{U}_C$ 。这种关系称为状态变量间的相关。反之, 称为状态互相独立。一般情况下, 挑选一组互相独立的状态变量, 就足以表征系统在时域中的全部行为。如上例所示的电学系统及力学系统都为二阶系统, 独立的状态变量只能有两个。储水系统是一阶系

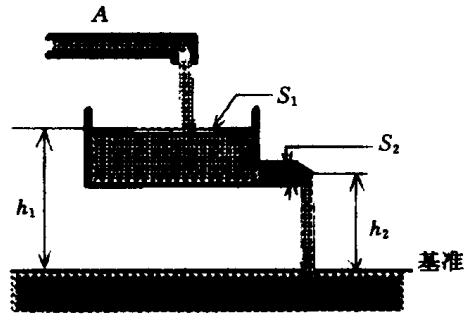


图 1-1-8

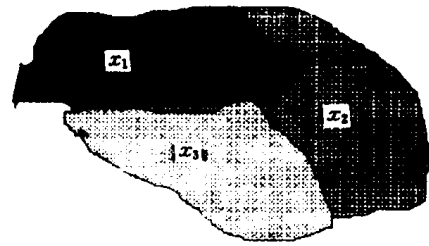


图 1-1-9

统只能有一个状态变量。如果在选取的状态变量中,存在相关的部分,那么,这些变量对表征系统的动态特性将是多余的。

状态变量组是用来描述系统内部特性的一种手段,它可以通过对系统的测试与计算,并抽去了具体的物理意义而得到。因此可以说,状态变量是存在于输入与输出之间的一种数学实体,即系统的输入作用到状态组合再引起系统的输出。一般地讲,状态变量并非为直接测到的量,而是为了要对系统内部的因果关系的表达而引进的一个数学结构而已。系统中真正具有物理含义并且能够测得的量,只是系统的输入与输出。对状态变量还有一种较抽象的解释,就是把它看作信息的“总和”,即现在时刻的状态变量组与初条件一起,能够唯一地确定下一时刻的状态变量。

状态向量

状态变量组表成向量的形式,每个状态变量作为向量的分量。设 $x_1(t), x_2(t) \cdots, x_n(t)$ 是系统的一个状态变量组,可以组成向量 $X(t)$,记成列矢或行矢的形式如下所示:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \cdots x_n(t)]^T$$

T 为转置记号, n 为向量的维数。同理,可以有输入向量、输出向量等,如

$U = [u_1, u_2, \cdots, u_p]^T, Y = [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T$, p 为输入向量 U 的维数,(即输入个数), m 为输出向量 Y 的维数,也即输出的个数。

状态空间

以状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标所构成的 n 维空间为状态空间,记作 R_n 。这种空间内的元素被称作“点”或向量。时刻 t 的状态 $X(t)$,可由 R_n 空间内以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标的点或以从原点出发的箭头指向 X 的向量表示,如图 1-1-10 所示。

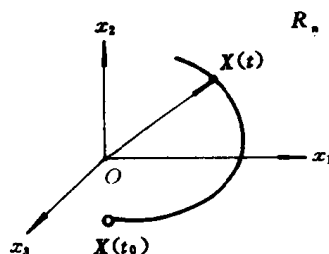


图 1-1-10

系统由初始时刻 t_0 的 $X(t_0)$ 出发的动态过程,可以由 R_n 空间的一条曲线来表示,称系统的状态轨线。这就将状态变量组的代数结构和几何空间框架联系起来,为线性空间理论及泛函分析,在控制系统的时域分析中的应用,准备了条件。

状态方程

描述系统内部状态的动力学过程,由系统状态变量组成的一阶微分方程组,或由状态向量表示的一阶向量微分方程来表示,如

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_p; t), \\ \cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_p; t) \end{cases} \quad \text{及初条件: } x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0) \quad (1-1-5)$$

或表成向量微分方程:

$$\dot{x} = F(x, u, t) \quad \text{及初条件} \quad x(t_0) \quad (1-1-6)$$

$$\text{其中 } x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T, u = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^T \quad (1-1-7)$$

输出方程

构成系统状态变量与输出变量间的关系,使系统内部状态与外界沟通。表成代数方程或向量变换式(静态变换关系)。如

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t), \\ \dots\dots\dots \\ y_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p; t) \end{cases} \quad \text{或 } y = G(x, u, t). \quad (1-1-8)$$

状态空间表达式

将状态方程与输出方程组合在一起被称为状态空间表达式。它完整地把系统内部状态的动力学特性与外部的输入输出过程有机地结合起来,如图 1-1-11 所示。

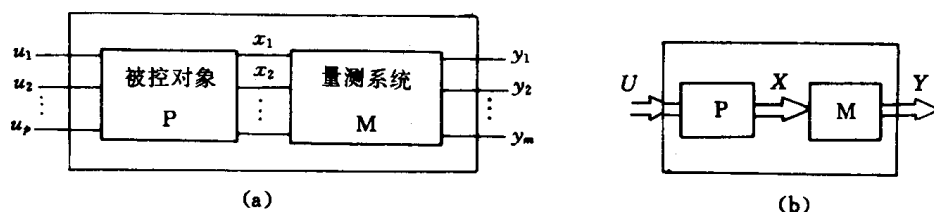


图 1-1-11

图 1-1-11 为一般的多输入多输出系统的方框结构图,图(b)中的重线箭头表示多路信号的合成。该结构图的表达式就为:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u, t), \\ y = G(x, u, t). \end{cases} \quad \text{初条件 } x(t_0), t \in [t_0, \infty) \quad (1-1-9)$$

其中的 $u \in R_p, x \in R_n, y \in R_m$, 以上为最一般的状态空间表达式,即所谓非线性,时变的向量方程。到目前为止尚无一般的解法,但可借助计算机求近似解。对这类系统不管是求解还是分析,都是极其困难的课题。但对线性系统则不然,即使是时变系统也已得到了基本解决。线性系统可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x + D(t)u. \end{cases} \quad (1-1-10)$$

式中的 x, u 及 y 的维数各为 n, p 及 $m, A(t), B(t), C(t), D(t)$ 都为时变矩阵,它们的维数应符合矩阵方程的运算规则,即有

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}_{nn} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1p}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{np}(t) \end{bmatrix}_{np} \\ C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}_{nm} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1p}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mp}(t) \end{bmatrix}_{mp} \end{aligned} \quad (1-1-11)$$

线性 状态空间表达式可以由惯用的方块流向图如图 1-1-12 所示。图 1-1-12 中的“ $\int$ ”表示多个积分器组合,其个数与状态变量维数一致。

如果线性系统是定常的,即上式中的 A 、 B 、 C 及 D 都为常数阵。那么就得到应用最广的线性定常的状态空间表达式,有

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (1-1-12)$$

及初条件 $x(t_0)$, $t \in [t_0, \infty)$, $x \in R_n$, $u \in R_p$, $y \in R_m$ 其中的 A 、 B 、 C 、 D 均为常阵,结构流向图与图 1-1-12 相同。

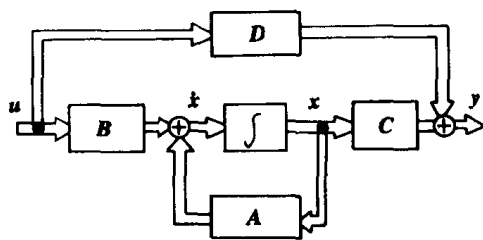


图 1-1-12

对于线性系统即使是非定常的系统,也已取得了完美的解决。

三、系统状态方程列写举例

列写状态空间表达式就是确定系统的数学模型。

我们通过一些简单的系统,说明状态空间表达式的列写的方法,在一般情况下都要应用某些已知的定理或定律进行推导。当然,在实际工作中需要测定大量的数据,通过整理精选后,获得必要的结构参数。因此,给出的例子仅是为了说明方法而已,事实上要复杂得多。

由经验证明在实际工作中,确定系统的数学模型几乎要占总工作量的一半以上。

例 1-1-1 加速度计

设有加速度计如图 1-1-13 所示。图中:

a —飞行器的加速度; m —加速度计重块的质量; D —阻尼系数; K —弹簧的刚性系数。

根据牛顿定律,加速度计的重块 m ,因飞行器加速度 a 的作用,产生反向的惯性力 $u_1 = ma$ 。质量、阻尼器及弹簧产生阻止运动的合力,因此,可以按图示的坐标 y 列出运动方程

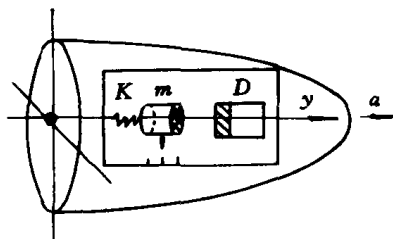


图 1-1-13

$$m\ddot{y} + D\dot{y} + Ky = u_1 = ma, \quad (1-1-13)$$

为二阶系统。式中的 a 当作加速度计的输入量。

设状态变量为: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$ 。其中 x_1 是重块的位移,当作仪表的输出,因此有

$$m\dot{x}_2 = ma - Dx_2 - Kx_1 \quad (1-1-14)$$

可以写成一阶微分方程组及状态空间表达式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 + a \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a \\ y = (1, 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-1-15)$$