

微積分研究

王昌銳譯

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第 1374 號

微積分研究

中華民國五十九年元月20日初版

版權所有

不准翻印

出版者 徐氏基金會出版部

台北郵政信箱 3261 號

香港郵政信箱 1284 號

發行人 鄧 普 賢

台北市郵政信箱3261號

譯 者 王 昌 銳

台灣省立高雄工業專科學校教授

印刷者 大興圖書印製有限公司

地址：三寶市三和路四段一五一號

電話：九 七 一 五 四 〇 五

定 價 台幣 二十元

港幣 三元

徐氏基金會

為翻譯出版最新科學技術書籍啟事

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育均仰賴師資與圖書的啟發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啟導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啟發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之

一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大眾閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文學科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。捐誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啟

各地區總經銷

台灣：金馬

(1) 新亞出版社

台北市懷寧街82號

電話：330215

(2) 台灣英文雜誌社

台北市西寧南路121號

電話：331376 334565 365076

星加坡：馬來西亞

友聯書局

星加坡小坡大馬路33號

香港

(1) 友聯書報發行公司

九龍花園街73號

電話：K-882373 853425 858458

(2) 亞洲出版社書店

九龍亞皆老街64號

香港波斯富街120號

電話：K-841771 H-768050

美洲

Far East Enterprise Co., Inc.

232 Canal Street

New York, N. Y. 10013

U. S. A.

海內外各大書店均出售

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學者數學的最好方法，為多做習題。各書所附習題，有些頗為艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十冊陸續出版，以供讀者研習。除第十七冊係由葉哲志先生承譯外，其餘各冊均由王昌銳教授承譯。（定價每冊港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗 (第一冊) (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解 (第一冊) (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解 (第二冊) (Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗 (第二冊) (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯 序

微積分爲研究變化與運動之數學。其本體雖只微分積分二者，但其內涵，却包括算術，代數，幾何，三角及平面與立體解析幾何諸學之具體應用。一般數學之許多定理，定律，法則，公式，以及超越函數等，如以微積分方法證定，則更易於確立，可見微積分與一般數學，具有相輔相成，相因相生之關係。

自十七世紀英國之牛頓 (Sir Issac Newton , 1642—1727) 及德國之賴波尼茲 (Gottfrid Wilhm Leibniz 1646—1716) 發明微積分以來，凡欲解決物理，數學及天文研究方面之運動，作功與速度加速度等問題，莫不以之爲良好工具，所以數學發展及現代科學技術之增長，幾非微積分莫辦。而於純粹數學及應用數學兩端，尤需用微積分，作有效之研究工具。故二十世紀偉大數學家紐曼 (John Vor Neumann 1903—1957) 曾言：“微積分爲現代數學之母，其重要性無可言喻，其對現代數學之貢獻，遠過其他學術。而且現代數學分析體系，係由迄今仍爲正確思維首要學術之微積分邏輯，演繹而成”。目爲現代數學之基礎，亦未爲過。

今日時代進步，科學昌明，微積分之重要性，亦與日俱增，舉凡物理，化學，生物，電子工程之研究，地球衛星軌道之預測，慣性航行系統，計程儀及雷達系統設計，太空旅行問題之探討，以及大氣力學，洋流，與乎經濟，心理等學理之研究測定，莫不有賴於微積分。所以微積分爲研究科學之工具，目爲科學之母，亦不爲甚。故爲科學，工程技術人員，所必學之課程。

本書爲美國新數學文庫之一，作者以簡單而非專門化之筆法與詞句，說明微積分主要內容。且特別著重於速度，速率，加速度，變化率，面積，體積等之敘述，使讀者瞭解如何把握重點，從事微積分學

習，誠爲初學微積分者之良好讀物，頗適我國中等以上學校學生及社會人士，研究進修之用。本書特點爲通俗易懂，凡具代數，幾何，三角及解析幾何基礎者，即可領會，對於失學青年，如欲學此高深數學，實有莫大幫助。茲爲響應徐氏基金會出版美國新數學文庫之號召，特予譯出，以饗讀者。

書中譯名，力求通俗，重要名詞術語，且留綴原名，以資對照，使學者耳濡目染，慣識原名。

本書譯稿，多勞吾妻蔣君英女士協助繕訂，特誌謝意！

中華民國五十八年八月一日

王昌銳序於高雄自強齋

致 讀 者

本書爲數學專家所著叢書之一，其目的在使中等學校學生及社會人士，確立某些有趣味而能領悟之重要數學觀念。新數學文庫之大部內容，包含中學教材所沒有的課題；難易各別，即使同一書內，有些部份需要較其他部份爲高度之注意力。由是，讀者以略知一二之識，求瞭解此等書本之大部內容，應作明智之努力。

如讀者以往，僅於教室接觸數學，其應熟記於心者，爲數學書籍，不能快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，即能了然書之全部。而應自行放棄複雜部份，稍後再回味之；以後續之敘述，常能澄清理論也。相反的，包含熟悉題材各節，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，爲作數學，而各書所含問題，有些需要嚴密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此，數學對之將變爲更富意義。

對著者及編者而言，此爲新的嚐試。彼等願對許多中等學校師生對此等書籍所予之協助，表示由衷的感謝。編者對本文庫諸書之反應，頗有興趣，希望讀者書面函告紐約大學，新數學文庫編輯委員會。

原 書 編 者

目 錄

第 一 章	學習微積分須知·····	1
第 二 章	速率之研究·····	9
第 三 章	變速之最簡情況·····	21
第 四 章	較高乘冪·····	33
第 五 章	引伸所得結果·····	41
第 六 章	微積分與圖形·····	51
第 七 章	加速度與曲率·····	73
第 八 章	相反問題·····	83
第 九 章	圓與球，平方與立方·····	89
第 十 章	直覺與邏輯·····	95
	深入研究指南·····	111
	專門名詞解釋·····	115
	習題答案·····	119

第一章 學習微積分須知

數學中，一再出現驚人事物。如某人發現簡單到即使獲致答案，亦無有用結果出現之簡單問題。但却由斯而啓開各種有趣發展之門。而予瞭然此道之士，以莫大力量。

微積分即其一例，微積分肇端於一簡單而無害之問題。“速率 (Speed) 爲何，如何以計算之？”此問題約於西元 1600 年之譜，當各種運動物體——由行星至擺錘——正在研究時，即很自然地產生。而後，人們方開始廣泛研究物質世界。由斯研究，現代世界，始得藉今日所有之星體與原子，機械與動力等善與惡的知識，從事發展。人們或曾期望速率之研究，具極有限之應用——於機械，於天體運動。但不止此。實際上由西元 1600—1900 年間，科學與數學之各種發展，均與微積分相連，由此單一根源，於非常意外之方式，知識乃於各方各面增長，而發現微積分應用於重力，熱，光，聲，電，磁力等理論；且及於水之流動，與飛機設計，微積分使馬克斯威爾 (Maxwell) 早於物理學家能於實驗中，示範無線電以前二十年，即預言無線電學。微積分於 1916 年愛因斯坦 (Einstein) 理論及 19 至 20 世紀之新原子理論中，均居重要地位。此外之許多其他科學應用中，微積分復以純粹數學有趣新穎門類之姿態出現。於現世紀中，少數數學部門，未用微積分，亦有發展，但仍係揉合與微積分相關課程以成。如無微積分作背景，而欲研究該門數學，勢將非常不利。且將遭遇藉助微積分定理產生結果之微積分暗示，企圖認真研究數學之人，無人可放棄微積分。

乃知微積分，對純粹及應用數學兩者而言，爲不可或缺之課題「純粹數學家，爲數學而研究數學。應用數學家，則研究數學，以求討論其實際世界——科學，工程，醫藥，經濟，歷史……等領域。已往，

多數之偉大數學家，均熱衷於純粹與應用數學兩端。而今仍健在之某些傑出數學家亦然」而微積分之發生，係起於非常簡單之速率觀念。

過去，常謂微積分爲極端困難之課程。後來，特別在英國，教師們開始瞭解，許多問題之解決，用微積分方法，遠較代數方法，爲簡單而有趣味。英國中學生，可有二年甚至三年時間，學習微積分。但是，後來某些數學家認爲不然。而謂微積分內容，實較其外表複雜，僅能由非常合格之數學家傳授，真理處於此等衝突觀點之何處呢？

有一譬如，或能有用：一老婦住寧靜之鄉，每星期日驅車前往教堂。如詢駕車是否容易，“啊，是的”她說：“我無機械素養，而覺得非常簡單”如其驅車於紐約市中心區，或駕重型貨車，越過洛奇山區，當覺不甚簡單。但無可否認她能駕車。且如伊必於車水馬龍之區開車，其控制車輛之經驗，對之仍有益處，而不致如毫無駕車經驗者之不知所措。

微積分情勢，有些與此相像。基本微積分，有若基本駕駛術，易於學習，且使人可爲所欲爲。但如欲將微積分引伸於其能達之遠處，則將置身於更繁複之境。

然則，應如何傳授微積分呢？應對初學之士，提出其僅對較深研究者爲重要之警告，以煩人否？如此作爲，初學者將因不知此等警告之任何必要，而感困惑，如不出此，則數學家將評曰：“誤人子弟”。

咸信，正確途徑，係逐次作一件事。當首次携一學生驅車於寧靜之道，彼將有許多學習作爲：何爲離合器，何爲剎車，何爲加速器，如何掌握方向盤，以及如何停車等等；而未與之討論，如何言及不在該地之交通頻繁地區，亦未涉及冬季冰雪載途時，應如何作爲，但最好應予警告，有此情況存在，知所戒懼，而不過估其所知也。

如試圖告以全部真象，又恐難能全部接受。甚至而有更重要之一問題——不知全部真象爲何？學子年青，或能於有生之年，趕上首次火星遠征隊 (Martian Expedition)，駕駛一車，而又安知火星上駕車所需之不同技術？數學亦爲一種探險，當向前推進一步時，即遭遇新鮮而不預期之情況，而必重新修正觀念，法則規律，均曾使用。

定理亦經證明不預知情況之弱點，如被人要求寫出一紙認為絕對可靠，而隨時隨地真確之說明，勢將莫由下筆，只好交白卷了。

本書以鄉村開車為例，開始微積分之簡單觀念。而不尋求笨拙之例外。主要觀察十七世紀中，當微積分正發展時，數學家所為之事。已發現九與十年級學生（等於我國初三與高一學生）之有志於數學者，可無困難的追隨此微積分處理方式，趨於本書末章“直覺與邏輯”中，提供一些例題，顯示駕車接近大都市運輸較繁地區，事物如何變化。此係警告可出現之複雜性，但不應認為此等複雜性，即簡單的困難，於任何方面，均不如此，有些複雜處，非常奇特而不預期，且有興味。

現在，閱讀本書須知為何的問題，須注意下列三項：

(1)基本算學：應能實行全數，分數及小數之加，減，乘，除等作業。無需商業算術，百分比，折扣等等，應曾遇及指數，而知乎以 4^5 為例，即表示： $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ 。

(2)基本代數：應知如 x 之符號，如何使用，且能對簡單代數式，實施加，減，乘，除等作業。應能實行公式代入作業。例如，於 $x^2 - 1$ 中，以3代 x ，而得答數8。負數如 -5 之類，應曾遇及。

(3)圖形：應知如何進行描繪圖形，應曾繪過幾種圖形，且記住其大概形狀；例如， $y=x$ 及 $y=2x+1$ 之圖形，均為直線，而 $y=x^2$ 及 $y=1/x$ 之類，則否。

特別重要的是未曾習知代數，徒為法則集合。但對代數為何，略具瞭解其如何由算術產生，及如何用於說明算術事物，茲舉數例，以喻此義。

例如，以下說明，屬於算術：

3^2 較 2×4 大1；

4^2 較 3×5 大1；

5^2 較 4×6 大1。

但此等結果，產生“任一全數之平方，較其後數乘前數之答數大1”。例如應猜得 87^2 將較 86×88 大1，於代數說法，則有極方便之一般結果說明。如 n 代表“任一數”，則“以前之數”，將書為 $n-1$ ，而

4 微積分研究

“其後之數”，書爲 $n+1$ 。取代以上文句，乃謂“ n^2 較

$$(n-1) \cdot (n+1)$$

大 1”，或以符號完全示之，而爲

$$n^2 = (n-1)(n+1) + 1$$

此方程式，對各數 n 均成立，所猜得之數式，係觀察算術結果而致。進而言之，可藉以證明所猜正確，依常用代數程序，能乘出兩端，並知常爲相同。

由是，對所猜爲何之說明，及證其正確兩者而言，符號極爲有用。

於代數本身，常將特別結果，過渡至更普通者。例如實行某代數乘法，如

$$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$$

及

$$(x+5)(x+6) = x^2 + 11x + 30,$$

或已注及某點。於首例中，發現右端之 7 爲 3 與 4 之和，及 12 爲 3 與 4 之積兩點。於第二例中，遭遇同樣情況；11 爲 5 加 6，而 30 爲 5 乘 6，乃猜出無論左端出現之數爲何，此情況必然發生。於代數符號中，猜知乘出 $(x+a)(x+b)$ ，常提供 $(a+b)$ 作 x 之係數，而 ab 爲常數項，所猜書爲方程式；

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

現能輕易證明所猜正確，此類思考，將常用於本書，改正某些證據，觀察之並試猜某普通定律。

於此作業中，將需要觀察規律，並將之書爲代數符號，例如，顯示表

$$\begin{array}{rcccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

而易猜得隱於其後之規律。底列各數，爲上列各數之二倍，隱於其後之規律爲 $y = 2x$ ，同樣，隱於表

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

後之規律爲 $y = x^2$ 。底列各數，爲上列各數之平方。

置規律於言詞，仍有待斟酌之點，公式 $y = 3x^2 - 2x + 7$ 之意義爲何，遠比用言詞所表示者，易於瞭解。代數係思考規律之最佳說明。代數將規律置於一小空間，公式書來簡短，易於閱讀，較快說明，且較通常語句之對應說明，簡而易懂。如欲確定已明白公式，並不求將之用文字寫出，而要求書出數值對照表，如能正確書出，則知已明白公式所含意義。

通常，不能直接猜出表後隱藏之規律，例如，要求猜出表

x	0	1	2	3	4	5
y	0	3	12	27	48	75

後之規律，即難能立刻行之。而應於一兩次誤猜後，始得正確之規律。猜測中亦有些許運氣存在，但如堅持下去，可於嚐試中，求得答案。例如，此地應注意底列各數，恰能以 3 相除， y 之實值乃爲：

3 乘 0,
3 乘 1,
3 乘 4,
3 乘 9,
3 乘 16,
3 乘 25,

現注意於平方數目 0, 1, 4, 9, 16, 25 其規律乃爲 $y = 3x^2$ 。

此規律 $y = 3x^2$ ，實爲本書以後將遇及之一式，而將由表猜出。

有些有系統之程序，以發掘適合數值表之一規律，且僅對經由簡明猜測，即足以獲致規律者，從事考慮。

本書目的及限制

介紹性書刊，應避免以下兩點；一，應不為食譜式的；二，應勿簡單到成為定理與證明之滙合，此兩型書刊，對學生而言，已無數學可言。

食譜式者，簡為解決某類問題規則之一表而已。學生期望學習此等規則，但此等規則為何有效？如何發現？對不適合任何法則之問題，如何處理？

定理——證明一定理——證明式的書，於某限定意義中，可用於對學生解釋數學。定理 I 之後，最少有一定理 I 之證明，以顯示為何定理 I 成立之光芒，但仍隱藏甚多事理。著者如何決定首先到來者為定理 I ？彼如何決定那一定理採用，那一定理略去？該書欲為者何？隱藏其後之思考線路為何？所有此類定理如何發現？學生如欲發現進一步定理所應為者何？最後問題，或為最重要者。很奇怪的，許多傑出之數學家，均以能於有生之年，發現新的定理，為值得一試之僅有事務，而於所著之書，則從未暗示學生，試圖自行發明。

瞭解一種數學定理，最少有以下四個階段：

(1)應澈底明瞭定理所言為何：

記牢某些文字，未為足也，應知定理意義為何。

(2)應蒐集足以顯示定理應該如此，乃為合理之證據；應感覺到此定理與日常數學經驗符合。

(3)應知有此定理，能作何事，或有科學應用，或能簡單的引出純粹數學之其他有趣定理，且應知道，此等定理為何。

(4)應知曉定理之正式證明。

鄭重聲明，本書不企圖提供任何定理之證明，亦不企圖探討階段(4)，所關心者全為階段(1)，(2)與(3)。所望於讀者獲知者，係微積分觀念之產生，出乎自然，而望學者自行發現，如學子集於一室，可於許多問題中，藉澄清之觀念，學好微積分。雖不能逐一追隨書中

程序，但儘力之所及，以圖接近，不企圖告知任一特別定理，而試欲提醒注意學生能自行作為之事物，所收集之證據，將對之建議某結論，此外，別無宣揚，然而相信此經驗，當開始熱心學微積分時，將使之更為容易，學習進度所循方向，將提出某些觀念，以供參考。

開首七章，就末三者言，有某些相異之處，第一至七章，詳細討論某些題材，可合理期望研讀，完全掌握，後三章，簡約許多，置於該處，以示當已掌握一至七章內容時，容有待學之事，八與九章，簡略顯示第一學年微積分課程中發生的某些問題，第十章提出某些較為深奧之問題；促起學者注意於某些不可能（學者認為）遭遇之事物，而實際發生者，此為本書最令人興奮之一章。

而後，第八，九及十章，均係前瞻之自然事物，即將到來事物之一範例，其目標比較偏重於表示前方所存在之問題種類，而以提供完整計算為次，故如此數章遺下未答覆之問題，學者應勿驚異。

於第十章後，將求得“深入研究南針”，此係由非常基本之微積分測驗開始，以達非常高深之課題。此“南針”之後部，主以初三程度，閱讀本書之非凡學生興趣為重，且對其餘中學時光之微積分，亦有穩定效用。僅少數學生可如此作為，應予以繼續前進之鼓勵。

書中包含專門名詞解釋，係於書之其餘部份寫成後，編纂而成，如瞭解書中所有內容，此段應能略去，然而，深感讀者可能希望明瞭所遇觀念之公認名稱，因而此對更正式之微積分書籍閱讀，亦覺有其助益。

第二章 速率之研究

茲進行運動物體之速率研究，如何明顯得知運動物體行動為何？可作一循直線移動物體之“電影”。假定有一攝影機，每十分之一秒攝一照片，假定連續之照片示如圖1，此物之行動為何？每十分之一秒，向上移動一吋，似乎其以定速每秒10吋運動。

於另一場合，可得如圖2所示之照片，此地，物於各照片與其次者之間，前進2吋，其所具之定速率為一秒20吋。

現觀察具有變動速率之某物，假定一物作加速運動，於第一及第二照片之間，可涵蓋1吋，第二與第三片之間，2吋；第三及第四照片之間，3吋；其記錄示如圖3。

已察覺以下兩點：(1)定速各點處於一直線之上，(2)加速運動，各點處曲線之上。

問題1 圖1與2，兩均表示定速運動之物，檢視此等圖片，如何方能告知，何物運動較快？此不必將數字携入答案中，而能於一瞥之下，告以何物較快，如何作法？[問題答案，於書末可見。]

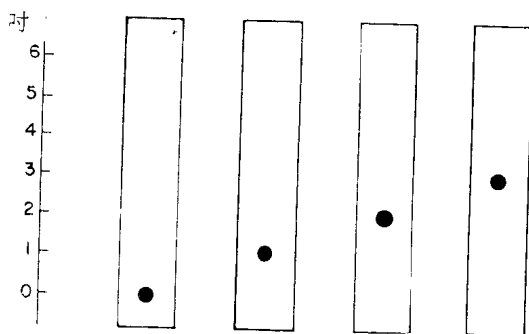


圖 1