李延保 秦国强 王在华 编著

有界线性算子半群应用基础

辽宁科学技术出版社

有界线性算子半群应用基础

李延保　秦国强　王在华　编著

辽宁科学技术出版社

（辽）新登字4号

有界线性算子半群应用基础

Youjie Xianxing Suanzi Banqun Yingyong Jichu

李延保　秦国强　王在华　编著

辽宁科学技术出版社出版
（沈阳市和平区北一马路108号　邮政编码110001）
辽宁省新华书店发行，朝阳新华印刷厂分厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：$10^1/_2$　字数：230,000
1992年12月第1版　　1992年12月第1次印刷

责任编辑：宋纯智　　版式设计：于　浪
封面设计：王海英　　责任校对：李秀芝

印数：1—1,554
ISBN 7-5381-1426-2/O·70　定价：6.70元

前　言

有界线性算子半群理论是本世纪40年代产生和发展起来的，作为泛函分析的一个分支越来越被人们所重视。半群理论在解决抽象发展方程的Cauchy问题及在对马氏过程的系统研究中都成为基本的数学工具，近年来在分布参数系统、现代控制理论、滤波和信息处理、偏微分方程及随机过程等各个领域都得到广泛的应用。我国数学家应用有界线性算子半群理论在人口问题、弹性振动问题及中子迁移理论等具有实际背景问题的研究中取得一批出色的成果，本书正是在这种应用的背景下产生的。本书的内容曾在东南大学、解放军工程兵工程学院讲授过多次，对象为工程类的博士生和应用数学专业的硕士生，只要学过泛函分析的基础知识都能掌握本书的主要内容。

在这里我们特别感谢中国科学院阳名珠研究员、朱广田研究员及南京大学马吉溥教授、南开大学胡顺菊教授，本书的成稿得益于他们的历次讲学和研究，在编写本书的过程中又给我们许多关心和指导。

我们也十分感谢宋纯智、冬风同志为本书所做的贡献。

由于我们水平所限，错误不妥之处请读者悉心指正。

编　者

1991．12．20

符号说明

$\in$	属于
$\bar{\in}$、$\notin$	不属于
$\subset$、$\supset$	包含
$\not\subset$	不包含
$\longrightarrow$	趋近于
$\longmapsto$	映射到
$\Longrightarrow$	（1）蕴含；（2）必要性
$\Longleftarrow$	（1）被蕴含；（2）充分性
$\Longleftrightarrow$	充分且必要，等价
$\exists$	存在着，有
$\forall$	对所有的，对任意的，对每一个
sup	上确界
inf	下确界
$\cup$	并（集）
$\cap$	交（集）
$\mathring{A}$	集A的内部
A'	集A的导集
$\overline{A}$	集A的闭包
$X_{X\times Y}$	X与Y的积集
$d(x, y)$	点x到点y的距离

$d(x, A)$	点 x 到集 A 的距离
$V(x_0, r)$、$V_r(x_0)$	点 x_0 的 r 邻域，开球
$V[x_0, r]$、$V_r[x_0]$	点 x_0 的 r 闭邻域，闭球
$S(x_0, r)$	点 x_0 为心，r 为半径的球面
$\overline{Z}$	复共轭
$\lvert Z\rvert$	绝对值，复数的模
$Re(Z)$	实部
$Im(Z)$	虚部
ϕ	空集
A^{c}	集 A 的余集
N	自然数集
R	实数集
C	复数集
R^n	n 维欧氏空间
A^{τ}	矩阵 A 的转置
A^*	算子 A 的共轭算子（伴随算子）
$f(A)$	集 A 的象
$f^{-1}(A)$	集 A 的原象
$\triangleq$、$\equiv$	定义为
$B(X,Y)$	$X\rightarrow Y$ 的有界线性算子构成的空间
$C(X,Y)$	紧算子空间
$C_{[a;b]}$	连续函数空间
$C_{[a,b]}^{(K)}$	具有 K 阶连续导数的函数空间
$L_{[a,b]}^{P}$	P 次幂（L）可积函数空间

l^p	$\sum_{i=1}^{\infty}\|\xi_i\|^p$收敛的数列 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots)$ 组成的数列空间
l^∞	有界数列空间
X^*	X的共轭空间
$\dim X$	X的维数
$\mathrm{dia}\,A$	集A的直径
$\mathrm{span}\,A$	A生成的子空间
$\mathscr{N}(A)$	算子A的零空间
$\mathscr{R}(A)$	算子A的值域
$\mathscr{D}(A)$	算子A的定义域
$\\|x\\|$	向量x的范数
$\\|f\\|$	泛函f的范数
$\\|A\\|$	算子A的范数
$E\Delta F$	E与F的对称差
$M^\perp$	M的正交补
$\mathrm{supp}f$	f的支集
X_+	X中的正锥
X_+^*	X^*中的正锥，X_+的共轭锥
$(X,X_+,\\|\cdot\\|)$	有序Banach空间
$(X^*,X_+^*,\\|\cdot\\|^*)$	X的共轭有序Banach空间
$a\vee b$	$\max(a,b)$或$\sup(a,b)$
$a\wedge b$	$\min(a,b)$或$\inf(a,b)$
$[x,y]$	数区间或序区间
$\\|\cdot\\|_u$	（关于元素u的）序范数
$\mathrm{int}.X_+$	X_+的内点集
$\mathrm{qu.int}.X_+$	X_+的拟内点集

x^+	$x\vee 0$，（元素）x的正部
x^-	$x\wedge 0$，x的负部
$\|x\|$	$x\vee(-x)$，（元素）x的绝对值
X_u	X中（元素）u生成的理想
$\leqslant$	小于等于或序关系
X/J	商空间
$[x]$	商空间中的元素，x的等价类
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}_+$	非负整数集
X_c	复化Banach空间，复Banach格
$\mathscr{B}(X)$	X到X的有界线性算子的全体
$R(\lambda;A)$	A的预解算子，A的预解式
$R(A)$	A的伪预解式
Re	实部
Im	虚部
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\rho(A)$	A的预解集，A的正则集
$\sigma(A)$	A的谱
$X^{(p)}$	$\{x\in X: p(-x)\leqslant 0\}$
$\\|\cdot\\|_p$	p诱导的范数或p-范数
$\partial p(x)$	p在x的次微分（或切泛函）
$\mathrm{dist}(x, Y)$	元素x到集Y的距离
POD	正的非对角线性质
$M_\lambda(A)$	A的关于λ的广义特征子空间
$\sigma_p(A)$	A的点谱
$\sigma_c(A)$	A的连续谱

$\sigma_r(A)$	A的剩余谱
$\sigma_{ap}(A)$	A的渐近点谱
$\sigma_{ess}(A)$	A的本质谱
$r(A)$	A的谱半径
$r_{ess}(A)$	A的本质谱半径
$\omega_0(A)$	以A为生成元的半群的增长界
$\omega_{ess}(A)$	以A为生成元的半群的本质增长界
$S(A)$	A的谱界
$\alpha(\Omega)$	集Ω的非紧性测度
$\|A\|_\alpha$	算子A的非紧性测度
$\partial\sigma(A)$	$\sigma(A)$的边界
$\sigma_+(A)$	A的边缘谱
$Z(J)$	J的中心（算子类）
$\widehat{X}$	扩张的Banach空间（X为Banach空间）
$\widehat{x}$	$\hat{X}$中的元素
$\widehat{f}$	f的Fourier变换
$\widehat{\Phi}_e$	半范数
$X^{\odot}$	X^*的子空间（T^*在$X^{\odot}$上强连续）
$X^{\odot*}$	$X^{\odot}$的共轭空间
$T^{\odot}$	T^*在$X^{\odot}$上的限制
$T^{\odot*}$	$T^{\odot}$的共轭算子
$X^{\odot\odot}$	$X^{\odot*}$的子空间（$T^{\odot*}$在$X^{\odot\odot}$上强连续）
$\mathscr{L}(f; z)$	f的Laplace变换

目　录

第一章　预备知识

§1　线性算子的谱分析

线性算子的谱的概念是有限维空间中矩阵的特征值概念的拓广.

设有 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

若有非零向量 x 使得　$Ax=\lambda x$　则称数 λ 为矩阵 A 的一个**特征值**，x 为矩阵 A 相应于 λ 的**特征向量**，行列式：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的**特征行列式**，方程：

$$\det(\lambda I-A)=0$$

称为矩阵 A 的**特征方程**。

显然，任意一个 n 阶方阵至少有一个，至多有 n 个不同

的特征值.

矩阵的特征值是矩阵的一种属性，如满秩矩阵总可以经初等变换化为以其特征值为元素的对角阵.

特征值概念的重要性还体现在解矩阵方程上面. 设方程

$$(\lambda I-A)x=\theta \tag{1.1—1}$$

$$(\lambda I-A)x=y \tag{1.1—2}$$

其中

$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^\tau$ 是已知向量；

$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^\tau$ 是未知向量；

$\theta=(0, 0, \cdots, 0)^\tau$ 是零向量.

若 λ 是矩阵 A 的特征值，则有 $x\neq\theta$ 使（1.1—1）式成立，于是

$$\det(\lambda I-A)=0$$

即矩阵 $\lambda I-A$ 为奇异阵，从而方程（1.1—2）的解不唯一. 若 λ 不是矩阵 A 的特征值，则（1.1—1）唯有零解，而方程（1.1—2）有唯一解

$$x=(\lambda I-A)^{-1}y.$$

在有限维空间中，特征值理论是矩阵论的重要组成部分。在无穷维空间中，一些微分方程或积分方程往往也可改写成形如（1.1—1）和（1.1—2）式的算子方程.

例如，微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\lambda x=0 \\ x(0)=x(1), \quad x'(0)=x'(1) \end{cases} \tag{1.1—3}$$

若定义算子 A：$C^{(2)}_{[0,1]}\to C^{(2)}_{[0,1]}$，使得

$$Ax\triangleq-\frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

其中，$x(t)\in\mathscr{D}(A)=\{x(t);x(t)\in C^{(2)}_{[0,1]}$，且 $x(0)=x(1)$，$x'(0)=x'(1)\}$

则方程（1.1—3）可改写成如下算子方程

$$(\lambda I-A)x=0$$

其中，I 为$C^{(2)}_{[0,1]}\to C^{(2)}_{[0,1]}$的单位算子。

又如，积分方程

$$\lambda x=y(t)+\int_a^b K(t,\ s)x(s)ds \qquad (1.1—4)$$

其中

$$K(t,\ s)\in L^2_{[a,b]\times[a,b]},\quad y(t)\in L^2_{[a,b]},$$
$$x(t)\in L^2_{[a,b]}$$

若定义算子A：$L^2_{[a,b]}\to L^2_{[a,b]}$，使得

$$(Ax)(t)=\int_a^b K(t,\ s)x(s)ds$$

则方程（1.1—4）可改写成如下算子方程形式

$$(\lambda I-A)x=y$$

其中，I 是$L^2_{[a,b]}$上的单位算子.

因此，在无穷维空间中有必要研究形如（1.1—1）和（1.1—2）式的算子方程的解的存在性与唯一性问题，而且在无穷维空间中要引进类似于矩阵特征值概念的所谓线性算子谱的概念.

下面如不做特别说明一般总认为空间X为复的、非平凡的（即（$X\neq\{\theta\}$））、Banach空间，A为X上定义的线性算子.

定义1 正则点与谱点

（1）若算子$(\lambda I-A)^{-1}$存在且有界，值域$\mathscr{R}(\lambda I-A)$在X中稠密，则称数λ为算子A的**正则点**，记为

$$\lambda\in\rho(A)$$

数集$\rho(A)$称为A的**正则集**（或**预解集**），记算子

$$R(\lambda;\ A)=(\lambda I-A)^{-1}$$

称为A的**预解式**，亦简记为R_λ.

（2）复平面上非正则点的复数称为算子A的**谱点**，A的谱点全体记为$\sigma(A)$，称为A的**谱集**.

显然有

$$C=\rho(A)\cup\sigma(A),\ \sigma(A)\cap\rho(A)=\phi$$

且，若$\lambda\in\rho(A)$，则意味下列三件事同时成立：

（1）$R(\lambda;\ A)$存在；

（2）$R(\lambda;\ A)$有界；

（3）$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-A)}=X$.

反之，上面三条中只要有一条不满足都表明$\lambda\overline{\in}\rho(A)$而是$\lambda\in\sigma(A)$. 因此对于谱点还可以更细致地加以分类.

定义2 谱的分类

设 $\lambda\in\sigma(A)$

（1）若$R(\lambda;\ A)=(\lambda I-A)^{-1}$不存在，就称$\lambda$为$A$的**点谱**，记为$\lambda\in\sigma_p(A)$；

（2）若$R(\lambda;\ A)$存在，$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-A)}\subsetneqq X$，称$\lambda$为$A$的**残谱**（剩余谱），记为$\lambda\in\sigma_r(A)$；

（3）若$R(\lambda;\ A)$存在，$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-A)}=X$，称$\lambda$为$A$的**连续谱**，记为$\lambda\in\sigma_c(A)$.

于是

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$$

且两两互不相交.

由定义，当$\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$时，$R(\lambda,\ A)=(\lambda I-A)^{-1}$均存

在，从而方程$(\lambda I-A)x=\theta$唯有零解．因此，要有$x\neq\theta$，使$(\lambda I-A)x=\theta$必须$\lambda\in\sigma_p(A)$说明线性算子A的点谱与矩阵特征值有类似性质，故亦称点谱为算子的特征值，但是对无穷维空间上定义的线性算子来讲，其点谱的情况要复杂得多．

例如，微分方程（1.1—3）的通解为

$$x(t)=\begin{cases}a\cos\sqrt{\lambda}\,t+b\sin\sqrt{\lambda}\,t & (a,\ b\text{为常数})\quad \text{当}\lambda>0\\ 0 & \text{当}\lambda\leqslant 0\end{cases}$$

若取$\lambda_n=(2n\pi)^2\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

则

$$x(t)\not\equiv 0\quad \text{且}\quad x(0)=x(1)=a,\quad x'(0)=x'(1)=2nb\pi$$

为方程（1.1—3）的非零解，由定义

$$\lambda_n\in\sigma_p(A)$$

即相应的算子A有无穷多个点谱（特征值）。

又如，定义积分算子A：$C_{[a,b]}\to C_{[a,b]}$

$$Ax\triangleq\int_a^t x(s)d_s$$

其中

$$x(t)\in\mathscr{D}(A)=\{x(t);\ x(t)\in C_{[a,b]},x(a)=0\}$$

考虑算子方程

$$(\lambda I-A)x=\theta$$

即

$$\int_a^t x(s)d_s=\lambda x(t)\quad \text{或}\quad x(t)=\lambda x'(t)$$

显然，对任意$\lambda\in C$，方程都只有零解，故

$$\sigma_p(A)=\phi$$

就是说积分算子A没有点谱（特征值）.

在有限维空间中，线性算子的逆算子若存在必是全空间上定义的有界线性算子，因此其谱点均是点谱（特征值），在谱集中不含连续谱和剩余谱. 但是对无穷维空间中讨论的线性算子其谱集中就可能包含连续谱或剩余谱，如无线电技术中所谓白噪声实质上是一类连续谱，量子力学中散射理论就与相应算子的连续谱相关. 研究线性算子谱的特性是泛函分析理论的一个重要分支，特别对紧算子、自伴算子谱特性的研究已有较完善的结果，而且有着广泛的应用.

若从解算子方程的角度看，设X为复Banach空间，$A\in B(X)$，x，$y\in X$，有算子方程

$$(\lambda I-A)x=y$$

（1）当$\lambda\in\rho(A)$时，对$\forall\ y\in X$，方程有唯一解

$$x=(\lambda I-A)^{-1}y$$

且x连续地依赖于y，即若有一列$y_n\in X$，有

$$y_n\to y\ (n\to\infty)$$

则相应的方程解$x_n\to x$（$n\to\infty$）.

（2）当$\lambda\in\sigma_c(A)$时，对$\forall y\in X$，虽有唯一解x，使

$$(\lambda I-A)x=y$$

但因$(\lambda I-A)^{-1}$不连续，因此x并不连续地依赖于y.

（3）当$\lambda\in\sigma_r(A)$时，因$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-A)}\subsetneq X$故$\exists\, y_0\in X$，找不到$x_0$满足

$$(\lambda I-A)x_0=y_0$$

（4）当$\lambda\in\sigma_p(A)$时，算子方程解的唯一性将被破坏.

下面讨论正则集、谱集及预解式的一些基本性质.

引理1 设X为复Banach空间，$A\in B(X)$，$\lambda\in\rho(A)$，