高等工程专科学校试用教材

线性代数

江约庭 编

重庆大学出版社

高等工程专科学校试用教材

线 性 代 数

江约庭 编

重 庆 大 学 出 版 社

线 性 代 数
江约庭 编
责任编辑 刘茂林
•
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆大学出版社印刷厂印刷
•
开本: 787×1092 1/32 印张: 5 字数: 112千
1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷
印数: 1—3500
标准书号: ISBN 7-5624-0383-x / O·56 定价: 2.40元

编 者 的 话

编者曾为四年制工程本科编写有《线性代数》教材。去年按国家教委关于三年制工程专科教材编审原则："以必需和够用为度"的精神，对该教材作适当的精减后，在我校部分班级同时试用，受到师生们的好评。为使其更适合工科大专的要求，编者以国家教委今年颁发的"高等工程专科学校线性代数课程教学基本要求"为依据，在以往教学实践的基础上，对该教材作了系统的改编。改编后的《线性代数》具有以下特点：

1° 在引入某些基本概念和基本计算方法时，适当选用结合实际的题目作为引例，使读者不致感到太抽象。

2° 对理论的探讨注意围绕某类典型问题而展开。因而，许多定义、定理的提出就显得比较自然，避免了硬抬的弊端。

3° 对某些性质或定理，在不失一般性的情况下，采用低阶化的解释，以增强读者的直观认识。

4° 对于理论的应用，本书给予了足够的重视。比如，在讲了矩阵的相似对角形理论后，紧接着介绍如何利用此理论求解微分方程组的方法。

5° 在文字叙述上，努力做到通顺流畅，便于初学者独立阅读，以培养其自学能力。

6° 对于练习题，则打破一般《线性代数》教材按章集中安排的习惯，改为按节安排，可使读者及时巩固所学内

容。书末附有答案，便于参考。

对“线性代数课程教学基本要求”中加*号的内容，书中均加*号标明，以便取舍。经试用，授完全书内容，约需24—34课时。

原稿曾由重庆大学应用数学系李平渊教授审阅，在此表示衷心的感谢。限于编者水平，本教材可能存在不妥之处，敬请读者批评和指正。

编者于重庆建专

1990年5月

引　言

线性代数主要研究变量之间的线性关系。由于线性问题广泛存在于科学技术各个领域，某些非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题，因此本书所介绍的方法广泛地应用于各个学科。其内容包含：n阶行列式、矩阵、线性方程组、二次型及相似矩阵等。矩阵是全书的中心，用它解决线性方程组求解问题，化二次型为标准型问题等，都是十分必要的。从这个意义上来看，线性代数可以说就是矩阵代数。在矩阵理论中，突出初等变换法，因为用它来求逆矩阵和矩阵的秩、解线性方程组以及化二次型为标准形等都很方便。

目　　录

第一章　n阶行列式

§1.1　n阶行列式的定义

1．二、三阶行列式

（1）二阶行列式和二元线性方程组

求二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

的解。为了消去x_2，以a_{22}乘第一个方程两边，以a_{12}乘第二个方程两边，然后由第一个方程减去第二个方程，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

如果$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则得

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

类似可得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (3)$$

为了使公式(2)和(3)便于记忆，引入二阶行列式的概念。

将已知的四个数排列成正方表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix},$$

则数$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

因此：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (4)$$

其中数a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}叫做这个二阶行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列。

根据(4)式，发现二阶行列式的计算法则（通常叫做对角线法则）：从二阶行列式的左上角到右下角的对角线叫主对角线（用实线表示），从右上角到左下角的对角线叫副对角线（用虚线表示）。主对角线上两元素的乘积取正号，副对角线上两元素的乘积取负号，即得(4)中等号右边的式子。于是，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

利用二阶行列式便可将方程组(1)的解表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

分母中的行列式由方程组(1)的系数组成，称为该方程组的系数行列式，用D表示。若把方程组(1)的常数项b_1、b_2代换D中x_1的系数a_{11}、a_{21}即得x_1的分子，记为D_1；若用b_1、b_2代换D中x_2的系数a_{12}、a_{22}即得x_2的分子，记为D_2，从而(5)式可简写为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad (D \neq 0)$$

（2） 三阶行列式和三元线性方程组

已知三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{6}$$

如何求其解呢？与前面求解二元线性方程组的方法类似，先从第一、第二两个方程消去x_3，再从第一、第三两个方程消去x_3，最后从所得的两个方程中消去x_2，就得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})\,x_1=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23} \\ +b_2a_{13}a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}\end{aligned} \tag{7}$$

x_1的系数（六项）叫做三阶行列式，记为

$$\begin{aligned} D= & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \\ = & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{8}$$

容易看出：三阶行列式D恰好是方程组（5）的系数所组成的，叫做该方程组的系数行列式；（7）式的右边是把D中x_1的系数a_{11}、a_{21}、a_{31}换成b_1、b_2、b_3而得到的结果，记为D_1。于是（7）式可简写为

$$Dx_1=D_1$$

同理可得

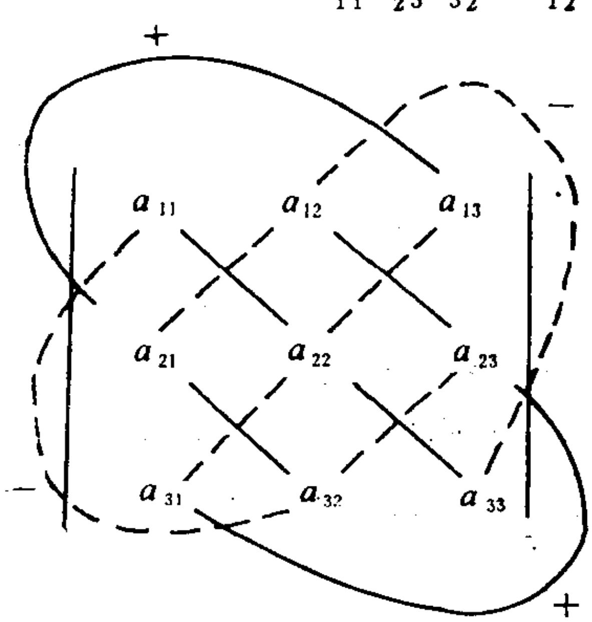

图1.1

$$Dx_2=D_2,\ Dx_3=D_3$$

其中D_2是把D中x_2的系数a_{12}、a_{22}、a_{32}换成b_1、b_2、b_3所得到的行列式，D_3是将D中x_3的系数a_{13}、a_{23}、a_{33}换成b_1、b_2、b_3所得到的行列式。

如果$D\neq 0$，则可得到方程组(6)的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{9}$$

从(8)式的构造看出，三阶行列式仍然服从对角线法则(如图1.1)，即主对角线和平行于主对角线上三元素之积取正号；副对角线和平行于副对角线上三元素之积取负号。

这里要指出，对角线法则仅限于计算二、三阶行列式，高于三阶的行列式，此法则失效。

2. n 阶行列式的定义

(1) 三阶行列式的结构

前面看到，用二、三阶行列式解二、三元线性方程组是很方便的(既便于记忆，又便于运用)。现在要问n元线性方程组

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}$$

能否用n阶行列式来求解呢？这里首先要解决的问题是什么叫做n阶行列式，然后才谈得上用它来求解n元线性方程组。为此，仔细观察三阶行列式(8)的结构(其中a_{ij}表示第i行第j列交叉处的那个元素)，以便从中找出规律性，进而根据这些规律来定义n阶行列式。

由(8)式看出三阶行列式的结构如下：

1° 式中右边各项都是三个元素的乘积，每项作为因子的元素的第一个脚标均为1、2、3，而第二个脚标是自然然1、2、3的一个排列，即这三个元素各自分布在不同的行和不同的列上。于是，右边的项可统一写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 的形式，其中 $i_1i_2i_3$ 是1、2、3的一个排列；

2° 式中右边各项不是正号就是负号，这些符号是怎样确定的呢？下面介绍了排列的逆序数后再回答这个问题；

3° 因为1、2、3共有3!＝6个不同的排列方式，所以，(8)式右边是6项的代数和。

因此，三阶行列式(8)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(\pm 1)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

其中 $i_1i_2i_3$ 是1、2、3的一个排列。

（2） 排列的逆序数

123是1、2、3这三个自然数的一个排列，它是按递增的顺排起来的，称这样的顺序为标准次序。

定义1 在1、2、…、n 的一个排列中，如果一对数的前后次序与标准次序相反时，就称这一对数为一个逆序。一个排列中，逆序的总个数称为这个排列的逆序数。

例如，在排列231中，“2、1”；“3、1”这两对数与标准次序相反，各自构成一个逆序，则这个排列的逆序总个数为2，即其逆序数为2。又如在排列321中，“3、1”；“2、1”；“3、2”各自构成一个逆序，则其逆序数为3。

逆序数的计算方法：设排在1前面的有 m_1 个逆序，把1划去；排在2前面的有 m_2 个逆序，把2划去；……；排在 n 前面的有 m_n 个逆序，则该 n 元排列的逆序数为

$$m_1+m_2+\cdots+m_n$$

例如4321，1前面有3个逆序，2前面有2个逆序，3前面有1个逆序，4前面有0个逆序。所以，这个排列的逆序数为

$$3+2+1+0=6$$

定义 2 对于一个排列，若逆序数为偶数称之为偶排列；逆序数为奇数称之为奇排列。

如上面所举例子，231及4321均为偶排列，而321为奇排列。

（8）式右边各项的符号是按排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性来确定的。若$j_1j_2j_3$是偶排列，则其对应项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$取正号；若$j_1j_2j_3$是奇排列，则其对应项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$取负号。

上面所讨论的是三阶行列式的构造规律，对于二阶行列式显然是符合的，请读者自行验证。现在根据这些规律来定义 n 阶行列式。

（3） n 阶行列式的定义

设n^2个数排列成 n 行 n 列的正方表

$$\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}
\end{array}$$

其中a_{ij}是位于第 i 行第 j 列交叉处的那个元素。

定义 3 n 阶行列式是所有这些项的代数和：

1° 每一项是形如$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的 n 个元素的乘积，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是1、2、…，n 的一个排列；

2° 若$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列，其对应项取正号，若是奇排列，其对应项取负号；

3° 共有$n!$项。

n 阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_t (-1)^t a_{1i_1} \ a_{2i_2} \ \cdots a_{ni_n}$$

其中 t 为$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数。

这个定义不仅回答了什么叫做 n 阶行列式，而且还给出了计算 n 阶行列式的方法：

(i) 取不同行和不同列的n个元素作乘积；

(ii) 把构成这些乘积的元素的行脚标排成标准次序，然后由列脚标所构成的排列的奇偶性来决定该项的符号；

(iii) 对所有这些项（共$n!$项）求和。

例 1 计算上三角形行列式（主对角线以下的元素全为0的行列式称为上三角形行列式）。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \ \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 我们知道，n 阶行列式的一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由于上三角形行列式第 n 行中除a_{nn}外其余元素全为 0，因而对应于$j_n\neq n$ 的项均为 0，只考虑$j_n=n$的项即可；在第 $n-1$ 行中，除$a_{n-1,n-1}$和$a_{n-1,n}$外，其余元素全为 0，因而，j_{n-1}只有取 $n-1$和 n 两种可能，但因$j_n=n$，所以j_{n-1}只能取$n-1$；这样逐步推算上去，行列式D 中不为 0 的项便只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项了，而这一项的列脚标排列成标准次序，其逆序数 $t=0$，因此，该项取正号，于是

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由此看出：上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。

从定义 3 知道，n 阶行列式是在二、三阶行列式的基础上建立起来的，它的定义对于二、三阶行列式当然有效。但计算二、三阶行列式的对角线法则不能用来计算高于三阶的行列式。比如，四阶行列式，按对角线法则只能写出 8 项，而按定义它应有$4!=24$项。

习 题 1.1

1． 根据行列式的定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2． 设

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & (a_1+x+1) & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & (a_2+x+2) & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & (a_{n-1}+x+n-1) \end{vmatrix}$$

其中a_1、a_2、…、a_{n-1}是互不相同的数，试根据行列式的定义说明 $P(x)$是 x 的 $n-1$ 次多项式。

§1.2 行列式的性质

1. 行列式的性质

从上节例1看出，按定义计算行列式是很麻烦的。为了简化计算行列式的方法，有必要建立行列式的一些基本性质。

性质1 把行列式的相应行列对换得到的新行列式与原行列式的值相等。

现用三阶行列式的记号解释之，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

设原行列式为D，新行列式为D'，则称D'为D的转置行列式，从而有$D=D'$。此性质表明，在行列式中，行与列具有同等地位，凡对行成立的论断，对列也成立。因此，下面的性质仅对行进行讨论，对列就不重复了。

至于性质1，如果就三阶行列式证之，利用对角线法则，极易得到证明。

性质2 互换行列式的两行，行列式的值反号。

譬如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 若行列式有两行相同，则其值为0。

这是因为把行列式D中相同的两行互换，有$D=-D$，即$2D=0$，因此$D=0$。

性质 3　行列式的某一行的所有元素同乘以一数 λ，等于用 λ 去乘这个行列式。

譬如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 3 可以得到以下推论：

推论 1　行列式某一行的公因子可以提到这个行列式之外。

推论 2　若行列式某一行的元素全为 0，则该行列式之值为 0。

推论 3　若行列式某两行的对应元素成比例，则该行列式之值为 0。

例如行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 7 & 4 & -8 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix}$$

第一行与第三行的对应元素成比例，其值为 0。这是因为

$$D = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

根据性质 2 的推论，得 $D = 0$。

性质 4　将行列式某行的所有元素同乘以数 λ 后，加到另一行的对应元素上，其值不变。

譬如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$