数学史の訳文集

the Treatise on the
ory of Mathematics

数学史译文集

中国科学院自然科学史研究所数学史组
中国科学院数学研究所数学史组

TRATADOS DE LA
ORIA MATEMATICA

目　录

HISTORISHE AUSFÜHRUNG DER MATHMATIK

ОРНИК ПЕРЕВОДНЫХ СТАТВЕИ
ИСТОРИИ МАТЕМАТЕКИ

数学史译文集

中国科学院自然科学史研究所数学史组
中国科学院数学研究所数学史组

上海科学技术出版社

数学史译文集

中国科学院自然科学史研究所数学史组
中国科学院数学研究所数学史组

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 9.5　字数 225,000
1981年11月第1版　1981年11月第1次印刷
印数 1—7,000

统一书号：13119·936　定价：(科五) 1.20元

出 版 说 明

数学史的研究和探讨不仅是为了了解数学的发展过程，更重要的是，也为现代数学的研究提供必要的参考材料。莱布尼茨也说："数学史的用处不仅在于历史所以公正地衡量每一个人，使得后人可能指望得到同样的称赞，而且还在于促进发展的艺术，而它的方法是通过有名的范例为大家所了解。"

许多近现代著名数学家的工作成就，他们从事科学事业的感人品格，以及他们关于数学学科的重要论述，都一直深深地影响着数学科学的发展。他们提供和保存的大量第一流数学工作的"有名的范例"，不仅为数学家们所神往，而且亦深深地吸引着社会上对伟大科学家的不平常的经历感兴趣的每一个人。然而这方面史料的中译本，过去尚未出版过。为此，特由中国科学院自然科学史研究所和中国科学院数学研究所翻译了数学史方面的九篇著名论文，介绍克莱因、希尔伯特、冯·诺伊曼的工作成就，以及克莱因、希尔伯特、冯·诺伊曼、迪多内和阿达玛论数学的论文，汇集成《数学史译文集》予以出版，供广大读者参考和借鉴。

上海科学技术出版社

1980年9月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

菲利克斯·克莱因的生平、思想和成就

丸 山 哲 郎

一、写 在 前 面

我们能从菲利克斯·克莱因(Felix Klein)那里学到些什么呢？他创立了爱尔朗根纲要(Erlanger Programm),研究了自守函数,积极参予了数学教育的改革。是否就只有这些了呢？

遗憾的是,关于 Klein, 人们所知道的大概只有这些。19 世纪数学史的研究，是数学史上的一个重要课题。对作为 19 世纪几个优秀数学家之一的 Klein, 人们研究得是很不够的。本文在介绍 Klein 的同时,对他的思想、成就的评价也想提出一些问题。

二、19 世纪前半叶的数学

由于 Newton、Leibniz 微积分的创建，以及由于 Bernoulli 兄弟、Euler、Lagrange、Laplace 等人对微积分的应用和发展,从 17 世纪开始，贯穿 18 世纪的机械论数学的瑰丽花朵,到了 18 世纪下半叶便凋谢了。

由巴黎高等工艺学院(L'Ecole Polytechnique)和 Gauss 开始的崭新的 19 世纪数学，如其说它是应新兴工业而引起的技术发展的需要,倒不如说,更多的是由于观念形态以及研究体制的需要而产生的。新的数学,不用说,它并不把力学和天文学看成是终极目标。数学变成是为其自身的需要而进行研究的了。各专门分枝的分化正在开始。19 世纪的数学家，在王公贵族的沙笼里已经看不见了,他们受聘于大学或高等学校，在充当研究工作者的同时,他们也是教师。作为唯一的学术语言的拉丁文,也已经被各国的民族语言所代替。[1]

19 世纪初期的德国，“借用拿破仑军队的力量,从反动统治中解放出来，向新的未来前进这样一个国家的形象,就在其间逐渐形成。不论在普鲁士的东部或西部,农奴制度的废止和封建行会的解体都迅速地进行完毕,公布了民法，废除了贵族的特权”[2]，面貌一新的德国——在这里,资本主义的工业生产正在兴起。

在 19 世纪德国数学史的地平线上，高耸着 Gauss 的堂堂雄姿。对于这个面貌一新的德国——繁荣起来了的精神王国,只要一想起康德、歌德、贝多芬、黑格尔的名字，就可以想象到它的盛大。但是“这一精神王国中的一切,都是建筑在当时经济和政治的泥沼之上的。由于受到英、法伟大的社会进步的刺激，说来象是骤然间羽化登仙一般，德国的精神由于和最良好的德国传统牢固地结合在一起,远远地走到德国物质发展的前面去了。更确切些说,这或许是要回避开粗野的现实,或是盘旋而上以至更高的梦境和抽象之国,或是躲避到更深的个人生活中去,用这些方法来逃避现实”[3]。理论没有成为变革的武器，没有转化成物质的力量。但是，这些精神吸取了新时代的空气，用强而有力的方法表现了这个时代的新的思想。 Gauss 也不例外,不能根据他经常使用拉丁文这点，就把 Gauss 说成是具有 18 世纪的

性格。在电磁学和场论等应用数学中表现出来的现实的思考方法、包括在赫尔姆施达特学位论文(1799)中的关于代数学基本定理的严密证明，还有在《Disquitsiiones arithmeticae》(1801)中所用的方法,关于曲面论的方法等等，必须看到他所具有的19世纪性格的伟大之处。

新时代的精神,比在德国还要早些时候,已经在先进的法国开花。为了确保法国革命的成果,也动员起来的科学和技术，集中在巴黎高等工艺学院(L'Ecole Polytechnique)进行研究工作,法国著名的数学家、科学家大都集中在这里。把理论和应用结为一体的是这个学校的领导人 Monge,继关于筑城术的讲义[4]之后,出版了关于微分几何的专门著作[5]。Monge几何学中的综合几何学方面，被他的学生 Poncelet 所继承。在拿破仑远征俄国失败之后，他在被俘入狱生活中的一些思想,发展了两个世纪前的 Desargue 的方法，完成了射影几何学的体系(并写成一本书)[6]。这是关于射影几何学的最早的、全面的专著。

从1830年7月革命后的帝制时代(1830—1848)起,以巴黎高等工艺学院为中心的法国数学，它的数理物理学的豪华花朵便开始凋谢，1848年革命后的帝制时代(1848—1851)和第二帝国时代(1852—1870)是法国数学的相对低潮时期。屈指可数的仅有放射闪电般光辉的 Galois 和为数学分析奠定严密基础的 Cauchy。新酒一定要用新瓶来装！数学的花朵被移植到德国来了。

当时的德国——1834年1月，实现了德意志关税同盟，筑成了发展工业资本主义的广泛的基础。后进之国的德国形成了统一的商品市场,迈出了走向经济统一的第一步。不久莱茵和萨克森变成了德国经济的中心。在莱茵，以采矿业和冶金业为中心的巨大的重工业在成长,纤维工业有急遽地跃进。在1841—1850十年之间,重工业的生产是19世纪最初十年的6倍,全德的工场工人数量增加了50万人以上。同时也不能忽视由法国占领军带来的自由精神[7]。1848年3月革命之后，开始了新德意志的资本主义时代。银行业的跃进，蒸汽机的迅速普及,以发展铁路为基础的重工业得到发展。这样，到了五十年代,从根本上便确定了德国将来可以赶上并超过先进的法国和英国的工业发展[8]。在政治方面，以普鲁士为首的德国统一了，1871年统一战争的胜利，可以说就是近代德国在庆祝自己已经成人的仪式。在思想方面,对旧的封建制度讲来曾经是强有力的批判武器的合理主义与机械唯物论，和法国革命一道完成了自己的使命,这时,德意志古典哲学变成了思想界的先导。它的最高成就当然就是黑格尔的以矛盾为事物发展基础的关于辩证法的理论。强而有力的思维，从法兰西转移到了德意志[9]。

和哥廷根的 Gauss 同时，可以举出柏林的银行家的儿子 Jacobi 关于椭圆函数论和函数行列式的功迹，他在给 Legendre 的信(1830年7月2日）中反对 Fourier,为了"人类精神的荣誉"，他作了关于纯粹数学的宣言。但是，Fourier 精神却还是愈来愈兴旺。由热传导的数学理论开始,把任意函数用三角级数表示出来的 Fourier 方法,被 Dirichlet 所继承，他给出了关于 Fourier 级数的收敛性的证明[10]。哥廷根的传统,到 Riemann 手里便愈来愈巩固了(关于哥廷根教授的席位，Dirichlet:1855—1859; Riemann:1859—1866)。1851年，在关于复变函数的学位论文[11]中导入了 Riemann 面的概念(25岁),到了1854年 Riemann 发表了两篇著名的教授就职论文(28岁)。其一就是分析了将函数展开为 Fourier 级数时的 Dirichlet 条件[12]，这导致了 Riemann 积分。另一篇便是探讨几何学的基础假说方面的论文[13],它导入了流形的概念。据此,空间可以由它局部的性质来定义,可以从无限小时的状

态来进行理解，这便从根本上改变了自 Euclid 以来的空间概念[14]。这和在物理学方面，由于 Maxwell 和 Faraday 的电磁学而改变了 Newton 的空间概念，大体上是同时的。

在几何学方面，继 Poncelet 之后，在柏林有 Steiner 继续发展了射影几何学，在解析几何方面，莱比锡的 Möbius 应用重心座标(齐次座标)，波恩的 Plücker 以几何光学或刚体力学为源泉。解析几何学，由于把直线作为空间元素的直线几何学而得到发展。

由于几何学的发展，由于人们开始考虑到图形是可以动的，从而关于不变式理论的研究也开始抬头。在德国，由于 Hasse、Aronhold、Clebsch、Gordan 等人，隔海的英国则是由于 Hamilton、Sylvester、Cayley、Salmon 等人的工作，不变式理论得到了发展。由Galois关于方程解法为起点，经过 Jordan 的《置换群》(1870) 而形成系统的有限群理论和不变式理论牢固地结合在一起，提供了强有力的武器。各种几何学、Riemann 空间论、不变式论、群论——数学在要求着，终于要求着一种统一的原理。于是在这里出现的就是 Klein 就是《Erlanger Programm》。

三、Klein 的生平和成就

Felix Klein，1849 年生于莱茵河畔的杜塞尔多夫。1865 年，16 岁，在杜塞尔多夫的高中毕业，升入波恩大学。1849 年，也就是共产党宣言写成之后的第二年。大约三十年前，青年的马克思曾就学于波恩大学，从这也可以看出当时的波恩、莱茵一带的情况。工业跃进，受到法国革命自由平等精神最强烈的影响的，正是莱茵州。继五十年代之后，在六十年代，德意志经济快速地发展着，把落后的德意志的封建性深深地埋葬，赶上并超过了先进的英国和法国，资产阶级的势力得到了发展，以普鲁士为中心，德意志作为一个近代国家统一起来了。要注意到：Klein 青年时代就正是在这样的德国、这样的莱茵州度过的。1865 年，正是日本宣布诞生为近代国家——明治维新的前三年。

继创立柏林大学之后，同样是由于 Humbolt 的努力，创立了普鲁士气象台(1847)。1860 年创建了柏林国立统计所，1867 年德国化学会诞生。关于数学方面《纯粹数学和应用数学杂志》(《*Journal für die reine und angewandte Mathematik*》) 的创刊是在 1825 年。在国外，诞生了伦敦数学会(1865 年)，继而法国数学会诞生(1872 年)。再回到德国方面，不久，《数学年鉴》(《*Mathematische Annalen*》)也创刊发行了(1869 年)[15]。

入学于波恩大学的 Klein，第二年 1866 年，便成了几何学者同时也是物理学家的Plüker的助手。从此他便开始研究几何学。Plüker 利用点座标和直线座标证明了对偶原理，1864 年发表了空间几何学的体系[16]，在这里他是用 4 个独立的座标给出了直线的解析表示，从而开辟了对高维空间进行解析方法处理的道路。1865 年在 Plüker 和 Klein 的讨论中，广泛的关于直线几何学的研究[17]得以创立。

1868 年 12 月 12 日，在波恩大学毕业了的 Klein，于 1869 年夏，在哥廷根大学听了 Clebsch 的关于二次形式不变式和光学的演讲。在一起听讲人中还有 M. Nöther。Klein 和 Clebsch 相交往，是为了整理老师 Plüker 的研究[18]。在同一年，1869 年冬，Klein 还到柏林去听了 O. Stolz 的关于非欧几何学的讲义。在当时的德国，和 Gauss、Dirichlet、Riemann 之后哥廷根的相对低潮相对照，柏林则正是由于有 Weierstrass、Kummer、Kronecker 等人而迎来了兴旺时期。在柏林，Klein 和从挪威的克列斯卡尼亚来的 Sophus Lie 相识

(Klein 22 岁，Lie 27 岁)，两个人同时活跃于 Kummer 的讨论班。Klein 还听了 Kronecker 关于二次形式理论的讲义，研究了数论，还和 Weierstrass 相交往，讨论函数论的问题。波恩、哥廷根、柏林时代，Klein 的研究对象是几何学、是不变式论。他写了一次和二次复变函数理论方面的论著[19]，在 Weierstrass 的讨论班上，他还做了关于 Cayley 二次绝对图形决定射影距离的报告[20]。

七十年代初 Klein 和 Lie 去到巴黎，在那里和 Darboux、C. Jordan 相交往。Darboux 和 Lie 同是 27 岁，Jordan 年长 4 岁，是 31 岁。Klein 和 Lie 两个人的共同研究，经过 Charles 刊载在《周报》(Comptes Rendus)上[21]。Jordan 的巨著《置换群》(1870)给他们二人以刺激，Lie 发现了可以确立直线和球面、渐近线和球面关系的变换，从而创建了连续变换群论的基础；Klein 则把变换的理论同方程式论以及几何学联结在一起了[22]。

不久因普法战争(1870—1871)，Klein 回到德国，Lie 则留下来因间谍嫌疑的罪名在枫丹白露的监狱中渡过四周之后，回到故乡诺威[23]。

巴黎的影响立刻就显现出来了。Klein 回国后的第二年——1871 年，1 月份获得了哥廷根大学的教授资格，8 月份发表了关于非欧几何学的统一的研究[24]。这就把 Cayley 的射影量的决定和空间概念拓展为一般化，把欧氏几何、非欧几何在椭圆的、双曲线的、抛物线等几何学的名目下统一起来了。翌年——1872 年，在爱兰根大学的就职演说中[25]，把这一研究更加推向一般化和彻底化，这也就是所谓的《Erlanger Programm》。在其中，用群的概念把各种几何学统一起来，并给出各该几何学的相应地位。一种几何学都和一种群相对应。所谓的几何学，就是探究在群进行变换时不变的图形性质的，即变成了关于这个群的不变式论。这时，Klein 才 24 岁。《Erlanger Programm》中所使用的方法，在以后的数十年之中支配着几何学的研究方法，群论在数学领域中，作为头等著名的角色而出现在第一流的舞台之上。

Klein 20 岁刚过的这段时期，是成果累累的研究时期。除开上述研究工作之外，陆续还有和 Lie 共同进行的关于 Kummer 曲面的主切线曲线的研究(1870)，关于应用微分方程式于这一领域的研究(1871)，关于刚体力学和直线几何学关系的研究(1871)，关于直线几何学基本定理的研究(1872)，关于拓扑学的研究等等。几何学成为他的主要研究对象，在其中应用了群和微分方程。在爱兰根大学期间，他还参加了《数学年鉴》(《*Math. Ann.*》)杂志的编辑工作。

爱兰根时期没能持续很久，他和 Brill 一道，继 Hesse 之后成了慕尼黑工业高等学校的教授。从这时起，在几何学、代数学之外，函数论成了他的主要研究领域。虽然有代数曲线奇点间关系的研究(1875)、正 20 面体的研究等等，但大部分仍是关于椭圆函数、阿贝尔函数、微分方程式等方面的研究[26]。这种情况，在下一时期——莱比锡时代(1880—1886)仍然得到继续。由唯一性定理的提出和对 Riemann 函数论的研究[27]而达到顶点。在这里，他把 Riemann 面的概念更进一步具体化，从而使它得到了发展。由于自守函数的研究和 Poincaré 相竞争，也是这个时候。

1882 年(33 岁)因健康受到损害而一度陷入危机的 Klein，在 1886 年(37 岁)时转移到哥廷根大学。除了健康方面考虑之外，他或许也是向往着具有 Gauss、Dirichlet、Riemann 传统的哥廷根[28]。但是他却离开了关于数学的创造性的研究，把重心移到了应用数学、研究制度和数学教育方面。作为莱茵地区的子孙，Klein 最后并没有仅仅只献身于纯粹数学

的研究，“他的思想回到了作为莱茵地区的子孙的原来道路上去了”[29]。对上述这些方面的关心，还在爱兰根大学当教授的时候，他“碰到的就是极少的学生数量和毫无发展风气的环境”[30]。1872年11月Clebsch死后，他的学生们转移到爱兰根来了。这也是因为Klein“他那带有预言性质的学术感、构思的独创性、在别人研究所及的一切领域都能发现这些研究和他自己思想的联系这样一种惊人的能力……以及向所有的学生显示和这种特殊才能相应的揭示主题的能力”[31]。

在爱兰根之后的慕尼黑时代，Klein有两个课题：向工学院学生讲课和向教职候补者进行讲课。教职候补者，按慕尼黑的习惯，是在专科学校中进行学习的。Klein和Brill一道改变了教学计划，讲授四个学期以上的高等数学课程，对教职候补者还进行其他的特别讲义。在他的讨论班中，不仅有德国人，也有其他国家的人参加，是以椭圆模函数理论为中心的。Klein本人，对自守函数进行了深入的研究。1886年转到哥廷根之后，Klein的活动便脱离了创造性的研究而向外界更广泛地发展了。这一方面是因为他的名声不仅在国内，在国外也很有影响，另方面的理由或许是因为他那很有魅力的讲义的缘故。他的讲义从不模棱两可，组织严谨，从而使创造性地处理所探讨的对象成为可能。这些讲义确实是充满着确实、明晰和优美。他那以统一的精神为基调的讲义，是非常受人欢迎的[32]。有几种讲义被内部刻印或公开出版了。它们流传广泛，以至现在我们还可以看到它们[33]。除讲义之外，还有讨论班。Klein认为讨论班可以给学术研究以刺激。讨论班的主要课题，通常就是他正从事研究的问题。在讨论班上，他那丰富而多采的思想以及处理问题的方法便完整地传给了学生。

对应用数学的关心，自从转到哥廷根工作之后特别增强了。1892年，在Klein指导之下，对哥廷根大学的数学、物理学的教育制度、教育计划进行了很大的改革。从此在哥廷根纯粹数学和应用数学一道并立，这中间也不可忽视教育部长Althoff的谅解和援助。1895年从凯尼斯堡招聘来了33岁的希尔伯特(Hilbert)当教授。自从1885年Hilbert(23岁)在莱比锡会见过Klein之后，二人成了至交[34]。1902年又聘来了Minkowski。这样，哥廷根就成了世界的数学中心。1900年在哥廷根留学的日本数学家报告说：“为这里和柏林的完全不同而感到吃惊。这里是来自世界各国的少壮派的集合，实际上，这里是数学世界的中心”[35]。

1871—1900年，德国资本主义力量之强达到了顶点，开始超过其他国家。“生产过程的集约化以及与此相联结的技术和自然科学领域中史无前例的进步——这正是德国资本主义唯一的力量源泉。……与此相对应，在社会和文化领域内，在大学和企业经营中对技术和自然科学进行了特别的奖励，设立了大规模的实验所和研究所，于是出现了在资本主义发展史上最好的企业家的类型，即企业家兼技术家，或是企业家兼化学家(西门子、德依姆拉等人)。在大学有赫尔姆霍茨和其它自然科学家们，他们成为把学问式的研究和将其成果与实用化联结起来的一个环节”[36]。正是在这样时期的德国，作为莱茵工业区的子孙，Klein的性格才有可能得到了真正的发挥。对90年代初哥廷根的学会组织、德国科学院的组织、机械技术研究所以及应用电气研究所的建立，Klein有效地运用了他从美国学来的私人资本家因科学研究而产生成效方面的知识。自1895年起参加了数学百科辞典的编辑[37]，Schering死后，他更以老练的手腕着手于Gauss遗著的刊行工作[38]。从1902年开始，参加Hinneberg编辑的《现代文化》(《*Die Kultur der Gegenwart*》)工作，8年之间，和W.V.Dyck一起共同

负担其中的数学部分。此外,他还长期在普鲁士贵族院中代表哥廷根大学。

他从很早就梦想着纯粹数学和应用数学的统一。在慕尼黑工业专门学校时代,在对教职候补者进行的讲义中,就曾经包括画法几何学、统计学、力学等等,但这一理想在他发起的数学教育改革运动中进一步表现出来[39],1895 年新设立的数学和自然科学教育促进协会(Verein zur Förderung des Unterrichtes in Mathematik und Naturwissenschaften)的年会,由于 Klein 的创议,在哥廷根召开了。1898 年,创立了“哥廷根(“Vereinigung”)协会”[40],在这里参加讲习班的教师们接触到工业技术的尖端,并向他们提供了应用数学和物理学教育和研究的丰富手段。在 1892 年开始,两年一次在哥廷根召开的教员自然科学讲习班上,也包括了数学。1998 年更新了的普鲁士高等学校教职考核测验规定中,应用数学和纯粹数学脱离而独立出来了。作为大学的教材,应用数学也占据了巩固的地位。1900 年在学校协议会(Schulkonferenz)上,由于 Klein 的主张,强调了应用数学的必要性,并要求在中等学校讲授微积分和解析几何的基础。这一要求得到 Hauck、Lexis、Slaby 等人的赞同,成为数学教育改革的标志。Klein 在 1904 年的哥廷根演讲中,主张函数概念必须成为数学教学的中心,以后它更变成为“函数的思考方法”这样的一种口号而广泛渗透开来。在 1904 年自然科学家布列斯劳会议上的讲话中[41],Klein 曾对“大学数学教师只要注意一般教育学就可以了,而完全没有必要再去注意数学教育的方法”这种论调表示了遗憾。按这次布列斯劳会议的决定,他写了在翌年 1905 年米兰会议上公布的数学教学要目(讲习班用),其要点是[42]:

1) 教材的选择、排列,应适应于学生心理的自然发展。

2) 融合数学的各分科,密切与其他各学科的关系。

3) 不过分强调形式的训练,实用方面也应置为重点,以便充分发展学生对自然界和人类社会诸现象能够进行数学观察的能力。

4) 为达到此等目的,应将养成函数思想和空间观察能力作为数学教授的基础。

在同一时期,由于 1901 年佩里(Perry)在英国学术协会上发表了热烈的讲演,翌年莫尔(Moore)在美国数学会上也作了长篇演说,他们也都阐明了数学教育改革的必要性。这一运动在大正初年(1912)以后也逐渐影响到日本[43]。

1908 年在罗马召开的第四届国际数学家会议上设立了国际数学教育委员会(I. M. U. K),Klein 被选为中央委员。在下一届第五届国际数学家会议(1912 年剑桥)的国际数学教育委员会上 Klein 不仅是会议主席,同时作了德国分会的报告。需要巨大的耐心和能力才得以完成的这 8 大册的报告集[44],在很长时间里,成为数学教育全部努力的支柱,显示了第一次世界大战(1914—1918)前德国数学教育的一般状况。

60 岁以后,Klein 再次开始数学研究的活动。以 Einstein 的广义相对论、场论、量子论等等为中心,这些研究除若干篇论文之外,在他所著的《19 世纪数学史讲义》第二卷中也有所收入。

1925 年,他享年 76 岁去世。晚年的 Klein 是什么样子呢?在 Wiener 的会见记中出现的[45]“Herr Geheimrat”(顾问阁下!象英国获得“Sir”称号的科学家的那种尊严!)确实够令人注目的。但在他的头脑之中,19 世纪和 20 世纪初的数学是被他看成是什么样子了呢。

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

四、如何评价 Klein

首先，我们来看一下《Erlanger Programm》，它是因为"实质上统一的几何学，由于近来急剧的发展而分解成彼此几乎毫不相关的一系列分科"[46]，因此有总括起来进行考察的必要而发表的。19 世纪前半叶关于几何学各分枝的发展情况是：Monge (1794)、Poncelet (1813)、Möbius(1827)、Plücker(1834)、Steiner(1833)、V. Staudt(1848) 等人的综合几何学和解析几何学；Gauss(1827)、Riemann (1854) 的曲面论；Lobatschewsky (1829)、Bolyai (1832)、Riemann (1854) 的非欧几何学；汉弥登 (Hamilton)(1843) 的四元数；Grassmann (1844)的多次元空间几何学；由 Cayley、Sylvester、Aronhold、Clebsch 等人发展起来的代数不变式论(1850—1870)；还有 Listing (1847)、Möbius(1863)、Riemann(1851、1857) 等人发展起来的拓朴学[47]。《Erlanger Programm》应用变换群的概念，把这些几何学统一起来了。在《Programm》中，第一章、第二章叙述了基本思想，第三章以下则具体展开地叙述了射影变换群、点变换群、接触变换群等等。在这里流形和变换群变成了基础。几何学所研究的就是"当给出流形及其中的变换群时，不因群的变换而改变的属于流形的图形的性质"，换言之，"也就是关于这个群的不变式论"[48]。

和《Programm》相类似的一些想法，在格拉斯曼(Grassmann)那里已有些萌芽状态的思想[49]。流形的概念是由 Riemann 所创造的，也可以说它是和 Galois、Serret、C. Jordan 创立的群论巧妙地统一起来了。更正确些应该说这是学习了 Galois 和 Jordan 把群论应用于方程式论的先例，而把群论应用于空间理论。正如 Klein 自己也曾说过的那样，《Programm》思想的形成受到 Lie 的思想影响很大[50]。Cayley 的影响也不容忽视。正如在大多数数学史著作中所见到的，单独地谈论《Programm》容易招致误解，很有在发展的一系列进程中进行具体分析的必要。

《Erlanger Programm》的思想方法，支配了其后五十年间的几何研究[51]。但是现在我们已经知道，早在《Programm》之前就已经存在了的黎曼几何学和黎曼空间的扩张等诸多空间——这些都是为了物理学的发展而产生的——都是《Programm》思想框图之外的东西[52]。在 Cartan、Schouten 的联络几何学中也显示出来了《Programm》的局限性。

Klein 思想方法的一大特征，在于相互渗透的各学科间的融合。不仅《Erlanger Programm》可以说是 Glois (群)和 Riemann (流形) 的融合，他的自守函数也可以说是 Glois (群)和 Riemann (黎曼面)的融合。把历史上最重要的函数，指数函数、椭圆函数、模函数由于自守函数这一概念也归于群论支配之下。以单值化定理为其顶点的 Klein 关于函数论方面的研究，是 Riemann 思想的一个发展，对当时还是很艰深的黎曼面的全面理解，是非常必要的。此外，他的关于二十面体的书[53]，把几何学、代数学、函数论、群论等融合为一，堪称是一曲由深刻关系而支配着的旋律谱成的交响乐。

第二，Klein 是一位历史家。他把事物置诸于历史的浮雕像中去观察。在这点上也可以说，他从爱把事物绝对化的数学家的盲目倾向中解放出来了。在第一次世界大战期间写作的 19 世纪数学史讲义中，他着重阐明了数学发展的历史意义[54]。这部著作不单纯是数学事实的罗列。不仅是在数学书中，在关于数学教育的书中，在他的许多著作中，都包含有关于历史的考察。由于把数学放到历史中去考察，从而也就把它从孤立于文化之外的状态

中拯救出来了。此外也还可以使人联想起他主管的《数学百科辞典》和《现代文化》的编辑等事例。

从这个意义上说，他后半生努力的方向转移到数学教育方面来，可以说是很必然的了。这是因为数学的发展不能脱离文化的发展，从而数学教育的健全发展就将成为这一切的基础。

第三，他也是一个直观家。从抽象当中得到具体——这是他的座右铭。据说他经常喜欢谈论所谓"空虚的一般论"[55]。不是让群的概念抽象地去发展，而是应用于二十面体，从而更加透彻地解释了它的本质。在函数论的研究中，群论也起着支配的作用。虽然 Klein 曾说过"Gauss 从小就精通计算，但也不仅限于计算，而是具有对计算的思想上的洞察能力"[56]，而他本人则是把具体和抽象，计算和思考都结合在一起的。

使数学和物理学结合在一起，也是和上述情况相关联的。物理学为数学提供直观的素材并给数学以强有力的刺激。观察一下 19 世纪的数学史，物理学对数学产生影响之大，很使我们吃惊。Klein 在叙述物理学对数学的发展所给予的影响时说：在巴黎高等工艺学院，光学、电磁学等物理学上的发现，成了数学发展的巨大刺激。为什么呢？这是因为不断产生的新的思想和理论上的纠纷，都需要有数学的帮助"[57]，另方面在阐述 Riemann 的复变函数概念的小册子中[58]，他指出物理的考察就是在那些数学最难于捕捉得住的问题中，也可以看到物理学所给予的极其微妙的影响。在 19 世纪数学史中，他认为："Riemann 在研究函数论的时候，是从 Fourier 热传导理论中引导出函数边值问题的方法"，他还认为"Riemann 理论的基本思想是由直观的物理的思想中产生的"[59]。其实，Klein 的几何学、函数论的基本思想，也是来自直观的和物理的思想。

但是他这种直观的、具体的思想，大概也可以说是限制了他的研究的发展。正当 1870—1880 年代 Klein 在哥廷根研究函数论很有成就的时候，G. Cantor 则是在个人遭遇十分不幸的情况下展开了集合论的研究，同时在 Dedekind、Kronecker 的研究中开始出现了抽象的、公理化的代数学的 Programm。进入 20 世纪以后，由于 Hilbert 等人的研究，公理的方法成了数学研究的基本方法。我们可以从 20 世纪最初 10 年间数学家们的一些工作中看出抽象化、公理化的方法在迅速地发展着，如 Hilbert 的几何基础论(1899)和相对阿贝尔体(1902)、Lebesque 的积分论(1901)、Shur 的群指标论(1905)、Frobenius 的有限群的表示论(1903)、Zermelo 的选择公理(1904)、Russel 的数学原理(1910)、Wedderburn 的多元数构造(1907)、Fréchet 的抽象空间论(1906)、Steiniz 的体论(1910)、Weyl 的维数论(1911)等等。但是对公理化方法的兴旺发达，Klein 似乎并不感兴趣。在 19 世纪数学史讲义中，他对集合论毫未述及，同时却对 Weber、Nöther、Poincaré 等人关于阿贝尔函数的非常出色的研究没能给人们留下深刻印象而感到忧虑，他曾用下面的话开始了他的 19 世纪数学史讲义："和在其他科学中所发生的一样，在数学发展过程中也可以看到同样的过程。当新的问题一旦从内部或是外部产生之后，它便对青年研究工作者进行刺激，促使他们放弃老的问题。但是老的问题，因为它们已经不知被人们研究了多少次，所以这些老的问题要求可以支配很大范围的支配权。青年人转向那些几乎还没有被研究、几乎还不具备任何预备知识的问题，以形式的公式主义或是集合论等问题为研究对象是不合适的"。[60]Klein 很讨厌由于公理主义而产生的理论方面的尖锐化。"他的思想妨碍了使公理主义成为具体的数学研究的工具。……他满足于由应用数学而必须架设起来的在理论和实践间进行比较和对

照的桥梁"[61]。他也说过："Riemann 满足于有三个特异点的二阶微分方程式。这不仅是因为他没有研究高次的情况，而且是因为他对自已是忠实的，从而不去采取那种形式上的避难所"[62]，他这些话的意思并不只是在说抽象的形式等于不可能有所收获的不毛之地，而且也说明他仅是满足于数学各种事实之间相互比较和相互关联。他再从这些比较中，提炼出与各种事实都相关联的那些具有基本意义的东西，从而使对各种事实进行统一的观察成为可能。但从此他也就没有能再前进一步。公理化的方法，正因为它是进行数学研究的有效武器，因而它也就变成了进行现代数学研究的基本方法。从对具体对象的分析和使其普遍化开始，直到特殊化和进行综合的研究为止，作为一种认识的方法，公理化方法是强而有力的并且是很具有创造性能力的[63]。没有能看透这个问题的本质，这正是 Klein 的局限性。

Klein 寻求的并不是哲学而是经验。他认为"Mach 是这一方面的优秀代表，他今天依然是停留在那些从公正的经验的立场出发已经开始成为问题的、狭隘地约束于经验主义和心理学的那些当时的信条（dogma）之中"[64]。关于 Gauss 的非欧几何学，Klein 则认为："Gauss 是站在经验主义立场之上的。经验主义认为：空间存在于吾人之外并具有一些我们需要研究的固有性质。至于哪种几何学具有现实意义的问题，则应该由经验来决定"[65]。毫无疑问，并不能认为 Klein 是忽视理论的，而只能说他是比较重视实验和经验的。此外，对 Dedekind 所引入的具有划时代意义的理想数，Klein 采取了冷淡的态度[66]。对和公理主义一起产生的抽象的群的概念，他写道："最近一些数学家，当然他们都是比较正确的，可是却出现一些退了色的定义。他们已经不是在叙述运算的体系，而只是叙述关于'物'或是'元素 A、B、C……等的体系'"[67]，在给出了抽象群的定义之后，他又写道："幻想曲一般的叙述，至此就都退避开了。代之而行的则是对逻辑的骨架进行极为注意的解剖和剔取。……这种抽象的规范化，对完成证明来说是非常好的，但对发现新思想和新方法来说，则是完全不适当的，也就是说，在发现新思想和新方法之前已经显示出发展已经结束"[68]。在这里，Klein 是把公理的方法单纯看成是事后处理的一种方法了。当然，直观的——物理的思想方法是强而有力的，这一点我们不应忘记（请看一看 Riemann!），但是，Klein 对公理主义的评价却全然是片面性的。对 1897 年 Hilbert 的代数数域论，虽然作出了"这不仅是把迄今为止的数学重新建筑在更为简单的基础之上，而且还提出了新的问题"[69]这样的评价，但对从数体论得到的公理方法的本质，他却没能读懂。

实证主义的基本特征：第一，它是一种认为认识必须以经验为基础的学说，也就是说，它对建立思辩的体系是反对的；第二，虽然它认为认识必须以经验为基础，但那也只不过是为了能够在把观察结果互相关联在一起并能在预言一些结果方面起些作用。实证主义主张：反映独立存在于经验以外的客观实际是不可能的[70]。对作为工具的变换群，Klein 可以很有效地加以利用，但当作为客观实际中（当然是抽象了的实际），群的结构成了问题的时候，他就把它看做是退了颜色的东西而不再理它，Klein——他的思想基本上是带有实证主义的特征的。科学并不能提供对客观世界的认识，科学是由一些能够把观察结果相互联系起来而使用的公式和法则构成的。这就是实证主义的科学观。毫无疑问，《Erlanger Programm》对人们是产生了很大的影响的，但它并没能统管一切几何学。这大概不能不说是因为对"群""集合"等数学的实际概念分析得还很不够的缘故。以一个分枝领域中最基本的命题（公理）为基础，再根据逻辑的原则来建立概念的骨架——这方法就是 Hilbert 所说的公理化的方法[71]。但要想区分哪些是基本命题，哪些不是基本命题，则必须对那些对象进行

深入的、本质的分析。请观察一下最基本的数学实体——实数。实数集合，从代数的角度看，它呈现出群、环、体等不连续的侧面，从拓扑的角度看，它是"紧集"，则又呈现出连续性的一面。把连续性和不连续性两个方面性质统一在一起，这就是实数的集合。为了数学理论的发展，把连续和不连续两方面分别开来，在从各自不同的角度分析了对象的性质之后，还必须掌握把两个方面统一起来研究对象的性质。这里，对客观对象的本质的分析是很必要的。把群仅仅看成是进行工作时所用的工具，Klein 的思想并没有发展到如上所述的地步。

Klein 是一位卓越的数学家，但也可以说他是 19 世纪的数学家，而不是现代的数学家。Klein 和 Hilbert 的不同之处也正好是在这里。

在我们作如此之想的同时，不能不注意到在他去世前数月 Wiener 和他会面时，作为枢密院顾问官阁下！(Herr Geheimrat)的 Klein。在 1871—1900 年，达到高峰并开始超过其他国家的德国资本主义，仍然带有封建性的内核，不久就变成了帝国主义。1878 年，俾斯麦声明转向保护关税法从而推进助长了大农业经济和重工业发展的政策，同年宣布了社会民主党镇压法，在教育方面发布了"学校维持法"(1906)，又恢复到 18 世纪末的教育政策。这样，经济、政治、文化教育形成一体，把德国推向第一次世界大战——而经过大战，德国的封建、官僚的文职官员阶级仍然未能消灭。经过 1919—1923 年的通货膨胀，法西斯主义从中抬头。大概可以说，"枢密院顾问官阁下" Klein 思想的局限性，也和如此这般的德国是联系在一起的吧。

（杜石然译自日本《科学史研究》第 42 号，1957 年 4～6 月）

参 考 文 献

[1] D. J. Struik: *A concise history of mathematics*, 201—203 页有简洁的说明.

[2] クチンスキー：ドイツ经济史（高桥，中内译），33 页.

[3] クチンスキー：上述书，17 页.
关于康德、歌德、黑格尔，参见ソーリング：ドイツ社会文化史（栗原译），182—211 页.

[4] *Géométrie discriptive* (1768—99).

[5] *Application de l'analyse à la géométrie* (1809).

[6] *Traité des propriétés projectives des figures* (1922).

[7] クチンスキー：上述书，64 页.

[8] クチンスキー：上述书，82—91 页.

[9] 近藤洋逸：数学思想史序说，64 页.

[10] *Darstellung willkürlicher Function durch Sinnesreiche* (1837).

[11] *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse.* (Göttingen, 1851).

[12] *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (1854).

[13] *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grund liegen* (1854).
此等论文均载于《黎曼选集》(Dover，纽约，1953).

[14] リーマン：《关于几何学基础的假说》（菅原译，弘文堂），其中 Weyl 写的序言，第 7 页.

[15] 平凡社《理科事典》第 19 卷"科学技术史年表"，以及小堀宪：《数学史》208 页.

[16] A. Voß: *Felix Klein als junger Doctor*, 载于《Die Naturwissenschaften》1919, H. 17, S. 280.
关于 *Klein* 的生平多系根据在他 70 岁纪念时载于《Die Naturwissenschaften》专辑中的 A. Voß 所写的论文，以及 R. Fricke 的论文，关于数学教育运动则多采自 H. E. Timerding 所写的论文.

[17] 正确的提法是"*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die gerade Linie als Raumelement*".
[18] A. Voß 的上述论文(即"Felix Klein als junger Doctor"—译者), S. 281.
[19] *Zur Theorie der Linienkomplexe des I und des 2. Grades* (Göttinger Nachrichten,1869 及 Math. Ann. II, 1870).
[20] A. Voß 上述论文(即文献[18]的论文一译者), S. 282.
[21] *Sur une certaine famille des courbes et des surfaces* 这是柏林时期研究的成果.
[22] *Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen*, 见 Math.Ann. IV, 1871.
[23] 关于在巴黎时期两人活动的情况,在 Elie Cartan: *Un Centenaire Sophus Lie* (载于 F. L. Lionnais: Les Grands Courants de la Pensée Mathématique)中有简单记述.
[24] *Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie* (Göttinger Nachrichten, 1871).
[25] "*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*"是它的题目,1872年在爱兰根出版,后载于 Math. Ann. 43卷(1893).
[26] 关于这些研究,"*Die Naturwissenschaften*"特辑号上有论文目录.
[27] Klein: *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).
[28] Fricke: *Felix Klein zum 25 April 1919, seinen siebzigsten Geburtstage* (Die Naturwissenschaften 特辑号所载) 277 页.
[29] Timerding: *Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts* (Die Naturwissenschaften 特辑号所载) 303 页.
[30] Fricke: 上述论文(参考文献[28]——译者), 277 页.
据说由一位教授以 1—2 名学生为对象进行讲课并不少见.
[31] A.Voß 的上述论文(参见文献[16]——译者),286 页.
[32] Fricke: 上述论文(参见文献[28]——译者),277 页.
[33] 举出此类书籍的书名有:
Nicht-Euclidische Geometrie I (1888—90), II(1890).
Höhere Geometrie I (1891—92), II (1893).
Riemannsche Flächen I(1891—92), II(1892).
Über die hypergeometrische Funktion, 1893—94.
Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, 1894.
Ausagewählte Kapitel der Zahlentheorie, I(1895—96), II(1896).
Anwendung der Differential und Integralrechung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, 1901. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I(1908), II(1909).
Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Linearen Differentialgleichungen Zweiter Ordnung, I. (1890—91),II(1891)
Die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert,I(1926),II(1926—27).
[34] O.Blumenthal: *Lebensgeschichte* (载于 D. Hilbert: Gesammelte Abhandlungen II)在 392—401 页有 Klein 和 Hilbert 交往关系方面的记述.
[35] 高木贞治: 近世数学史谈, 192—193 页.
[36] クチンスキー: 上述书,108 页.
[37] *Enzyklopädie der math. Wissenschaften mit Einfluß ihrer Anwendungen*,1卷,数论、代数(1907—08); 2卷,解析(1907—); 3卷,几何(1907—08); 4卷,力学(1907—17); 5卷。
[38] Gauss' Werken, 第7卷(1906),第8卷(1900), 第9卷(1903), 第10卷 (1917), Leipzig, Teubner.
[39] 关于数学教育部分,材料多取自 Timerdig 的论文.

[40] 正确的应是在 Göttinger Vereinigung der angewandten Physik 之后加上 und angewandten Mathematik.

[41] 收入 Klein 和 Schimmack: *Der Mathematische Unterricht an den Höheren Schulen*. I. 193—207 页.

[42] ペリー,ムーア: 数学教育论(锅岛译)的附录,94—95 页.

[43] 大正 7 年(1918 年)12 月由中等教育会主办在东京高师举行了"全国数学教师协议会",议论了重视函数概念、图象的讲授和实验实测的引入等等.(ペリー、ムーア:上述书,第 102 页).

[44] 第 1 卷(1903—13),第 2 卷(1910—13),第 3 卷(1911—16),第 4 卷(1910—15),第 5 卷(1912—16),第 6、7、8 卷的刊出时间未考(Leipzig, Teubner).

[45] ウィーナー:サイバネテイツクスはいかに生れたか(镇目译),第 60 页.

[46] Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (1872),4 页.

[47] C. Carathéodory: *Die Bedeutung des Erlanger Programms* (Die Naturwissenschaften 特辑号所载)第 298 页.

[48] Klein: 上述书,7 页.

[49] Klein: 上述书,39 页.

[50] Klein: 上述书,4 页、23—28 页、32—36 页、39 页,以及 E. T. Bell: Development of Mathematics (1940),第 397 页.

[51] 50 年的数字是根据下列书籍:
H. Weyl: *Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart* (Die Naturwissenschaften, 1930, H.1)第 6 页,或 Bell: 上述书,第 10 页.

[52] ヴエブレン・ホワイトヘツド: 微分几何学基础(矢野译)第 32 页及 Weyl: 上述论文第 10页.

[53] *"Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade"*, Leipzig Teubuner, 1884.

[54] 在《科学史研究》12 号(1949),139—141 页上有远山启的介绍.

[55] 高木贞治: 上述书,201 页.

[56] Klein: *Vorlesungen über die Entiwicklung der Math. im* 19 *Jahrundert*, 31 页.

[57] Klein: 上述书,67 页.

[58] *"Über Riemanns Theorie der algebraischer Funktionen und ihrer Integrale"* (1882).

[59] Klein:上述书,262 页.

[60] Klein:上述书,312 页.

[61] Weyl:上述论文,7—8 页.

[62] Klein:上述书,270 页.

[63] 近藤洋逸: 数学思想史序说,215—228 页。近藤洋逸: フーリエ的精神とセコビ的精神("思想"284 号,1948)34—35 页.

[64] Weyl: 上述论文,第 5 页.

[65] Klein: 上述书,第 117 页.

[66] Klein: 上述书,323 页(此处据近藤上述书转引,34 页).

[67] Klein: 上述书 335 页(此处据近藤上述书转引,34 页).

[68] Klein: 上述书 335—336 页(此处据近藤上述书转引,34 页).

[69] Klein: 上述书,330 页.

[70] コンフオース: 哲学の拥护(花田译)8 页.

[71] 参照ヒルベルト: 公理论的思想(载于ヒルベルト《几何基础论》(中村译)的附录 216—236 页).

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com