

# CWCCAST

## 钢筋混凝土结构非线性有限元分析

Collected in Works Contemporary Civil and  
Architectural Science and Technology

江见鲸 著



陕西科学技术出版社

---

# CWCCAST

## 钢筋混凝土结构非线性有限元分析

Collected in Works Contemporary Civil and  
Architectural Science and Technology

江见鲸 著



陕西科学技术出版社

---

(陕)新登字 002 号

当代土木建筑科技丛书

钢筋混凝土结构非线性有限元分析

江见鲸 著

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街 131 号)

新华书店经销 西北工业大学印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 6 插页 12 印张 27 万字

1994 年 3 月第 1 版 1994 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1-3,000

ISBN 7-5369-2012-1/TU·58

定价: 15.40 元

## 当代土木建筑科技丛书编委会

主 编：许溶烈

编 委：(以姓氏笔划为序)

丁大钧	丁士昭	丁金粟	毛朝屏
刘 季	刘大海	江见鲸	许溶烈
安 昆	李家宝	李 秀	付昌宁
何广乾	宋绍铭	严星华	杨嗣信
陈家辉	陈启高	陈祥福	陈寿梁
陈一诺	张 珑	张钦南	张祖刚
罗祥麟	周兆桐	郑坤生	郑道宏
秦 荣	袁文伯	徐永基	徐正忠
徐培福	高渠清	梅占馨	韩大建
程庆国	程耿东	谢礼立	谢行皓
鲍家声	虞福京	魏 珺	

# 序 序 序 序 序 序 序 序 序 序

中华人民共和国建设部总工程师

许溶烈

经济建设必须依靠科学技术，科学技术也必须面向经济建设。建国以来，我国土木工程理论和技术得到了空前的发展。兴建了很多有代表性的工程，如广东国际大厦、上海南浦大桥、大瑶山隧道、秦山核电站等。这些工程规模宏大、技术难度高，有的填补了我国空白，有的达到了国际先进水平，充分体现了我国当代土木建筑的科技水平。

为适应深化改革与发展现代化建设事业的需要，由国内著名专家、学者、教授和管理者共同倡议：以高度的时代责任感和献身精神组织编著、出版能够反映当代国内外土木工程科技方面近年来新成就的系列丛书。经过广泛调查研究和征求意见，现决定编辑出版当代土木工程科技丛书，英文译为：“Collected Works in Contemporary Civil and Architectural Science and Technology”。

# 目录目录目录目录目录目录目录目录

绪论	【 1 】
第 1 章 混凝土的破坏准则	【 5 】
1.1 概述	【 5 】
1.2 单轴受力下的应力应变关系	【 6 】
1.3 双轴受力下的混凝土强度	【 13】
1.4 三轴受力下的混凝土强度	【 16】
第 2 章 混凝土材料的本构关系	【 35】
2.1 概述	【 35】
2.2 非线性弹性本构关系——全量型	【 48】
2.3 非线性弹性本构关系——增量型	【 57】
2.4 弹塑性本构关系——形变理论	【 62】
2.5 弹塑性本构关系——增量理论	【 65】
2.6 弹塑性损伤断裂模型	【 82】
2.7 粘弹性与粘塑性本构关系	【 86】
2.8 内时理论	【 88】
第 3 章 钢混结构的有限元模型	【 91】
3.1 分离式模型	【 91】
3.2 组合式模型	【109】
3.3 整体式模型	【116】

# 目录目录目录目录目录目录目录目录

<b>第 4 章</b>	<b>裂缝的处理方式</b>	<b>【118】</b>
4.1	处理裂缝的主要方式	【118】
4.2	开裂混凝土单元的应力应变关系矩阵	【119】
4.3	混凝土开裂时释放应力的计算	【123】
4.4	断裂裂缝与奇异等参单元	【124】
4.5	弥散裂缝与等效断裂变形	【128】
<b>第 5 章</b>	<b>非线性方程组的解法</b>	<b>【133】</b>
5.1	结构分析非线性问题	【133】
5.2	非线性方程组求解的逐步增量法	【134】
5.3	求解非线性方程的迭代法	【137】
5.4	收敛标准	【139】
5.5	非线性方程求解方法实例比较	【140】
5.6	考虑结构负刚度的一些算法	【144】
<b>第 6 章</b>	<b>程序设计与计算例题</b>	<b>【150】</b>
6.1	程序设计图	【150】
6.2	计算实例	【153】
6.3	整体式平面有限元分析源程序	【155】
<b>主要参考文献</b>		<b>【183】</b>

# 绪 论

## 绪 论 绪 论 绪 论

随着电子计算机的发展，有限元法等现代数值分析方法在工程分析中得到了越来越广泛的应用。同样，在钢筋混凝土结构的分析中也开始显示出这一方法是非常有用的。这是由于运用有限元法分析可以提供大量结构反应信息，诸如结构位移，应力、应变的变化，混凝土压屈，钢筋流动，粘着滑移，破坏荷载，等等。这对研究钢筋混凝土结构的性能，改进工程设计都有重要的意义。

把有限元法等数值方法应用于钢筋混凝土结构存在着许多复杂的因素，主要有：

(1) 钢筋混凝土结构是由两种材料组合而成的——钢筋与混凝土。

(2) 混凝土本身是由水、砂石骨料和水泥，有时还有其它外加剂复合而成。在混凝土硬化以后，在混凝土中仍留有自由水和孔隙，甚至还有未水化的水泥粒，并不可避免地形成许多微观裂缝。混凝土的应力应变关系是非线性的，并且受很多因素的影响。在复杂应力条件下，混凝土本构方程仍然是一个需要深入研究的问题。

(3) 在荷载作用下，一般钢筋混凝土结构是带裂缝工作的。混凝土中的裂缝随荷载的增加而不断发展。

(4) 混凝土的变形是与时间有关的，如收缩和徐变。

(5) 钢筋与混凝土之间的粘结关系非常复杂，如何模拟粘结关系也还需要进一步研究。

(6) 钢筋本身的非弹性性能。

由于这些复杂因素，要精确分析一个钢筋混凝土结构从加载到破坏的全过程是十分困难的。长期以来，钢筋混凝土结构的分析主要靠实验和经验公式，而且主要是对杆件结构。对于复杂的混凝土结构要么用模型试验，要么用弹性理论，对某些结构可用极限平衡理论求得其极限承载力。近十多年来随着电子计算机的出现和混凝土本构关系研究的深入，钢筋混凝土结构有限元分析方法得到了迅速的发展。

最早用有限元方法分析钢筋混凝土梁的学者是 Ngo 和 Scordelis<sup>[1]</sup>。他们于 1967 年在 ACI 杂志上发表了一篇有关这一内容的论文。在他们的研究中，主要还是基于线弹性理论，但是他们根据实验观察结果，在混凝土梁中预先设置了裂缝，并且用无几何尺寸的弹簧来模拟





钢筋和混凝土之间的粘结关系。这一研究获得了很大的成功，引起了很大的反响。自此以后，许多学者在这一领域进行研究，发表了大量研究成果。

1968年 Nilsson 发展了 Ngo 等人的工作<sup>[14]</sup>，将钢筋和混凝土之间的非线性粘结关系和混凝土本身的非线性应力应变关系引入有限元分析，当钢筋土开裂后就重新划分网格，把裂缝置于单元边界上。Franklin 于 1970 年首先引入“弥散裂缝”的方法<sup>[28]</sup>，可自动跟踪裂缝的发展。这一方法为有限元分析实际钢筋混凝土结构提供了有力的工具，获得了广泛的应用。70 年代初期，Zienkiewicz 领导的有限元研究小组将等参单元用于钢筋和混凝土的组合单元，并提出了一个适合于混凝土的屈服准则，基于塑性增量理论建议了一个本构关系模型，分析了核电站的钢筋混凝土安全壳<sup>[17]</sup>。1969 年已有学者用分层法来建立钢筋混凝土梁的弯曲单元，稍后 Lin 和 Scordelis 将分层法用于极壳单元等弯曲构件<sup>[16]</sup>，这一方法至今还广泛用于梁、刚架、拱等杆件结构。Pecknold 和 Darwin 建议了正交异性的本构关系，分析了剪力墙体在反复荷载下的反应<sup>[5]</sup>。美国加利福尼亚柏克利分校的地震研究中心对钢筋混凝土刚架结构发表了一系列动力分析的研究报告。美国土木工程师学会混凝土与污工结构分会于 1982 年组织许多学者编写了关于“钢筋混凝土有限元分析”的技术现状报告<sup>[43]</sup>，可以说是对 1982 年以前所取得成果的一次大总结。自此以后，各国学者对混凝土本构关系模型、有限元分析技术、裂缝的处理等的研究都有很大进展。目前已经有一些国际规范开始引入非线性有限元分析。

我国是应用钢筋混凝土结构很广泛的国家，自 70 年代开始对钢筋混凝土的有限元分析进行了广泛而深入的研究，取得了许多重要成果。

钢筋混凝土分析的基本前提是要建立钢筋、混凝土材料的本构关系。建立材料的本构关系一般在已有的理论框架中进行。可以说凡是在固体力学中应用过的本构关系，都有学者将它用于混凝土材料的本构关系。表 0-1 中列出了一小部分例子，从中可以看到混凝土本构关系的复杂性。

表 0-1 混凝土材料本构关系应用

理论框架	应用学者（举例）	分析的结构
线弹性理论	Ngo and Scordelis <sup>[1]</sup> 熊敦土、汪泰钧等 <sup>[2]</sup>	剪切破坏梁 <sup>[1]</sup> 核反应堆安全壳 <sup>[2]</sup>
非线性弹性理论 全量 $K-G$ 型 全量 $E-\nu$ 型 增量 $K-G$ 型 增量 $E-\nu$ 型	Cedolin and Dei Poli <sup>[3]</sup> Ottosen <sup>[26]</sup> 、江见鲸 <sup>[7]</sup> Zienkiewicz <sup>[17]</sup> Darwin and Pecknold <sup>[5]</sup> 肖国模、茅声焘	拔出试件，受弯、扭构件 核反应堆安全壳 梁、框架、剪力墙 梁、深梁
弹塑性理论 理想弹塑性 硬化弹塑性 等强硬化 随动硬化 混合硬化	Suidan and Schnobrich <sup>[6]</sup>  Buyukozturk <sup>[8]</sup> 刘西拉、许锦峰 <sup>[36]</sup> W. F. Chen <sup>[22]</sup>	梁、板、壳 梁、筒壳、柱 劈拉试件、剪力墙



续表

理论框架	应用学者 (举例)	分析的结构
内时理论	Bazant <sup>[9]</sup> 邱小坛 <sup>[38]</sup>	梁 反复加载构件
粘弹性, 粘塑性	Sandhu Glemberg, Nilsson	混凝土坝徐变分析 梁, 受撞击杆
断裂力学	Peterson <sup>[11]</sup> Ingrafee <sup>[33]</sup> 于晓中 <sup>[44]</sup>	三点弯曲梁 混凝土坝裂缝分析 钢筋混凝土梁, 坝
损伤理论	Resende 吴健生、黄真 <sup>[39]</sup> 程庆国、高路彬 <sup>[40]</sup>	双向受压试件 反复加载试件 双向受压试件

在分析钢筋混凝土构件或结构时, 要考虑各种非线性因素。不同学者在分析中考虑的因素有多有少, 从表 0-2 中可以看出一个概貌。

表 0-2 钢筋混凝土构件分析的非线性因素

作者	混凝土非线性 $\sigma-\epsilon$	分离式裂缝	弥散式裂缝	混凝土收缩、徐变	二维结构	三维结构	板、壳结构	钢筋 $\sigma-\epsilon$ 非线性	钢筋屈服	粘线性	粘非线性	栓钉作用
Ngo & Scordelis		0			0					0		0
Nilsson	0	0			0						0	0
Franklin			0		0							
Cervenka			0									
Door	0	0	0		0						0	0
Schnobrich	0		0			0	0		0			
Hoshino			0	0							0	
Cedolin & Deipoli	0		0		0				0		0	0
Valliappan & Dorlan			0		0				0			
Zienkiwicz	0		0		0	0			0			
Ebbinghaus	0		0		0							
Argyris	0		0			0						
Buyukoz turk	0		0			0						
Lin			0		0		0		0			
Kusters	0		0		0				0			



尽管钢筋混凝土有限元分析得到了深入的研究和广泛的应用，但仍有许多问题需要进一步研究。例如：

(1) 混凝土的本构关系。在复杂应力状态下的破坏准则和应力应变关系，钢筋与混凝土之间的粘结关系，虽然已进行了不少实验和理论研究工作，但还是不够完善，数量较多的还局限于单向和双向荷载。在复杂应力状态下的实验数据还很不充分。近十多年来，许多学者提出了不少破坏模式和应力应变关系的计算公式，但是由于试验方法不同，加上混凝土材料的性质变异性很大，所得结果往往不大一致。许多问题还需要进一步探讨。

(2) 理论框架。从理论方面来看，尽管有了很多理论可供应用，但对于像钢筋混凝土这样具有复杂本构关系的结构，尚需进一步研究。例如，混凝土的受压或受拉全过程曲线，都反映有下降阶段。用弹塑性理论分析时，如何处理这一“软化”现象，仍是一个困难的问题。又如断裂力学对于处理已经存在的单个裂缝的扩展，是相当有效的，但对于经常有成批裂缝存在的钢筋混凝土结构又该如何处理呢？这也是需要深入研究的问题。近年来，有许多学者将损伤力学用于混凝土结构分析，这方面的课题确实吸引了不少学者，研究工作相当活跃，也有了一些成果。

(3) 数值方法的计算精度。在混凝土结构的有限元分析中，由于非线性因素很多，为了考虑这些非线性因素往往要引入许多参数，这些参数还可能相互影响，有的还很难由实验直接测定，再加上混凝土材料本身的复杂性和离散性，有些断裂和破坏的机理还不完全清楚，所以对结构的非线性分析的结果往往呈现出较大的变化幅度，这也是在今后一段时间内需要重点研究和改进的问题。

由于钢筋混凝土非线性分析需要大容量、高速度的计算机，计算费用很高，也很费时间，因而，对量大面广的钢筋混凝土结构非线性分析还是极少应用的。目前常用于下列几种情况：

(1) 用于重大结构，如原子能电站的安全壳、海上采油平台、大型地下洞库等。这些结构一旦失效，经济损失很大，社会政治影响也很大，因而在对这些结构的可靠性评价过程中，往往需用非线性有限元方法进行分析。

(2) 用于结构或构件的全过程分析。如混凝土坝，施工工序多，工期长，交付使用后还有徐变，对这一全过程中各阶段的受力性能，应力、位移分布，徐变后的内力重分布等，必须用非线性有限元方法才能得出合理的结论，以供设计和施工参考。有些构件，如深梁、梁柱节点，已有主导裂缝的构件等，人们需要对其受力全过程作深入了解，这时也往往借助于非线性有限元分析。

(3) 辅助实验分析。为了研究各种参数，如混凝土标号、钢筋强度、配筋型式等对结构构件的影响，往往要做很多组试验，工作量大，周期长，劳动强度大。用非线性有限元法辅助实验，则可进行少量基本试验，确定参数，校核算法模型，然后进行内插或外延，得到参数变化的影响。这对减轻劳动、减少试验数量、提高效率是很有意义的。

本书力求反应几十年来国内外有关学术成果，特别注重介绍我国学者的贡献。书中对各种混凝土破坏准则都进行了说明，重点则介绍应用较广泛的非线性弹性理论和弹塑性理论。在数值方法上，针对混凝土结构的特点，介绍了多种有限元方法的具体技术。本书力求把理论、概念、计算方法和计算机程序设计结合起来，以便有兴趣的读者可以得到钢筋混凝土有限元分析的完整概念，便于实际应用。



# 第 1 章

## 混凝土的破坏准则 混凝土的破坏准则 混凝土的破坏准则

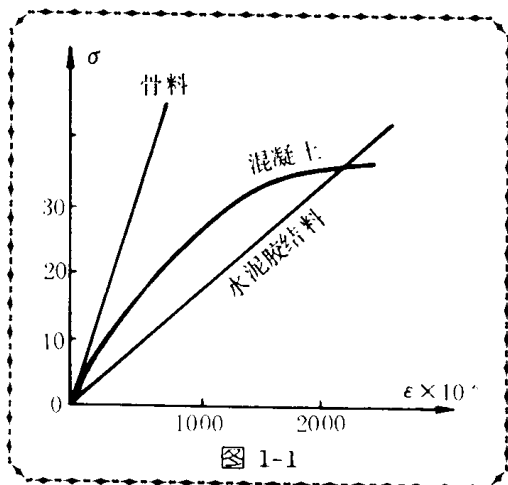
### 1.1 概 述

混凝土是一种复合的多相材料，内部结构非常复杂。从宏观结构看，可以把混凝土看作是骨料分散在水泥浆基材中的多相材料，或者看成是骨料分散在砂浆中的材料。当结构尺寸大于粗骨料尺寸 4 倍以上时，往往看作是均匀的各向同性材料，作宏观受力分析，供设计应用。从微观结构看，混凝土是由水泥凝胶、氢氧化钙结晶、未水化的水泥颗粒、凝胶空隙、毛细管及孔隙水、空气泡等组成。此外，水泥的水化反应会延续相当长的时间，毛细管中的水分还会继续蒸发，留下不少空隙与微细裂缝。因而混凝土从微观上看是不均匀的多相材料。许多学者致力于微观力学研究，这对于分析研究混凝土变形、断裂的内部原因和破坏机理是很重要的，目前已经取得了许多成果。但从结构工程师的观点来看，作结构分析和结构设计时，则总是从宏观的层次上把混凝土看作均匀的各向同性的材料。本书介绍混凝土结构的非线性有限元分析，因而重点在于从宏观层次上说明混凝土的强度理论和本构关系。

骨料、水泥砂浆和混凝土的应力应变关系示于图 1-1。从图上可知：一般混凝土中的骨料强度较高，其应力应变是线性的，水泥胶结料的应力应变关系基本上也是线性的，而这两者组合而成的混凝土却具有明显的非线性。研究表明，混凝土中骨料与水泥浆的交界面是一个薄弱环节，它对混凝土力学性质有重要影响。

混凝土内部裂缝对混凝土的性能有很大影响，其发展大致可分为裂缝的发生、延伸、扩展直到混凝土发生破坏四个阶段。

(1) 原始微裂缝阶段：在加载以前，由于水泥浆硬化干缩，水分蒸发留下裂缝等原因，在



混凝土内部形成原始微裂缝。这些微裂缝大多出现在粗骨料与砂浆结合的界面上，少部分出现在砂浆内部。如果养护适当，在没有出现宏观的干缩裂缝的条件下，这些微裂缝是稳定的，并且从统计观点来看是分散均匀的。

(2) 裂缝的起裂阶段：在加载不太大时，例如单轴压应力不超过极限抗压力的 30~40% 时，只在试件某些孤立点上产生“拉应变”集中。这时混凝土内部的原始裂缝有一部分开始延伸或扩展，但都很短，数值微小。当这些微裂缝延伸或扩展后，应力集中得到缓和并立即恢复平衡。这一阶段的应力应变关系基本上接近弹性关系，也有人称为准弹性关系。在这一阶段，如荷载保持不变就不会产生新的裂缝；当卸载时，有少量裂缝还能闭合。

(3) 稳定裂缝的扩展阶段：如果荷载继续增加，但不超过临界应力（对单轴受压来说应力在 70~90% 的抗压强度以内），则已有的裂缝便进一步延伸或扩展，有的伸入砂浆内部，有些短裂缝会彼此相接而形成成长的裂缝，同时有新的裂缝产生，这一阶段应力应变关系呈明显的非线性关系。如果停止加载，裂缝的扩展也会停止，不继续发展，因而可以称为稳定裂缝的扩展阶段。

(4) 不稳定裂缝的扩展阶段：当荷载超过临界应力后，裂缝逐渐连接贯通，砂浆体内的裂缝急剧增加，发展加快。在这一阶段，即使荷载保持不变，裂缝也会自行继续延伸和扩展，也即荷载不变时也会导致破坏。因而任何长期荷载都不应超过临界应力值。这一阶段称为不稳定裂缝的扩展阶段。在这一阶段，单轴受压试件的体积不仅不缩小，反而开始膨胀。最后，贯通的裂缝将试件分裂成若干小柱，这时，荷载即使减小，变形也还会增加。

本章将介绍在一维应力状态下的应力应变关系及二维、三维应力状态下的混凝土破坏准则。

## 1.2 单轴受力下的应力应变关系

### 1. 典型的单轴受压 $\sigma$ - $\epsilon$ 曲线

混凝土的应力-应变关系是钢筋混凝土构件强度计算、超静定结构内力分析、结构延性计算和钢筋混凝土有限元分析的重要基础。在相当长的时间内，认为  $\sigma$ - $\epsilon$  曲线在达到强度极限以后没有下降段，即混凝土为完全脆性的材料。随着试验设备和测试方法的改进，现在已能得到  $\sigma$ - $\epsilon$  全过程曲线。

混凝土受压时典型的应力应变全过程曲线如图 1-2 (a) 所示。上升段大体上可分为三段， $0a$  段基本上接近直线， $a$  点的应力约为  $(0.3\sim 0.4) f_c$ 。 $ab$  段非线性已很明显，相当于稳定裂缝的扩展阶段， $b$  点应力称为临界应力，约为  $(0.8\sim 0.9) f_c$ 。 $c$  点为短期荷载的极限应力，是应力峰值，自此以后曲线进入下降段。与  $f_c$  相当的应变  $\epsilon_0$  约在 0.002 左右。如能自动控制加载速率（应变速率），则可以得到下降段，即混凝土在应变增加的条件下，承担的应力逐渐下降直到极限应变  $\epsilon_u$ 。

影响应力应变曲线形状的因素很多，主要的有混凝土强度、加载速度和横向约束条件等。

关于混凝土强度的影响可以参看图 1-2 (b)。由图可见，混凝土强度愈高， $\sigma$ - $\epsilon$  曲线的上升段和下降段愈陡，混凝土强度比较低时，曲线比较扁平。相当于峰值应力  $f_c$  的应变  $\epsilon_0$  也随着混凝土强度的增大而增大，但变化幅度不大，约在 0.0018~0.0023 之间。最终破坏时的



应变称为极限应变，低标号混凝土的极限应变反而会大一些。

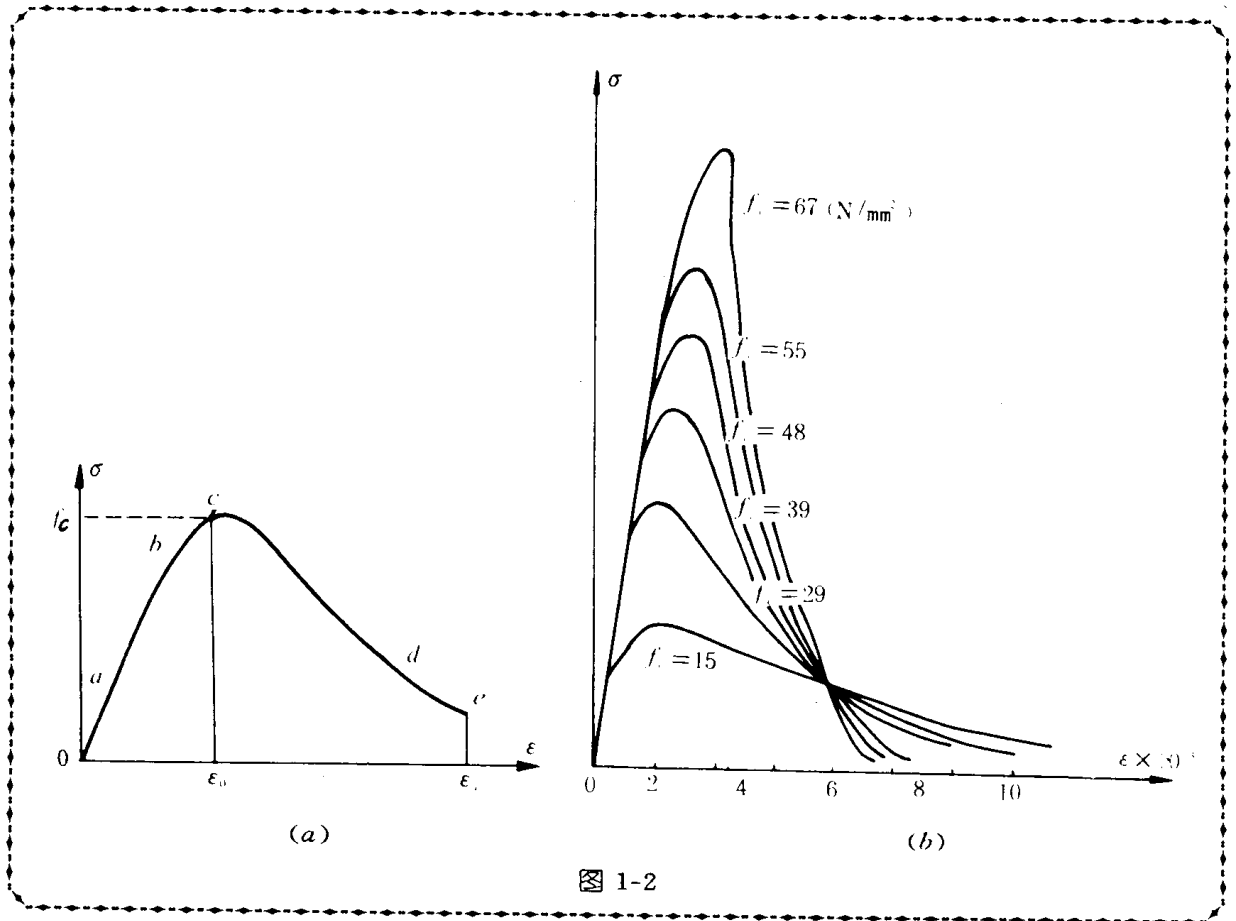


图 1-2

试验方法的影响主要是加载速度的影响。加载速度快，应变速率高，则最大应力  $f_c$  有所提高，但曲线坡度比较陡；反之则曲线比较平坦，并且极限应变  $\epsilon_x$  比较大，见图 1-3 (a)。

混凝土单向受压，它在侧向将发生膨胀。如果侧向配置较密的钢箍，侧向膨胀受到约束，则称为有侧向约束的混凝土，简称约束混凝土。相反，若侧向变形不受约束，则称为无侧约束混凝土。显然，有侧向约束就会提高混凝土的强度和延性，提高的程度和钢箍选用（包括直径、间距以及钢箍的形状、强度）有关。这些影响从图 1-3 (b) 上可以看出。从图上还可以看到，侧向约束对下降段曲线的影响更加显著。侧向约束愈大，则曲线下降段愈平缓。

## 2. 混凝土单轴受压 $\sigma-\epsilon$ 关系的数学表达式

从实验可以得到混凝土受压时的  $\sigma-\epsilon$  关系曲线，为了便于分析计算，还必须用一个数学公式来表达。混凝土应力应变曲线的研究已有较长历史，很多学者提出了各种不同的数学表达式，约有几十个。下面列出应用较广的有代表性的几种数学表达式。

1) 我国《混凝土结构设计规范》(GBJ10-89) 建议的表达式 这一曲线由上升段和水平段组成，见图 1-4。

$$\text{上升段} \quad \sigma = \sigma_0 \left[ 2 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{当 } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$$



水平段

$$\sigma = \sigma_0 \quad \text{当 } \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_u \quad (1-1)$$

这一公式最早由德国学者 Rüschi 提出, 原建议表达式取

$$\sigma_0 = 0.85R$$

( $R$  为混凝土立方体抗压强度)

$$\epsilon_0 = 0.002$$

$$\epsilon_u = 0.0035$$

新修订的我国《混凝土结构设计规范》(GBJ10-89) 也采用了这一表达式, 取  $\epsilon_0 = 0.002$ , 均匀受压时取  $\sigma_0 = f_c$  (混凝土轴心抗压强度设计值),  $\epsilon_u = 0.002$  (不考虑下降段); 不均匀受压时取  $\sigma_0 = f_{cm}$  (混凝土弯曲抗压强度设计值),  $\epsilon_u = \epsilon_{cu} = 0.0033$ 。

2) Hognestad 表达式

这是美国学者提出的, 是目前世界上应用最广泛的曲线之一。这一曲线上升段为抛物线, 下降段为斜直线, 参见图 1-5。

具体表达式为

$$\text{上升段} \quad \sigma = \sigma_0 \left[ 2 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{当 } \epsilon \leq \epsilon_0 \quad (1-2)$$

$$\text{下降段} \quad \sigma = \sigma_0 \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) \right] \quad \text{当 } \epsilon < \epsilon_0 < \epsilon_u$$

Hognestad 建议理论分析时取  $\epsilon_u = 0.0038$ , 而在设计中可取  $\epsilon_u = 0.003$ 。并建议  $\epsilon_0 = 2 \left( \frac{\sigma_0}{E_0} \right)$ ,  $E_0$  为初始弹性模量; 建议  $\sigma_0 = 0.85f_c'$  ( $f_c'$  为混凝土圆柱体抗压强度)。这一建议取斜率为 15% 的斜直线来考虑混凝土的下降段, 表达简洁, 又抓住了主要特征, 因而得到广泛应用。

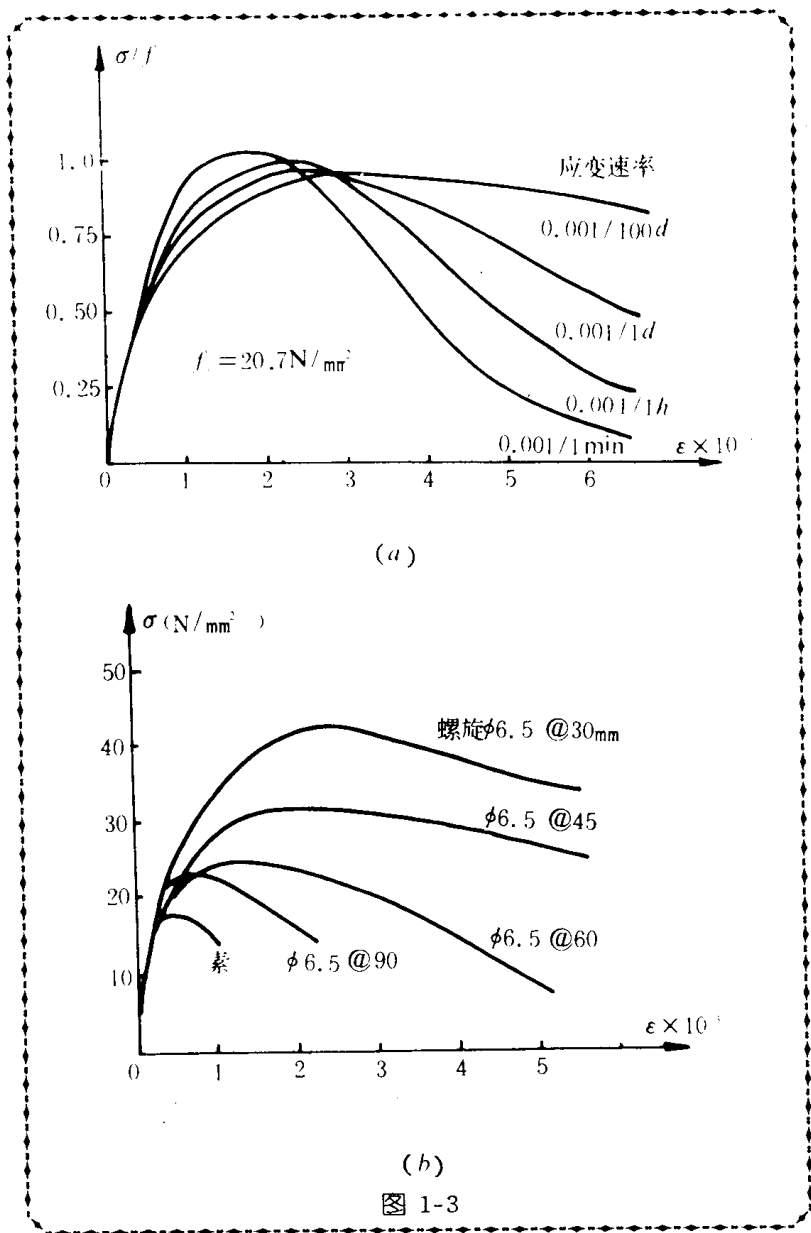


图 1-3



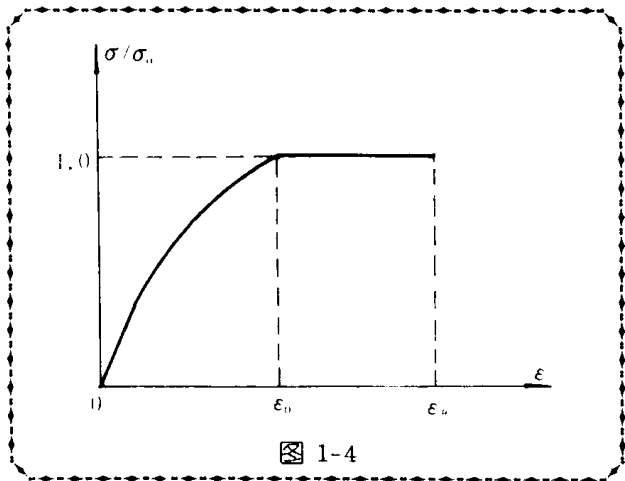


图 1-4

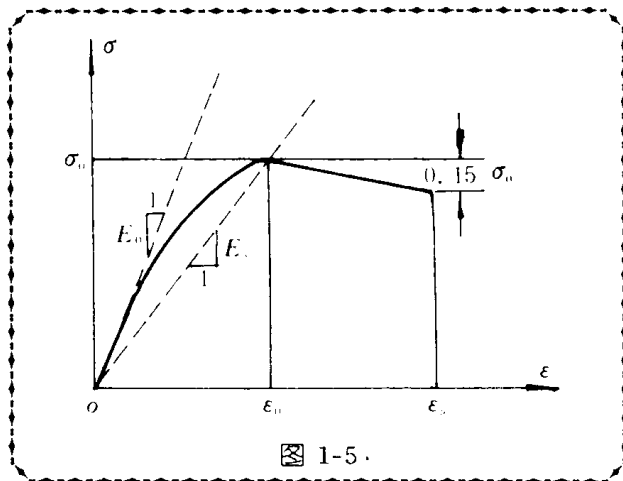


图 1-5

3) 日本学者梅村魁提出的指数函数表达式  
这一公式在日本应用很广，具体公式为

$$\sigma = 6.75\sigma_0 \left[ e^{-0.812(\frac{\epsilon}{\epsilon_0})} - e^{-1.218(\frac{\epsilon}{\epsilon_0})} \right] \quad (1-3)$$

由这一公式给出的曲线形状如图 1-6 所示。

4) Saenz 等人的表达式

1964 年 Saenz 提出一个关于  $\sigma-\epsilon$  曲线的公式：

$$\sigma = \frac{E_0 \epsilon}{1 + (\frac{E_0}{E_s} - 2)(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}) + (\frac{\epsilon}{\epsilon_0})^2} \quad (1-4)$$

式中： $E_0$  —— 初始弹性模量；

$E_s = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$  —— 应力达峰值时的割线弹性模量；

$\sigma_0, \epsilon_0$  —— 分别为应力达峰值时的应力、应变。

这一式子能很好地反应混凝土的  $\sigma-\epsilon$  曲线，特别是上升段公式也不复杂，因而引起广泛的注意。为更好地反映下降段的性质，1979 年经 Elwi 和 Murray 改进后的表达形式如下：

$$\sigma = \frac{\epsilon}{A + B\epsilon + C\epsilon^2 + D\epsilon^3}$$

根据下列 5 个控制条件（参看图 1-7）

$\epsilon=0$  时， $\sigma=0$ ， 原点；

$\epsilon=0$  时， $\frac{d\sigma}{d\epsilon}=E_0$ ， 原点；

$\epsilon=\epsilon_0$  时， $\sigma=\sigma_0$ ， 峰值点；

$\epsilon=\epsilon_0$  时， $\frac{d\sigma}{d\epsilon}=0$ ， 峰值点；

$\epsilon=\epsilon_u$  时， $\sigma=\sigma_u=k\sigma_0$ ， 极限点。

因第一个条件可以自然满足，余下 4 个条件可以确定  $A, B, C, D$  4 个常数，由此得到：

$$\sigma = \frac{E_0 \epsilon}{1 + (R + \frac{E_0}{E_s} - 2)(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}) - (2R - 1)(\frac{\epsilon}{\epsilon_0})^2 + R(\frac{\epsilon}{\epsilon_0})^3} \quad (1-5)$$

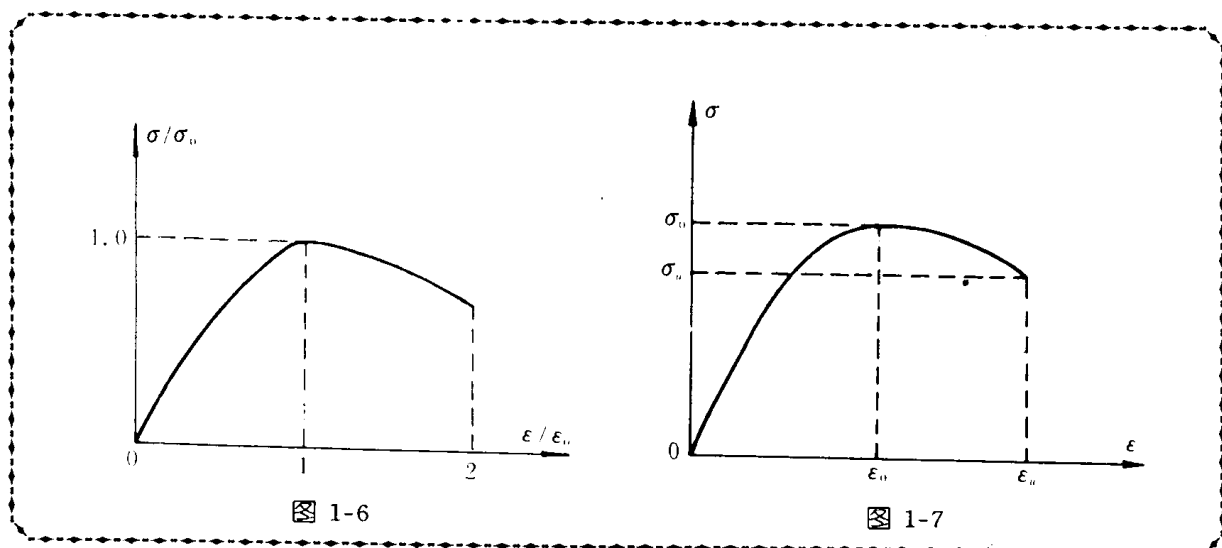




式中:  $E_s = \sigma_0 / \epsilon_0$

$$R = \frac{E_0 / E_s \left( \frac{d_0}{d_u} - 1 \right)}{(\epsilon_u / \epsilon_0 - 1)^2} - \frac{1}{(\epsilon_u / \epsilon_0)} \quad (1-6)$$

这一公式在钢筋混凝土有限元分析中应用很广, 在大型非线性有限元程序 ADINA 中基本上采用这一公式。



对 Saenz 公式提出改进的还有 Sargin, 他于 1971 年提出下列公式

$$\sigma = k_3 f_c \frac{A \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) + (D - 1) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2}{1 + (A - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_0} + D \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2} \quad (1-7)$$

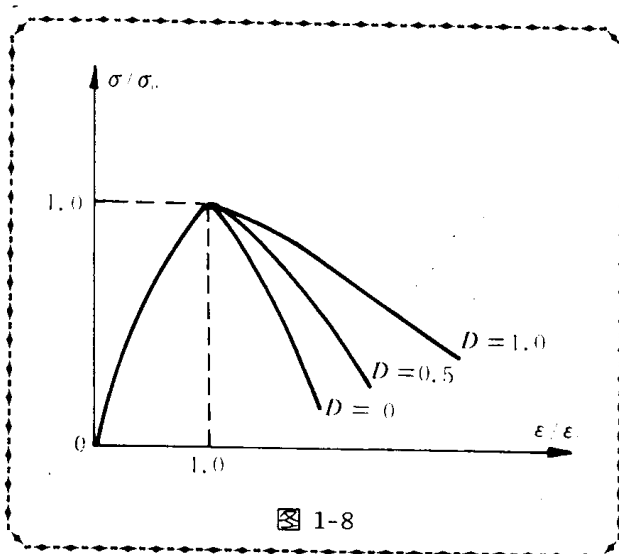
式中:  $A = E_0 / E_s$ ;

$E_0$  —— 混凝土初始弹性模量;

$E_s = \sigma_0 / \epsilon_0$  —— 应力达峰值时的割线模量;

$k_3 = \sigma_0 / f_c$  —— 侧限对强度的影响系数; 取  $k_3 = 1$  时, 适合于无侧向约束的素混凝土;

$D$  —— 主要影响下降段的参数, 而对上升段影响很小。不同  $D$  值的  $\sigma - \epsilon$  曲线示于图 1-8。这一公式在有限元分析中应用很广。



5) 我国学者提出的表达式

