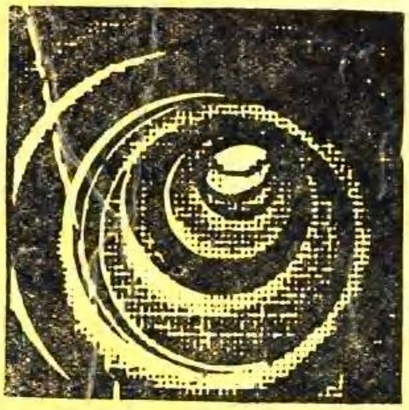
δ 函数的新理论

黄乘规 著

三原色丛书 三原色丛书 三原色丛书



三原色丛书

δ 函数的新理论

黄乘规 著

陕西科学技术出版社

责任编辑：何　越
封面设计：高尚德
版面设计：惠红彦

《三原色丛书》
δ 函 数 的 新 理 论
黄乘规　著
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）
新华书店经销　　西安青山彩印厂印刷
787×1092 毫米　窄 32 开本　5.125 印张　2插页　7.4万字
1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN　7-5369-0425-8/Z·45

定　价：3.10元

目　录

1
历史导言

我国的思想家唐太宗早就明确指出：以古为镜知兴衰。法国著名数学家 Herri Poincare 又指出：如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。因此，本文就从微积分学基础的发展史谈起。

Robinson 在[80]中精辟地论述了微积分基础的发展史，他清楚地揭示了微积分的形成和发展是与人类对“无限（或叫无穷，infinite）”的认识不断深入密切相关的。

关于人类对“无限”的认识，Robinson 追溯到古希腊，他指出：Aristotle（384-322 B. C.）反对实在无限（Actual infinite）

而承认潜在无限（potential infinite）。然而，世所公认，在 Aristotle 之前，Democritus（460-362 B. C.）主张：数量是由实在无限小的单子（monad）所组成。以后又有著名的 Archimedes（287-212 B. C.）公理，它的含义是：对任意二实数 a 和 b，$0<a<b$，存在一个自然数 n，使得 $b<na$。

Robinson 生活在欧美和地中海沿岸，不了解"无限"概念在中国的发展，作者在此作点补充。张锦文在[31]中介绍过墨翟（480—420 B. C.）的关于"无穷"的思想，在"墨子闲诂"[41]中有以下语句

(1，1) 穷，或有前，不容尺也。

(1，2) 穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。

现将（1，1）和（1，2）依次翻译如下

(1，3) 有端的距离称之为有穷，如果用尺一尺接一尺地去量它，量到某一次之后，剩下的距离不再超过一尺。

(1，4) 关于有穷与无穷：用尺一次接一次去量某个距离，如果量到某一次之后所剩下的不再超过一尺，就叫有穷；如果量到任一次之后所剩下的

总是超过一尺，就叫无穷。

现在把（1，3）用现代数学语言表达如下：

（1，5）　任意有穷的距离 x，用长度为 ε 的尺一次接一次去量它，存在一个次数（自然数）n，使得

$$0<x-n\varepsilon\leqslant\varepsilon。$$

（1，1）和（1，2）是墨翟关于有穷和无穷的定义，现在看来仍然是相当科学的。特别，（1，1）与 Archimedes 公理十分相象，如果征得世界上多数数学家的同意，可以把 Archimedes 公理称之为墨翟—Archimedes 公理。墨翟关于无穷的论述被正式记录在墨经里（见[41]），从时间上讲多半在 Democritus 之前，而 Democritus 的思想是后人追述的。

关于微积分学的发展史，在[80]的最后一章，Robinson 有一个简明的总结，今介绍如下：

“关于在特殊情形下寻求面积、体积和切线，有一个漫长的发展阶段，后来，微分和积分的一般理论，在十七世纪的后半叶中，先由 Newton，稍后由 Leibniz 提出。就这门新学科的基础而言，Newton 是游移不定的，他有时提到无穷小，有时提到极限，有时提到物理

直观。Newton 的紧密追随者，更喜欢最后一个方法。另一方面，Leibniz 及其追随者，在一阶和高阶的无穷小微分的基础上发展了微积分理论。他所用的记号，有着技术上的优越性（作者认为是一种优美的数学语言），在欧洲大陆被采用，促进了微积分的理论和应用，使之在欧洲大陆上迅速发展。但不久之后，这个理论内暴露出明显的矛盾（即众所周知的无限小悖论），使人们感到要另打基础。Lagrange 自信他已经发现了一条合适的道路，这就是把函数的 Taylor 展开当作基本出发点。然而，这个问题满意的解决应归功于 Chauchy，他第一次严谨地构成了数学分析，其理论建立在极限概念之上，此概念自 Newton 提出后，曾得到 d'Alembert 的拥护。Chauchy 的方法，后来由 Weierstrass 给以更加形式化的处理，但在 Weierstrass 之前，Bolzano 已在一定程度上作过这种处理了。在极限理论确立之后，分析学中就再也不相信无限小和无限大了，后者只是一种说话的方式，例如'某变量趋向于无穷大'等等。非 Archimedes 域（即包含实在无限大的数域）此后的发展，完全局限在代数学的范围之内。”

紧接着 Robinson 十分谦逊地谈到了他自己的工作："我们相信，我们已经证明：某些非 Archimedes 域的理论，确实能给古典分析作出肯定的贡献。"

1972年在评述 Robinson 的工作时（见〔75〕），Martin Davis 和 Reuben Hersh 是这么说的："从十九世纪起无穷小似乎被一劳永逸地赶出了数学，为了合乎逻辑，Newton 和 Leibniz 的'无穷小演算'被 Weierstrass 抛却'无穷小'而重新构成。但正是当代数理逻辑的新的技巧和能力，又恢复了'无穷小'概念，使之能为人们所接受。在某种意义上，Robinson 已经为被轻率抛弃了的十八世纪的数学作了辨护，以反对十九世纪的过分拘束的严格数学，从而在永无休止的关于有穷和无穷、连续和离散的争论之中又加入了新的篇章。"

从 Abrahan Robinson，Martin Davis 和 Reuben Hensh 等人的评述中可以看出，关于微积分基础的发展，他们似乎有一条认识上的红线，从 Newton，Leibniz，Taylor，Lagrange，d'Alembert，Cauchy，Bolzano 经 Weierstrass 而直奔 Robinson。从 Weierstrass到Robinson，其中将近有一百年，这是人类思想十分活跃的时期，其中微积分的发展有哪些值得回忆的事件呢？Robinson把这个留给我们去作补充。另一方面，Robinson的明确的目标是完成Leibniz的未竟之业，恢复“无穷小”的信誉，因此把研究重点放在古典分析学上面。怎么把“无限小”概念与当代各门学科发展的主流密切结合起来，Robinson来不及完成这项任务就与世长辞了

其实，实在无限小和无限大，作为人类思想的一股潮流，几千年来一直存在着，从十九世纪起仅仅被逐出了微积分的大门，在人类思想史中只是一个暂时的和局部的历史现象。在其他学科中远非如此。特别是在物理类型的理论和应用学科中，无限的概念仍然合法地存在着，微元法、微扰论和无穷小变换等经常被使用；最引人注目的是1926年，Dirac直接在无限大的基础上引入了Delta函数，它在物理中得到广泛应用并取得了很大的成功。这对于与Dirac同时代的分析学家是很大的冲击。由于这时分析学家认为无限小和无限大是非法的，他们试图在标准分析的框架之内，排除Dirac的朴素的无限大，来说明Delta函数。

1932 年 Von Neumann 在[90]中说了一段有趣的话："Dirac 的方法在数学严格性方面是不能令人满意的，……它要求引进具有自相矛盾性质的'奇异函数'，在 Dirac 的手法中经常要注入这样一种数学上的'捏造'，甚至在确定实验的数值计算中也如此处理。尽管这些概念为现今的分析框架所不容，但在物理上却是内在的需要，那么也不应当提出非议，正象 Newton 力学首先带来无穷小分析的发展，后者的原始形态不能自圆其说，因而受到怀疑。所以对于量子力学也可能会提出一个'无穷多个变数的分析学'的新结构——即必须改变的是数学技巧而不是物理理论。"

1926 年，经 Dirac 之手，Delta 函数进入了人类的思想史册。在 Dirac 之前，它有一个很长的孕育时期。首先是在奇异积分核的研究中就含有原始的 Delta 函数的概念。1815—1816 年，Cauchy 和 Poisson 在研究波的传播理论中已隐藏着这种思想。

1887 年，M. Hermite 在巴黎大学的讲义里写得比较明确

"当 $\lambda \to 0$ 时，积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2i\lambda}{(t-\theta)^2+\lambda^2} dt$$

并不总是零；事实上，若θ介于α与β之间，它与$2\pi i$差一无穷小量，所以称之为奇异积分，积分号里的东西除了$t=\theta$都是0，只有在这点它是无穷。”

上世纪末，英国物理学家，电机工程师Heaviside在解电路方程以及其他数学物理方程问题时，提出了一套运算微积的法则。这种方法行之有效，能够处理大量的常系数微分方程，但缺乏严格的数学基础。1893年，Heaviside在他的算符演算（见[67]）中，把后人称之为Delta函数的东西，解释为脉冲电流。

在[58]和[59]中，Dirac明确提出了Delta函数的概念。1947年在[59]中Dirac明确指出：“我们的工作要求我们去研究一些包含有某种无穷大的量。在处理这些无穷大时为了得到一个精确的符号，我们引入一个量$\delta(x)$，它由一个参量x决定，并满足以下条件

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1\\ \delta(x)=0,\ \text{当}\ x\neq 0\end{cases}$$ ”

由于物理学内在的发展，Dirac已明确提出要研究无穷大量了，而与他同时代的分析学家却认为无穷大是非法的。怎么在标准分析的

框架之内，排除 Dirac 的直观的无穷大思想，来合理地解释 Delta 函数呢？于是自然地展开了一场标准分析的保卫战，投入这个神圣行列的有 Sobolev, Schwarz, Gelfand 和 Mikusinski 等著名分析学家。

1936 年，Sobolev 在[84]中提出了具有紧致支撑的无穷次可微的函数空间上的连续线性泛函的概念。Schwarz[81]本质上采用了 Sobolev 的定义。以 D 表示具有紧致支撑的无穷次可微的函数空间，以 D′ 表示 D 的连续线性泛函的空间，他把 Delta 函数及其导数看成 D′ 的元素，取得了一定的成功。Schwarz 把广义函数的理论系统化，解决了 Delta 函数运算规律中的许多问题，得到一系列重要的结果，在 1950 年国际数学家大会上获得了 Fields 奖金。

Schwarz 的工作得到了大家的关心，今摘引一些代表性的评论如下。

H. Bohr 在介绍 Schwarz 的工作时引用了 F. Klein 的名言：“在我们的科学中最大的进展往往是用新方法解决老问题。”并说：“毫无疑问，Schwarz 的工作引起了全世界数学家的极大兴趣，和很多年轻数学家们

在 Schwarz 开辟的广阔领域中从事新的研究。”（见 H. Bohr 的1950年的演说[55]）

Bochner, S. 在[54]中对 Schwarz 的广义函数论作了评论，他罗列了 Schwarz 所得到的主要定理之后，指出 Schwarz 提出的概念和方法大都是前人有过的，例如光滑化技巧、单位分解以及 Weiner 和 Bochner 本人所发展的 Fourier 变换等。最后他说："我们已经列举了所有的要点，无论在分析方面还是在概念方面这个工作有多少革新，现在还很难说。前面我们已经用这本书的特殊结果来评论它的价值，而对现在说到的这一方面的价值留待作者用各种方法产生出更多的结果来说明。”Bochner 和当时许多数学家一样不把函数概念的扩充认为是概念上的革新。他甚至对 I. Halperin 介绍 Schwarz 广义函数的小册子“广义函数论导引”也不肯放过，他写道："我们对这本书的一点批评是：Halperin 太紧跟 Schwarz 了，他们过分主张用广义函数来说明 Delta 函数了。事实上，Dirac 函数早已被其它线性泛函的表示理论所说明，而且同样是合适的。”

我们再来看看 Schwarz 的自我评价："我

们愿意表明广义函数论决不是一场‘新的革命’。许多作者都已经发现并熟悉这个思想了，然而这个理论是简单的同时也是正确的。它概括了在许多不同领域里自发的经常用得不正确的方法，它是一个综合和简化，当然综合是全面的。”

这是举世公认的涉及微积分基础的大问题，引发了许多分析学的大师们的严肃、认真、仔细和热情的评论。

以 Schwarz 和 Sobolev 命名的广义函数论，在说明 Delta 函数时取得一定的成功，当触及到 Delta 函数的乘积时，立即陷入了困境。由于排除了无限大和无限小，难以表达 Delta 函数的个性，以致于难以处理广义函数的乘积。其实，这也是标准分析所遇到的困难。

在 Schwarz 得到 Fields 奖章之后十一年，Robinson 在[79]中建立了非标准分析，从此，无限大和无限小又在分析学中恢复了合法地位，微积分学的研究出现了新的格局。随之，对 Dirac Delta 函数的研究开始了新的篇章。Thurber，J. K. 和 Katz，J. 在 1974 的[83]，Lightstone，A. 和 Wang Kam 在

1975写了[73]，李邦河在1978写了[80]，王进儒在1980写了[21]，Raju CK. 在1982写了[78]，作者除在1979写了[4]，1980与石悬坚合写了[5]，并于1984年初步写成专著“两相微积分学”[8]，其中对Delta函数和微积分学基础进行了新的研究。

在Robinson发明非标准分析之后，从1974年Thurber, J. K. 和Katz, J. 开始研究Delta函数的分数幂，到1984年作者初步提出一个与物理学一致的Delta函数的系统理论，这的确是Delta函数理论的新的一章。

现在回到我们的历史导言。作为对Robinson, Martin Davis和Reuben Hersh的补充，更全面地看，关于微积分学基础的发展红线，应该是由墨翟，Democritus, Aristotle, Archimedes, Newton, Leibniz, Taylor, Lagrange, d'Alembert, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Heaviside, Dirac, Sobolev和Schwarz而奔向Robinson。

从以上关于历史的陈述中可以看出，Robinson把研究的重点放在古典分析学上面，他对Dirac 1947年在[59]中的那一段话没有感受。Robinson没有想到，在二十世纪上