

日本新高中数学研究丛书 II

微分、积分(上)

[日] 寺田文行 著
尚文斗 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 11

微分、积分(上)

[日]寺田文行 著

尚文斗 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,书中除有中学数学传统题材外,还包括一些较新的内容。

本册是第十一册,主要内容有:函数、函数的极限、函数的连续性、导数、导函数、整函数的导函数、复合函数的导函数,速度与加速度、曲线的切线、函数的增减性、极大、极小,曲线的凸向、最大值、最小值;不定积分,定积分、定积分的计算、分割求积,平面图形的面积、立体的体积、速度与路程。叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂,可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 11

微分、积分(上)

[日]寺田文行 著

尚文斗 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 185,000

1984年7月第1版 1986年10月第1次印刷

印数 1—3,500

书号 7057·077 定价 1.35 元

译者的话

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,我们译出了其中的第二册至第十五册,本册是第十一册.丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容.

这套丛书的特点是比教材内容广泛深入、易懂.对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究,可供我国中学数学教师 and 高中学生研究参考.

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的.本册由沈阳机电学院尚文斗同志译出,由王运达同志校.最后由我院教研部钱永耀、刘占元同志负责审校工作.

由于译者和校者水平所限,缺点错误,恐难避免,希望读者提出宝贵意见.

辽宁教育学院

1984年6月

前 言

微积分是在高级中学里学过的三角函数、无理函数、分式函数、极限等全部知识基础上建立起来的高度的数学概念。因此，它在概率、统计、物理等方面有着广泛的应用。而且在高考数学试题中也占有最大的比重。将这样广泛的数学内容仅仅通过教科书的学习而达到精通的目的是相当困难的。因此，对微积分有必要做突破性地研究和加深理解。

本书就是为了适应这种愿望而编写的。上册主要讨论数学 IIB 的微分、积分；下册讨论数学 III 的微积分。我们经过了细心的考虑，不论那本书都不脱离教科书，比教科书

更加广泛、更加深入、更加易于理解

为了使苦于学习数学的人易于了解，使擅长数学的人更喜爱数学而写成了这本书，因此，按着

解说→例题→发展题→练习→习题

的顺序反复学习，使读者在不知不觉中提高了自己的实际能力，这就是本书的最大特点。当然，我们也坚信本书在准备大学入学考试上是万无一失的。因为数学 IIB 以整函数的微分、积分为研究对象，所以，在教科书里没有涉及到函数的连续性，复合函数的求导以及二阶导数等内容，但本书对这些内容也作了简单说明。尽管只处理整函数，若是知道这些对加深理解也是有益的。

最后，在出版本书时，对春日正文先生的特别关怀和帮助，在此深表谢意。

著 者

1974年4月

• 5 •

几点说明

如前言所述,本书是一本独具风格的参考书,使苦于学习数学的人容易理解,又能使擅长数学的人更加爱好.为此,本书的结构编排如下.

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目,凡披阅所及均能一目了然;在解说时,既能配合教科书,又写得

比较广泛,比较深入,比较易懂.

在解说后的提要中,归纳出重要的公式.因此,希望在理解解说的同时,必须记住这些公式.另外,用竖线把版面分成两部分,在左边列出重要项目,以便提高学习效率.

例题→发展题→练习

本书最大的优点是,力求在理解解说的基础上,反复学习例题、发展题、练习题,使在不知不觉中增强解决问题的实际能力.虽然从例题到发展题,依次提高难度,但在解法和要点中,指出了思考方法和解题要领,所以希望读者反复学习,使对这两种问题,达到几乎能够背诵的程度.总之,学习数学最重要的是

要逐步积累的学习方法.

为此,建议读者,要反复进行学习.如果前面的都能掌握,那么解“练习”题时就不会感到什么困难.反之,如果不大会解“练习”题,那就应该认为学习的还不够深刻.

习题

分为 A、B 两部分。A 的程度相当于例题和发展题；B 中还包含着稍难的问题。因为在高考试题中这种程度的题目出的最多，所以，对于准备参加高考的读者，这是不可缺少的问题。

虽然常说，学习数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵。本书不提倡单纯的记忆。对于数学，在适当指导“怎样进行思考”之后，应记忆应用范围较广泛的知识。深切地希望本书的读者，真能理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领。

目 录

1. 函数	1
映射, 函数, 函数的定义域和值域, 闭区间和开区间, 函数的图象	
2. 函数的极限 (1)	8
极限的意义, 极限的定义, 极限的公式, 整函数的极限, 商的极限	
3. 函数的极限 (2)	14
右极限, 左极限, 极限为正无穷大或负无穷大的情形	
4. 函数的连续性	21
$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, $f(x)$ 在区间上连续, 介值定理, 最大值、最小值定理	
习题 (1—9)	27
5. 导数	29
x 的增量, y 的增量, 平均变化率, 导数	
6. 导函数	35
导函数的符号, 可导函数的连续性, 基本的导函数	
7. 整函数的导函数	42
和、差、积的求导公式, 整函数的导函数, n 次乘方幂的求导公式	
8. 复合函数的导函数	49
复合函数的求导公式, 商的求导公式, 无理函数的求导公式	
习题 (10—23)	55
9. 速度和加速度	57

平均速率, 平均速度, 等速运动, 平均加速度, 二阶导函数

10. 曲线的切线.....66

平均变化率的几何意义, 切线方程, 法线方程

习题(24—36).....78

11. 函数的增减性.....80

单调增加, 单调减少, 增加状态, 减少状态, 在区间上函数的增加、减少, $f'(x_1)=0$ 的情形

12. 极大、极小.....86

极大值, 极小值, 极值的求法, 利用二阶导数判断极值

13. 曲线的凸向.....95

下凸, 上凸, 拐点, 曲线的凸向和切线, 拐点的求法

习题(37—51).....101

14. 最大值、最小值.....103

最大、最小和极大、极小的区别, 最大值、最小值定理, 闭区间与开区间上的最大、最小, 最大、最小应用题的解法

15. 导函数在方程与不等式方面的应用.....116

方程的实根, 介值定理, 整式方程有重根的条件, 不等式的证明

习题(52—71).....128

16. 不定积分.....130

积分常数, 不定积分的公式, 整函数的不定积分, 常用的不定积分

17. 定积分.....137

面积和积分, 面积函数 $S(x)$, 考查 $S(x)$ 的变化率, $S(x)$ 和 $f(x)$ 的关系, 定积分的定义

18. 定积分的计算.....144

偶函数与奇函数的定积分, 整函数积分的应用

19. 分割求积与定积分.....151

分割求积法的例题, 分割求积法, 定积分与分割求积	
习题(72—86)	158
20. 定积分所表示的函数	160
被积函数含参数的情形, 定积分的上下限含变量的情形,	
$\int_a^x f(t)dt$ 的导函数	
习题(87—100)	170
21. 平面图形的面积	172
曲线与 x 轴及曲线与 y 轴所围成的面积, 两条曲线所围成的	
面积	
习题(101—114)	185
22. 立体的体积	187
一般立体的体积, 旋转体的体积, 绕 x 轴与绕 y 轴旋转,	
两条曲线围成图形的旋转	
23. 速度与路程	199
速度, 路程, 位移, 由定积分所求得的数量	
习题(115—126)	205
练习解答	207
习题解答	222

重要词汇一览表

一划	
y 的增量	29
n 次乘方幂的求导公式	44
二划	
x 的增量	29
二阶导数	59
二次近似式	129
三划	
上凸(下凹)	95
下限	139
三次方程的实根数目	116
下凸(上凹)	95
上限	139
四划	
分割求积法	152
左极限	15
切线	66
切线的斜率	67
切线方程	67
切点	66
介值定理	22
不定积分	130
不连续	21
分式函数	2
无穷大	16
无理函数	2
无理函数的导数公式	50
开区间	3
五划	
右极限	15
加速度	59
区间	3
对称	98
可导	35
平均加速度	59
平均速度	58
平均速率	57
平均变化率	29
平面图形的面积	173
六划	
曲线的凸向	95
在区间上连续	21
导函数	35
导数	30
导数公式	42
闭区间	3
七划	
两条曲线间的面积	174
求导数	35
位移	201
立体的体积	188
连续函数	21

连续·····	21	值域·····	1
极限值·····	9	变域·····	1
极小·····	86	变化率·····	30
极小值·····	86	变量·····	1
极大·····	86	十划	
极大值·····	86	原函数·····	130
极值·····	86	积分·····	139
八划		积分常数·····	130
函数·····	1	积分变量·····	145
函数符号·····	1	被积函数·····	130
函数的极限·····	8	十一划	
函数的图象·····	3	旋转体的体积·····	189
函数的增减性·····	80	偶函数·····	5
单调减少·····	80	减少的状态·····	81
单调增加·····	80	商的求导公式·····	50
函数的连续性·····	21	常数·····	1
奇函数·····	5	常数函数·····	2
定义域·····	1	十二划	
定积分·····	139	最小·····	103
定积分与分割求积·····	153	最小值·····	103
拐点·····	96	最大·····	103
法线·····	68	最大值·····	103
法线方程·····	68	最大值·最小值的定理·····	103
九划		象·····	1
复合函数·····	49	等速运动·····	57
复合函数的求导公式·····	49	十三划	
映射·····	1	路程·····	200
速度·····	58	十五划	
速率·····	57	增减表·····	89

增加的状态.....81	整函数的图象.....101
十六划	整函数的导函数.....42
整函数.....2	整式方程的重根.....119

1. 函数

映射

有两个非空集合 X, Y , 如果按给定的规律对于 X 的每一元素 x , Y 中有唯一的元素 y 与之对应, 我们就说这一给定规律是从集合 X 到集合 Y 的映射, 用

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{或} \quad f: X \rightarrow Y$$

函数

来表示. 特别当 X, Y 都是数的集合时, 我们把 f 叫做从 X 到 Y 的函数. 但在本书里所说的数, 都限于实数.

$$\text{当函数} \quad f: X \rightarrow Y$$

使 X 的元素 x 与 Y 的元素 y 相对应时, 我们把 y 叫做在映射 f 下 x 的象, 用 $f(x)$ 表示, 并记作:

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y$$

因此常常把它写作函数 $y = f(x)$, 或简单地写作函数 $f(x)$

函数的定义
域和值域

当 $y = f(x)$ 是一个从 X 到 Y 的函数时, 我们就说 X 是这个函数的定义域, 而象的集合(用 $f(X)$ 表示).

$$f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

叫做这个函数的值域. 值域 $f(X)$ 是 Y 的子集, 即

$$f(X) \subseteq Y$$

用式子给定 函数

函数 $y=f(x)$ 的对应规律 f 常用 x 的式子给出, 这时 $f(x)$ 可用含有 x 的式子来表示.

当函数 $f(x)$ 是 x 的整式、分式、无理式时, 分别叫做**整函数**, **分式函数**和**无理函数**. 在整函数里, 按它的次数又分别叫做**一次函数**, **二次函数**和**三次函数**等. 三次以上的整函数叫做**高次函数**. 另外, 把 X 的所有元素都对应于 Y 的同一元素 c 的函数

$$f(x)=c \quad (c \text{ 是常数})$$

叫做**常数函数**. 在一般情况下把它当作整函数处理.

在本书里主要讨论整函数, 根据需要, 有时也涉及到一些简单的分式函数和无理函数. 另外在高中所研究的函数里, 除了上述函数之外, 还有**指数函数**, **对数函数**和**三角函数**等.

对于用式子给定的函数 $y=f(x)$, 我们常把式子 $f(x)$ 有意义的最大范围作为函数的定义域. 于是, 整函数的定义域是全体实数, 分式函数的定义域是使分母不为 0 的值的实数集合. 关于无理函数, 例如 $y=\sqrt{x-1}$, 要使此式有意义, 必须 $x \geq 1$, 所以此函数的定义域是集合 $\{x|x \geq 1\}$.

然而, 这里应当指出, 根据要求不取函数固有的定义域为定义域, 而是在比固有定义域较小的范围里思考问题.

区间

我们常常在区间上讨论函数的一些性质. 所说区间, 是指对于两个实数 $a, b (a < b)$, 满足下列不等式

$$a \leq x \leq b, a < x < b, a \leq x < b, a < x \leq b$$

的实数 x 的集合, 分别记作

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

闭区间和开区间

特别是把区间 $[a, b]$ 叫做闭区间, (a, b) 叫做开区间, 还有满足不等式

$$a \leq x, x \leq a, a < x, x < a$$

等实数 x 的集合, 以及实数全体的集合, 通常也叫做区间, 分别记作

$$[a, \infty), (-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, \infty)$$

函数的图象

对于函数 $y = f(x)$, 以对应 x, y 的数组 (x, y) 为坐标的点集合叫做这个函数的图象. 函数 $y = f(x)$ 的图象常描绘为一条曲线(包括直线). 在这种情况下我们有时也把图象的曲线简称为曲线 $y = f(x)$

提 要

(1) 函数 $f: X \rightarrow Y$

我们把与集合 X 的元素 x 相对应的集合 Y 的元素 y 叫做在 f 下 x 的象, 用 $f(x)$ 表示.

(2) 函数的表示法

用象的符号表示成 $y = f(x)$.

例题 1. 试求下列函数的定义域和值域并画出它的图象.

$$(1) y = \sqrt{9-x^2} \qquad (2) y = \frac{x^2}{x-1}$$

解法 因为这个问题没有特殊限制, 所以它的定义域, 值域在实数 x, y 内尽量取得大些.

解 (1) 因为 y 的值应是实数, 所以

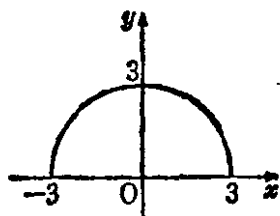
$$9-x^2 \geq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 3 \dots\dots (\text{定义域})$$

又对属于这个定义域的 x 有

$$0 \leq \sqrt{9-x^2} \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq y \leq 3 \dots\dots (\text{值域})$$

图象是圆 $x^2+y^2=9$ 的上半圆.



(2) 因为这函数对除 1 以外所有的实数 x 都有意义, 所以定义域是除 $x=1$ 以外所有实数的集合. 即

$$x \neq 1 \dots\dots (\text{定义域})$$

其次, 为了求这函数的值域, 将原式变形为

$$x^2 - yx + y = 0$$

把它看作是關於 x 的二次方程, 因为 x 是实数, 所以

$$y^2 - 4y \geq 0 \quad \therefore y \leq 0 \text{ 或 } y \geq 4 \dots\dots (\text{值域})$$

为了画图象, 将原式变形为

$$y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

画出 $y = \frac{1}{x-1}$ 和 $y = x + 1$ 的图象后, 把这两个图象合成即可.

