

# 数学与似真推理

〔美〕G·波利亚 著  
杨迅文 王学沂 汪成钦 译  
王松伦 校

福建人民出版社

一九八五年·福州

MATHEMATICS  
AND PLAUSIBLE REASONING  
VOL. I. INDUCTION AND ANALOGY IN MATHEMATICS  
VOL. I. PATTERNS OF PLAUSIBLE INFERENCE  
By *G. Polya*  
PRINCETON UNIVERSITY PRESS  
PRINCETON, NEW JERSEY  
1954

数学与似真推理

[美] G·波利亚著

杨讯文 王学沂 汪成钦 译

王松伦 校

福建人民出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32-21.425印张 456千字

1985年10月第1版

1985年10月第1次印刷

印数: 1—4,870

书号: 7173·732 定价: 3.35元

## 翻 译 说 明

2. 在数学教学中，如何培养学生的抽象概括能力和求异思维能力，已被提到日益重要的地位上来。

通常的数学传统教程，往往使学生湮没在成串的习题和刻板的解题模式之中，妨碍了他们数学才能的发展。怎样改善这种状况，使学生从根本上提高数学素养，培养独立探索、发现和解决数学问题的能力呢？

↓ 由著名数学家G·波利亚编著的这部两卷本的《数学与似真推理》，就是对这个问题的回答。它同时也是作者多年来在这方面所作尝试的经验总结。

在这本别开生面的书中，波利亚用引人入胜的笔调，生动丰富的资料，叙述了数学家如何应用试验、观察、归纳、猜测、类比——这些在其他学科中广泛应用的似真推理方法，发现和证明数学定理。它将启发读者从数学之外的知识和实践中来学习数学，同时还将使获得探究数学奥秘的方法和勇气。

5. 本书作为一部数学参考书，它的读者对象首先是大中学校的师生，乃至初出茅庐的教学工作者。由于它同时又是一部饶有趣味的轻松的数学读物，因此它将使所有的数学爱好者感兴趣。正如作者在前言中所说的那样，本书是作者

《怎样解题》<sup>①</sup>一书的续作。它为《怎样解题》提供了大量实例和习题。这些习题，有许多来自著名数学家欧拉、笛卡儿等人的著作。也有一部份来自美国斯坦福大学数学竞赛题，以及美国大学低年级生的数学竞赛——普特南<sup>②</sup>竞赛题。

在本书的卷Ⅱ部份，作者试图以适当的方式，建立起似真推理的模式。在这个意义上说，本书也是哲学上的一种探讨。出于这种目的，作者从数学、天文学、医学，乃至于诉讼业务中援引了大量生动而具体的事例，来阐述自己的观点。为了说明法则的理论依据，波利亚还以最通俗的形式，从概率论中引述了大量有趣的材料。

本书作者G·波利亚是一位著名的数学家和卓越的教育家，数学解题方法论的开拓者。本书连同他的另外两部著作——《怎样解题》和《数学的发现》（I、Ⅱ卷），是他多年数学研究和教学工作的总结。这些书在美国出版后，受到广泛的推崇，不胫而走，现在已被译成世界上的多种文字，被公认为经典性的数学著作。本书是1954年在美国的普林斯顿出版的。我们这个译本转译自苏联外文出版社的译本《Математика и Правдоподобные рассуждения》。

（俄译者是И. А. Вайнштейн.）

本书由杨迅文、王学沂、汪成钦合译。《前言》、第1~5章和第1~13章的习题解答，由杨迅文译；第6~11章和

① 有中译本，阎育苏译，科学出版社1982年第一版。——本书译者注

② W. L. Putnam, 曾任美国哈佛大学校长，1935年逝世。他留下一笔基金，由其两个儿子与他的挚友、美国著名数学家G·D·伯克霍夫筹办数学竞赛。首届竞赛于1938年举行，以后除了1943~1945年因战争停止外，每年都举行一次。普特南竞赛的优胜者日后成名的很多，至今已有三个人得到菲尔兹奖。——本书译者注

第14~16章的习题解答，由王学沂译；第12~16章，由汪成钦译。译后相互作了校订。全书译出后，承蒙王松伦同志精心校阅，花费了很多心血。在译、校过程中，我们对书中有关数学译名，均采用我国教科书上通用的名词术语；对有关人名，已有规范化译法的，亦均采用规范化译法，并在书中第一次出现时注出原文；翻译的句式，也尽可能使之符合我国的语言习惯。为了方便读者，我们将能对读者起阅读指导作用的“俄译者注”也一并译出（删去了一部分），同时又增加了几处背景性质的说明（标明“中译者注”）。这些，如有不当之处，概由译者负责。

本书涉及的知识面很广，译者学力有限，误译之处在所难免。倘读者发现错处，敬希不吝赐教。

译 者

一九八三年七月

# 前 言

这本书要达到几个彼此相关而不相同的目的。本书首要的目的是在一个重要的、却往往被人们忽视的问题上向学生和数学教师提供一些帮助。然而，在一定意义上说，它也是哲学上的一种探讨。本书是一本续作，同时还要有续篇<sup>①</sup>。下面我将依次说到这些。

1. 严格地说，除了数学领域和证明逻辑(它事实上也是数学的分支)之外，我们的所有知识都来自于推测。当然存在着各种各样的推测。有高度可靠而有价值的推测，如物理学上的某些普遍规律的叙述；也有既不可信又无价值的推测，它往往出现在某些报章杂志上而令人愤慨。在这两种推测之间，还有各种不同的推测、预感和猜想。

我们掌握数学知识用的是证明推理，而可靠的推测则来源于似真推理。数学的论证方法是证明推理。而物理学家的归纳论证、法学家的间接的物证、历史学家的典籍论证和经济学家的统计论证，都属于似真推理。

这两种推理方法之间有多方面的显著的区别，证明推理是可靠的、无可争辩的，也是最终的；似真推理则是冒险的、有争议的，并且有条件的。证明推理深入到各门学科中，就象它在数学中那样，但它本身(也象数学本身那样)实

<sup>①</sup> 这个续篇就是波利亚在此后写的 *Mathematical Discovery* (《数学的发现》)。中译本由内蒙古人民出版社出版(1979年11月第一版)。——本书译者注

质上并不能提供有关周围世界的新知识。我们获得的任何与现实世界有关的新知识，都与似真推理有关；我们在日常事务中感兴趣的也只是这种推理。

证明推理的标准很严格，这标准是由逻辑学(形式逻辑，或证明逻辑)的证明推理理论给予规定和阐明的。似真推理的标准比较松弛，还没有一种讲似真推理的理论可以叙述得象证明逻辑那么清晰，或者具有可与证明逻辑相提并论的协调。

2.关于这两种推理还有另一点值得我们注意。大家都知道，数学给我们提供了很好的机会来学习证明推理。但我敢断言，在一般学校的教学大纲中还没有开设学习似真推理的课程。我要对全体教初等或高等数学的人和对精通它感兴趣的人说：“我们要注重学习证明，但同时也要注重学习推测。”

这些话听起来有些费解，因而我必须就若干方面加以说明，以免引起可能的误解。

数学可以看作是一门证明的科学。但这只是一个方面。完成了的数学理论，用最终形式表现出来，象是仅仅由证明构成的纯粹证明性的。但在建立过程中的数学，也跟人类处于建立过程中的其他知识一样，在证明数学定理以前，你必须先猜测它；在证明细节之前，应该先预测到论证的主纲。你应该综合观察和仿效类推，应该一试再试。数学家创造性劳动的成果固然是证明的论断和证明方法，而发现证明还得靠似真推理和猜测。如果数学知识要反映所有数学上的创造，那么，在它里面就应该有猜测和似真推理的一席之地。

我们已经说过，推理有两种：证明推理和似真推理。

要指出的是，它们之间不但不矛盾，反而相辅相成。在严格的推理中，主要的是区分有根据的论证和无根据的臆测。在似真推理中主要则是选择不同的推测方法，把比较合理的推测与不合理的推测区分开来。如果你注意它们的差异，就可以看出这里的区别是非常明显的。

一个学习数学的有心人，如果立志把数学作为终身事业，那他就必须学习证明推理；这是他的职业，也是他的学科的特征。但他若想获得真正的成就，就还必须学习似真推理，这将有助于他做出创造性工作。即使非专业的或业余的数学爱好者也都应当懂得一些证明推理，虽然直接使用这种推理的机会非常少，但他必须有这种能力和标准，能够在现实生活中比较各种各样可作证明的论据。而在他一切活动的初始，他都更需要似真推理。无论如何，一个学习数学并且企望大显身手的人，不管他将来的志向如何，都应该力求同时学习两种推理，即证明推理与似真推理。

3. 我不相信在学习推测中会有稳操胜券的途径可循。假若有这么一种方法，我也未有所闻。所以在下文中，读者当然不能指望找出这种行之绝对有效的办法。似真推理的应用，是一种技巧，如同其他一切技巧一样，它可以通过模仿和练习获得。对渴望学习似真推理的读者，我愿意尽最大的努力来帮助。但我所能做的也不过是提供一些可模仿的模式和练习的机会罢了。

在这本书中，我将时常讨论数学上的大小发现。我无法说清这些发现是怎样完成的真实经过，因为这些经过实际上任何人都不知道。然而我还是尝试设想了产生这些发现的合乎情理的过程。我试图揭示的是作为发现的基础的动机，导致这些发现的似真推论，简言之，是揭示那些值得仿效的内



容。当然，我还将试着说服读者，这是我作为教师和作者的责任。但是对于读者来说，真正要紧的是，我是站在真诚的立场上，只用我认为真实而有益的事例来说服读者。

在每一章的后面都附有习题和评注。评注都同一些过于专门和太费解的各章正文部分或所研究的主题以外的问题有关系。有些习题的目的是为读者提供机会，让他们对文中不够详尽的部分能详加考虑。但大部分习题都给读者自己寻求似真结论的机会。在解答每一章后的较难问题之前，读者应先阅读有关的部分，同时还应阅览邻近的问题，其中有些可以向你提供解答的线索。为了提供这些线索或故意把这些线索隐蔽起来，以求对读者的阅读起到最有益的指导作用，作者不但在问题的内容和形式上费了很多心血，而且在其编排上也煞费苦心。事实上，对这些问题的安排所花费的时间和精神，绝非局外人所能想象或以为必要的。

为使一般程度的读者也能阅读起见，每一个重要论点，都尽量用较为初等的例题加以说明。但在某些地方，为使读者充分了解作者的观点，也不得不用一些较复杂的例题：事实上，我觉得应该举出些有历史意义的、有真正数学美的，以及能说明在其他科学上或日常生活中也有同类方法的例子。

应该补充一句，我所讲的许多故事，在讲法上都有过变动，最后所采用的形式，可以说是一种非正式的心理实验的结果。在不同的班级里讨论这些问题时，常常有人发问打断我的解说，其问题不外乎：“好，在这种情况下，你该怎么办呢？”下文中有若干部分就是由学生的答案所提供的材料写成的。而有些说法是经过听取听众的反映经过修改写成的。

简单地说，我是用自己的研究和经验向读者提供一种自行模仿的适当机会。

4. 收集在本书中的似真推理的例子尚可用到他处：它有助于对一个正被热烈讨论着的哲学问题——归纳法问题的了解。这方面最基本的问题是：归纳法有法则吗？有些哲学家的回答是肯定的，但大多数学者都持否定的看法。为了有益于商讨，这个问题应该换个问法，也要用不同的方法处理，不要相信那些文字游戏或标新立异的形式主义，应该把它跟科学家的工作紧密联系起来。首先请注意归纳推理是似真推理的一个特例。再请注意（现代著作家都忘了，但一些老著作家如欧拉(Euler)和拉普拉斯(Laplace)都很清楚地知道），归纳论据在数学研究上的地位也跟它在物理研究上一样重要。所以你应该注意到，我们把出现在数学上的似真推理的例子加以观察比较，会对归纳推理有更多的认识。归纳法的归纳研究的大门总是敞开着。

生物学家要研究一个问题，例如遗传问题时，对他来说很重要的是他必须选择一些最适合他实验研究的动植物品种；当化学家研究如化学反应速度问题时，对他来说很重要的也是必须选取一些与其问题有关、实验最方便的物质。实验材料的选择对任何问题的归纳研究都特别重要。照我看，在许多方面，数学都是归纳推理研究的最合适的实验材料。这种研究归纳推理的方法包括一种心理实验在内：你应该从实践中去体验，是否有信心从各种不同论据中作出推测。数学题材，由于它固有的简捷明晰，在这种心理实验中的作用，要比其他学科都好得多。在后文中，读者会有充足的机会相信这一点。

从哲学观点来说，我认为研究似真推理比研究归纳推理

更有普遍意义。在我看来，本书的例子会使人逐渐地对似真推理有个确切而满意的印象。但是我并无意将自己的观点强加给读者。实际上，在卷Ⅰ中我并未把这些观点说出来。我期望靠这些例子本身来说明。卷Ⅱ的前四章，才对似真推理作较明确和更一般的讨论，在那些章节中，我才对前面说过的似真推理例子的模式作正式的陈述，试图将它们系统化，研究其相互间的关系，以及它们与概率思想之间的关系。

我不知道这四章是否配称为哲学。如果它是哲学，也一定是初级的哲学，因为它多半是关于具体事例和人的具体行为的叙述，而很少涉及一般性的说明。当然，我更不知道我的观点最后将受到什么样的评价。但我深信这些例子对学习归纳法或似真推理的学生是有用的，如果他没有偏见，又希望自己形成的观点能与观察的事实符合的话。

5. 我一直认为这本关于数学与似真推理的书是一个整体，而很自然地分成两卷：数学中的归纳与类比（卷Ⅰ），及似真推理的模式（卷Ⅱ）。为了方便学生，分成两册发行。卷Ⅰ和卷Ⅱ完全独立。我认为读者在读卷Ⅱ之前，最好仔细地把卷Ⅰ看完，因为卷Ⅰ所包含的数学素材与应用归纳方法来研究归纳法所用的资料远比卷Ⅱ为多。已有相当数学水平的学生也可以直接读卷Ⅱ，所以分开发行有它的方便之处。为了便于参照，两卷的章数是连续的。我没有编索引，因为编索引需要把术语弄得远较本书认为合适者严格，而且书前的目录已足以作为本书的指引。

本书是我早些时候的著作《怎样解题》的继续，对这个题目有兴趣的读者可以读读这两本书，但读的先后并不大重要。本书虽是续作的，但是因为它们之间并不是连续的，所以可以分别阅读。事实上，本书只有极少部分需要直接参考

前书，读者在初读时可以不必要理会，而间接有关部分则几乎每一页都有，在某几页上，有时每一句话都可在前书找到相应的内容。事实上，现在这本书给前书提供了大量的习题和一些较高深的例题。由于前书的篇幅和它的初等性质的关系，这些内容是不包括在内的。

这本书跟G·蔡可(Szegő)同作者合写成的一本分析习题集①(见参考书目)也有关系。那本习题集中的问题都经过仔细分组，使它们相互印证、相互提示、包含同一特定主题，让读者有解答各类问题的实践机会。本书处理问题的方法仿照了这种做法，这种联系也不是不重要的。

卷Ⅰ中有两章讨论概率论，其中一章与作者前些年所写的《概率论原理》(见参考书目)有些联系。两书在概率的基本概念和开始的论点上都一样，但在其他方面的相同点却甚少。

书中的某些观点有些已见于书末所引的参考书目，我的论文〔4〕，〔6〕，〔8〕，〔9〕及〔10〕中许多章节均已编入本书中。我深深地感谢 American Mathematical Monthly, Etudes de Philosophie des Sciences en Hommage à Ferdinand Gonseth和Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950的编者，他们慷慨地允许我重引这些文字。

本书的大部分，在我授课时都已讲过，有的还讲过几次。在某些部分和某些方面，我仍然让它保留着口语的形式。我并不提倡在一般数学书中用这种形式，但对这本书，眼下这也许是最合适的办法，这也该是情有可原的。

① 《分析的习题与定理》，中译本由上海科学技术出版社出版。——本书译者注

6.卷I的最后一章，讨论发现与教学，跟上述作者的前书也很有关系，这一章也表明书本可能还会有续篇。

似真推理的有效运用，在解题时关系极大。本书有许多例子阐明这一点，但这只是解题的一个方面，其他方面还需要作类似的例示解说。

这里所涉及的很多问题有许多还需要作进一步的研究。关于我对似真推理所持的观点，应同其他作者的观点进行比较，所举的历史上的实例也需要作更彻底的考证。对于发现与教学的观点，更需要诸如实验心理学<sup>①</sup>等方法给予考察。一些这方面的工作还要继续，但有些则可能是徒劳的。

这本书不是教科书，但我希望它能日渐影响目前教学中的讲授法和选题。沿着这个方向重写习惯的教科书是不会得不到补偿的。

## 7. (略)

G·波利亚

1953年5月于斯坦福大学

---

<sup>①</sup> 这项研究工作在E.R.Hilgard主持下的计划内，由O.N.R.所资助，在斯坦福大学心理学系进行。

## 对读者的提示

第七章第二节在第七章引述时简记为 § 2，在其他各章中则记为 § 7.2；第十四章第 5 节第 3 小节在第十四章中简记为 § 5(3)，在其他各章中则记为 § 14.5(3)；第十四章习题 26，在同一章中记为习题 26，在其他章则记为 14.26。

只要具有初等的代数和几何的知识就足以看懂本书的主要部分。如果再加上解析几何和包括极限和无穷级数在内的微积分的知识，就几乎可以遍览全书以及大部分的习题与评注而不致感到困难。但也有个别的陈述、提出的问题 and 某些评注，也许还需要更进一步的知识，在这样的地方，我会提醒读者的。

程度较高的读者，如果忽略掉那些在他看来过于肤浅的部分，那他的损失，将大于初学者对过于复杂部分的略读。

某些证明的(不太困难的)细节部分，常常不加说明就予以省略。有挑剔习惯的读者，应该对此有所准备，而不应该多加指责。

部分习题的解答可能非常轻松，而有些则相当困难。帮助解答的提示，用方括号 [ ] 引出。邻近的问题也会包含着解答的线索。在有的章里，要注意特别仔细地阅读写在习题前面的引言。

解答有时很短，这些解答是供读者独自认真地求出问题的答案以后对照用的。

只要读者在解题时花过精力，即使他并没有解出题来，也一定会得到很多好处。比方说，他可以看一下解答，试着从中找出关键所在，然后把它放在一边，再自己把答案解出来。

在本书的一些地方，配了很多图形，或者给出很琐碎的过渡步骤，目的是使读者了解图形或公式怎样演变：例如图16·1—16·5。但全书没有一个多余的图形或公式。读者读一篇文字，“浅尝辄止”或“细嚼慢咽”均无不可，但如要彻底理解，则必须备下纸笔：他应该准备写出或画出文中引证的或仅仅是指出的每一个公式和图形。这样做，他就有机会看出图形或公式的演变，各细节部分对产生答案的作用，以及记住整个过程。

# 目 录

前言.....	1
对读者的提示.....	9

## 卷 I 数学中的归纳与类比

第一章 归纳法.....	3
1. 经验和观念.....	4
2. 提示的吻合.....	4
3. 印证.....	6
4. 归纳的态度.....	9
第一章的习题与评注.....	10
[12.是与否。13.经验与行为。14.逻辑学家、数学家、物 理学家和工程师。]	
第二章 普遍化、特殊化、类比.....	14
1. 普遍化、特殊化、类比和归纳法.....	14
2. 普遍化.....	14
3. 特殊化.....	15
4. 类比.....	15
5. 普遍化、特殊化和类比.....	18
6. 借助类比的发现.....	21
7. 类比和归纳法.....	26
第二章的习题与评注.....	27



第一部分.....	27
〔1.正确的普遍化。5.极端的特例。7.主要的特例。10.特例的代表。11.类似的例子。18.大的类比。19.精确的类比。20.引文。〕	
第二部分.....	37
〔21.猜测E。44.反驳和证明的第一步。45.证明的第二步。46.类比的危险。〕	
<b>第三章 立体几何中的归纳法.....</b>	<b>44</b>
1. 多面体.....	44
2. 第一个印证.....	47
3. 再印证.....	48
4. 严格的试验.....	49
5. 两种印证.....	51
6. 非常特殊的例子.....	52
7. 类比.....	53
8. 空间的分割.....	55
9. 问题的变形.....	56
10. 普遍化、特殊化、类比.....	56
11. 一个类似的问题.....	57
12. 一组类似问题.....	59
13. 许多问题有时比只有一个问题更加容易解答.....	60
14. 猜测.....	61
15. 预言和印证.....	62
16. 重新做更好.....	63
17. 归纳提示演绎；特例提示普遍性证明.....	64
18. 进一步的推测.....	66
第三章的习题与评注.....	67