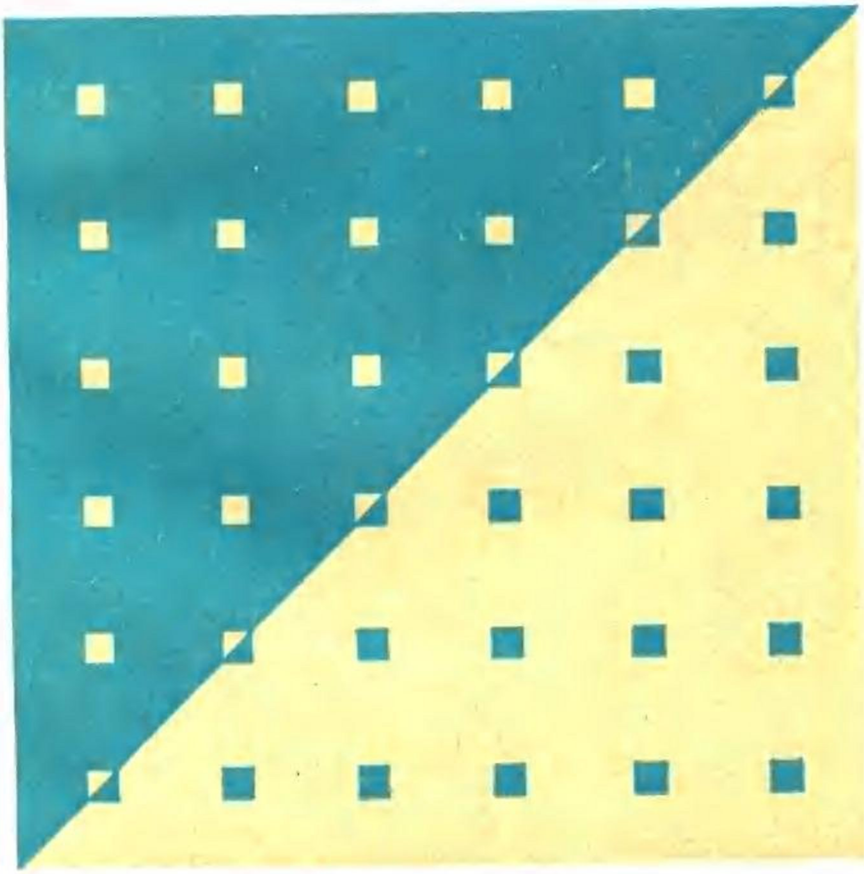
BANACH代数与谱论

高枚／编



北京师范大学出版社

BANACH 代数与谱论

高 校 编

北京师范大学出版社

BANACH 代数与谱论

高 校 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：6.75 字数：163千

1991年1月第1版 1991年1月第1次印刷

印数：1—1 000

ISBN7-303-01050-5/O·138

定 价：1.90 元

内 容 简 介

本书共4章．第1章介绍Banach代数的基本理论，并讨论了以谱映射定理为中心的谱的基本性质；第2章介绍Гельфанд理论和有对合的Banach代数；第3章研究算子理论中的一个重要的C^*-代数，即Hilbert空间H上的全体有界线性算子所构成的Banach代数$\mathscr{B}(H)$，重点是$\mathscr{B}(H)$的有界正规算子的谱分解；第4章主要是将谱分解推广到无界的正规算子．

本书可用作高等学校数学专业泛函分析课程的教学参考书．

前　　言

关于Banach代数与谱论，国内外已有很多权威著作。编者所想的是，如能增添一本用中文写成的入门读物，对于数学专业的学生来说，也许并非完全多余。团此，我们以 Walter Rudin 的《Functional Analysis》一书的最后四章为基础，参照关肇直、田方增；M.A.Наймарк；C.E.Rickart等名家著作，进行加工，编写成此书。希望它能帮助读者对这一数学分支有一个粗略的了解。

阅读本书需要一定的基础知识。我们假定读者学习过分析学（解析函数论，实变函数论，泛函分析），代数学与拓扑学。但是，考虑到理解一些重要概念时应当有共同语言，故在书末另列附录，收入若干名词，术语和定理。建议读者先浏览一遍，涉及到时可随手查阅。附录中列出的定理大都是书中引用较多的。它们的证明一律省略，因为读者很容易从有关的专著中找到。至于现已通用的符号和名词，我们都直接采用而不作解释。这样做，为的是能压缩全书篇幅，并使文字较为简洁。

编者学识谫陋，书中谬误及不妥之处在所难免，希望能够得到专家和读者的指正。

最后，编者谨向河北省教委周治华主任、北京师范大学刘绍学教授和孙永生教授、华东师范大学张奠宙教授、以及自己的同事和亲属任槐林、谢诟、杜存义、荆崇恩等同志表示衷心的感谢，由于得到他们的理解和支持，特别是河北省教委的资助，这本书才得以问世。

高　枚

1990年3月

目　录

第1章　Banach代数

这一章的内容对于全书来说是最基本的，它勾画出今后将要讨论的问题的一个大致的轮廓．其中，向量值函数的积分和符号运算是为研究方法做的必要准备，希望读者给予足够的重视．由于谱理论涉及的是不可逆元，而为了认识事物的全貌，还应当考虑可逆元，因此最后一节专门讨论可逆元群的构造．

1.1 Banach代数的定义·例

1.1.1 定义

代数　集合A称为数域$\boldsymbol{K}$上的一个代数，如果A是$\boldsymbol{K}$上的一个向量空间，它的元素之间定义了一个乘法，即，对应于任何x, $y\in A$，有唯一的乘积$xy\in A$；而且，这个乘法运算对任何x, y, $z\in A$与任何$\alpha\in\boldsymbol{K}$，满足以下条件：

（1）　$x(yz)=(xy)z$；

（2）　$x(y+z)=xy+xz$,　$(x+y)z=xz+yz$；

（3）　$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$.

当数域$\boldsymbol{K}$是复数域$\boldsymbol{C}$时，A特称为**复代数**．

代数A称为**交换代数**，如果A内任何二个元素x, y，它们的乘积满足条件

（4）　$xy=yx$.

代数A如果有这样一个元素，记作e，它与任何$x\in A$作成的乘积满足条件

（5）　$xe=ex=x$,

则称e为代数A的一个**单位元**．

显然，至多有一个单位元$e\in A$满足（5）式．因为，假如另

有$e' \in A$也满足（5）式，则可得出 $e'=e'e=e$。

赋范代数 代数A称为赋范代数，如果A同时又是一个赋范向量空间，而且任二元素的乘积的范数满足乘法不等式

（6） $\|xy\| \leqslant \|x\| \ \|y\|$.

于是，在赋范代数内，乘法运算是连续的. 因为，当$x_n \to x$，$y_n \to y$时，由恒等式

（7） $x_n y_n - xy = (x_n - x) y_n + x(y_n - y)$

可以得出

（8） $x_n y_n \to xy$。

显然，（8）式蕴涵乘法运算既是左连续的，又是右连续的这两个特款。

赋范代数A如果不是$\{0\}$，它又有单位元e，那么，由$\|e\| = \|e^2\| \leqslant \|e\|^2$立即得出

（9） $\|e\| \geqslant 1$.

Banach 代数 赋范代数A如果作为赋范空间是完备的，它又有单位元e，而且$\|e\|=1$，则A称为Banach代数。

交换Banach代数（赋范环） Banach代数A如果又是交换代数，则A称为交换Banach代数。

有些专著，将我们在此定义的交换 Banach 代数称为赋范环(Normed Ring)。

1.1.2 评注

1. 应当指出，在定义 Banach 代数A时，可以略去单位元的存在。有的作者正是这样做的。但是，涉及到逆的概念时，有单位元会更方便. 特别是，A的元素的谱将能用比较自然的形式来定义。何况，事先规定有一个单位元，既能行文简洁，也不会影响到一般性. 因为，许多实际问题中出现的 Banach 代数，都有单位元。即使没有“自然的”单位元，也能按照下述方法“人工地”添加上一个单位元。

假定A满足定义1.1.1中的条件（1）至（3）以及（6），但是没有单位元. 设A_1由一切有序偶(x,α)组成，其中$x \in A$，

$\alpha \in \boldsymbol{K}$。在$A_1$中任二元素 (x,α) 与 (y,β) 的乘积定义为

$$(x,\alpha)(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta),$$

再定义范数

$$\|(x,\alpha)\|=\|x\|+|\alpha|.$$

这时，$e=(0,1)$ 就是A_1的单位元。

容易验证A_1是一个合乎定义1.1.1的Banach代数；映射 $x\to(x,0)$ 是A到A_1的一个子空间上的一个等距同构。

如果将x与 $(x,0)$ 看成相同的元，那么，A_1 就 是A再加上由$e=(0,1)$ 生成的一维向量空间。换句话说，我 们 可以将A放进一个更大的集合A_1中去讨论，而无须对它原先定义的乘积、范数作任何实质性的修改．但是，这个A_1有一个单位元。

2．读者还可以从定义1.1.1看出，所谓Banach代数，乃是一个集合A，它满足以下三个条件：

（i） A是一个代数，有单位元e；

(ii) A是一个Banach空间且$\|e\|=1$

(iii) 赋予A的范数满足乘法不等式。

下面的决理1.1.3将要指出，条件 (iii) 可以换成“乘法是左连续的和右连续的”这种较弱的形式。

1.1.3定理 如果Banach空间A又是一个有单位元$e\neq0$的复代数，其中定义的乘法是左连续的和右连续的，那么，可以赋予A另一个范数，它诱出与给定的拓扑完全相同的拓扑，并且使A成为一个 Banach 代数。

证 题设$e\neq0$是为了不去赘述$A=\{0\}$这 种 最简单的特款。

我们先对每个$x\in A$定义左乘法算子M_x：

（1） $M_x(z)=xz \qquad (z\in A)$.

设$\tilde{A}$为全体M_x的集，$\mathscr{B}(A)$为A上全体有界线性算子 的 Banach 空间，取算子范数，故恒等算子I的范数$\|I\|=1$。因为按题设乘法是左连续的和右连续的，所以$\tilde{A}\subset\mathscr{B}(A)$。

显然映射$x\mapsto M_x$是线性的，结合律蕴涵$M_{xy}=M_xM_y$。

任取$x\in A$，则有

（2）　　$\|x\|=\|xe\|=\|M_x(e)\|\leqslant\|M_x\|\ \|e\|$.

这些事实说明映射$x\mapsto M_x$是A到$\tilde{A}$上的一个同构，而且其逆映射是连续的。

因为有

（3）　　$\|M_xM_y\|\leqslant\|M_x\|\ \|M_y\|$,

（4）　　$\|M_e\|=\|I\|=1$,

欲证$\tilde{A}$是一个Banach代数，只须求证它是完备的，亦即，按照算子的范数给出的拓扑，$\tilde{A}$是$\mathscr{B}(A)$的闭子空间。而且，一旦此事得到证明，由开映射定理将推知映射$x\mapsto M_x$连续，$\|x\|$与$\|M_x\|$是A上的两个等价范数。

设$T\in\mathscr{B}(A)$，$T_i\in\tilde{A}$，又按照$\mathscr{B}(A)$的拓扑$T_i\to T$。如果T_i是左乘以$x_i\in A$，那么

（5）　　$T_i(y)=x_iy=(x_ie)y=T_i(e)y$　　$(y\in A)$.

当$i\to\infty$时，将有$T_i(y)=T(y)$；$T_i(e)\to T(e)$。因为题设乘法在A内是左连续的，所以（5）式右端那一项将趋向$T(e)y$.

记$x=T(e)$。于是，在$i\to\infty$时将有

（6）　　$T(y)=T(e)y=xy=M_xy$　　$(y\in A)$.

这就得出$T=M_x\in\tilde{A}$，因此$\tilde{A}$是闭集。　□

1.1.4 Banach代数的例

例1. 复数域$\boldsymbol{C}$，按照通常的加法和乘法是一个交换Banach代数。$x\in\boldsymbol{C}$的范数为$\|x\|=|x|$。这里定义范数是乘法的，即$\|xy\|=\|x\|\ \|y\|$。单位元是数1.

实数域$\boldsymbol{R}$就其通常的结构来说，是一个实交换Banach代数。单位元也是数1.

在此，我们注意到$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{C}$的一个子代数，它与$\boldsymbol{C}$有相同的单位元。

更有意义的是，我们还可以将$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{C}$都视为下述矩阵代数的特款。

用M^n表示a_{ij}是复数的$n\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的全体所成的集。

如果定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),$$
$$\lambda A=(\lambda a_{ij}),\ \lambda\in \boldsymbol{C},$$

那么M^n将成为一个复线性空间．通常的矩阵的乘法

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

使M^n成为一个代数．众所周知，矩阵的乘法是不可交换的．

矩阵$I=(\delta_{ij})$，$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$ $(i\neq j)$，是M^n的单位元．

定义

$$\|A\|=\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|:1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

将使M^n成为一个赋范代数．容易证明，按照这个范数，M^n是完备的．因此，M^n是一个Banach代数．

例2． $\boldsymbol{R}^2$是一个实交换Banach代数．其中的线性运算按照坐标去做．再对于$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$定义乘法

$$xy=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1),$$

以及范数$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$．容易验证$\|xy\|=\|x\|\ \|y\|$．单位元是（1，0）．

例3． 设$C(K)$为非空紧Hausdorff空间K上的全体复连续函数构成的Banach空间，赋予的是上确界范数，乘法定义为

$$(fg)(p)=f(p)g(p)\qquad(p\in K).$$

这时，有

$$\|fg\|=\sup|f(p)g(p)|\leqslant\sup|f(p)|\cdot\sup|g(p)|$$
$$=\|f\|\ \|g\|.$$

常值函数1可作单位元．因此$C(K)$是一个交换Banach代数．

有一个经常遇见的特款．当$K=[0,1]$时，$C[0,1]$作为区间$[0,1]$上全体复连续函数构成的Banach空间，也是一个交换Banach代数．

还有，如果K是仅含n个点的有限集，那么$C(K)$其实就是

$\boldsymbol{C}^n$，其中的乘法按照坐标去做．当 $n=1$ 时，则化为最简单的特款$\boldsymbol{C}$。

例4．设A为Banach空间．这时，由A上的全体有界线性算子构成的代数$\mathscr{B}(A)$是一个 Banach 代数，赋予通常的算子范数，恒等算子 I 是它的单位元。

如果 $\dim A=n<\infty$，那么$\mathscr{B}(A)$同构于矩阵代数M^n．只要，$\dim A=n>1$，那么$\mathscr{B}(A)$就是不可交换的。当然，平凡空间$A=\{0\}$应予排除。

例5．如果K是$\boldsymbol{C}$或 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个非空子集，而 A是由那些在K的内部全纯的函数 $f\in C(K)$构成的$C(K)$的一个子代数（参看前面的例 3），A对于所赋予的上确界范数来说是完备的，因此 A 是一个Banach代数。

当K取的是$\boldsymbol{C}$内的闭单位圆盘$|z|\leqslant 1$ 时，上述的 A 将特称为**圆盘 (disc) 代数**．我们来验证其完备性．

设$\{f_n\}$是A中的一个Cauchy 序列，那么，对任何 z，$|z|\leqslant 1$；$\{f_n(z)\}$将是$\boldsymbol{C}$中的Cauchy序列．因此，$n\to\infty$时，$f_n(z)\to f(z)$在$|z|\leqslant 1$ 上的收敛是一致的，于是f在$|z|\leqslant 1$ 上连续。然后，在$|z|<1$ 内任意取一条简单闭曲线Γ，由于$f_n(z)\to f(z)$在Γ上是一致收敛，应当有

$$(1)\qquad \lim_n \int_\Gamma f_n(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz.$$

根据解析函数论中的 Cauchy 定理，（1）式左端的每个积分都等于零，因此恒有

$$(2)\qquad \int_\Gamma f(z)dz=0.$$

再应用 Morera 定理，得知f是在$|z|<1$ 上，亦即在闭单位圆盘的内部全纯的函数。所以 $f\in A$。

例6．设$L^1(\boldsymbol{R})$为定义在实数轴上的全体复值 Lebesgue 可积函数构成的 Banach 空间．鉴于两个可积函数的点态乘法所得到的第三个函数未必可积，因此、我们在$L^1(\boldsymbol{R})$中将定义新的乘法：

卷积，记作 $*$；它规定，对于 $f,g\in L^1(\boldsymbol{R})$，

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)ds.$$

应用积分理论中的Fubini定理，可以验证：对于任何 f，$g\in L^1(\mathbf{R})$，$f*g$都有意义，因而$f*g\in L^1(\boldsymbol{R})$；以及$\|f*g\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$和乘法服从结合律。但是，这时$L^1(\boldsymbol{R})$没有单位元。（详见〔2〕）。按照本书的规定，必须经过评注1.1.2中所说的过程添加单位元之后，$L^1(\boldsymbol{R})$才能成为一个Banach代数。

容易将$L^1(\boldsymbol{R})$推广为$L^1(\boldsymbol{R}^n)$。

还可以再将$L^1(\boldsymbol{R}^n)$扩大为来自$\boldsymbol{R}^n$上形为

$$d\mu=f\,dm_n+\lambda d\delta$$

的全体复Borel测度构成的代数，其中 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\delta$是$\boldsymbol{R}^n$上的Dirac测度，$\lambda$为纯量。

例7. 设$M(\boldsymbol{R}^n)$是$\mathbf{R}^n$上全体复Borel测度构成的代数，其乘法为卷积，以全变差作为范数。这是一个交换Banach代数，单位元是δ。于是，$L^1(\boldsymbol{R}^n)$是$M(\boldsymbol{R}^n)$的一个闭子代数。

1.1.5 评注

作为§1.1的结束语，我们指出，今后主要是研究复数域上的Banach代数。如果没有另作声明，本书提到的Banach代数都是复Banach代数。至于实数域上的Banach代数——前面举例时已简称为实Banach代数，往往只是附带地提到。因为，本书的核心内容之一，是将复变函数中的全纯函数的理论移植过来，建立起A-值函数的积分概念和符号运算的方法。另外，复数域$\boldsymbol{C}$中有极其自然的非平凡的**对合**（定义见§2.3.1），即共轭.也可以说，正是从复数的共轭衍生出对合的概念。而揭示某些类型的Banach代数的许多深刻的性质，将取决于对合的存在。到了第3章，我们就能看到，复Hilbert空间的理论要比实Hilbert空间的理论更加丰富多采。即使在本章的一些问题中，细心的读者也能察觉到，$\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{R}$之间的拓扑上的差异往往有重要的影响。

1.2 同态与同构

1.2.1 定义

同态 两个代数A,B之间的一个映射$\phi: A \to B$称为同态映射，如果对于任何$x, y \in A$以及纯量λ, μ，恒有

（1） $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$，

（2） $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

复同态 复代数A到复数域$\mathbf{C}$上不恒等于零的同态 $\phi: A \to \mathbf{C}$特称为复同态

因此，所谓复同态乃是复代数A上的一个线性泛函ϕ，对于任何$x, y \in A$，都有

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

同构 两个代数之间的一个双射同态称为一个同构.

可逆元 在任一有单位元e的代数A，元素$x \in A$称为一个可逆元，如果在A中有一个元素y，能使

$$yx = xy = e$$

成立。这时y称为x的**逆元素**，并且另外记y为x^{-1}.

容易验证，如果$x \in A$有逆元素，则其逆元素是唯一的。因为，假如$y, z \in A$皆为x的逆元素，则有$yx = e = xz$，于是

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

可除代数 如果在一个有单位元的代数A中，每个非零元素都是可逆元，那么A称为可除代数.

1.2.2 命题 如果ϕ是有单位元e的复代数A上的一个复同态，那么$\phi(e) = 1$，而且对于每个可逆元$x \in A$都有$\phi(x) \neq 0$.

证 因为在定义复同态时，我们曾约定ϕ不恒等于零。所以总会有$y \in A$使$\phi(y) \neq 0$。这时

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e),$$

从而得到$\phi(e) = 1$.

任取可逆元$x \in A$，则

$$\phi(x)\phi(x^{-1})=\phi(xx^{-1})=\phi(e)=1,$$

因此 $\phi(x)\neq 0$。

当我们得出定理1.2.5以后，再回过头来看看命题1.2.2时，将能更清楚地了解复同态是一些具有什么样的特征的线性泛函。但是，在这之前，还必须做些准备工作。其实，定理1.2.3也是十分重要的。它大概是Banach代数理论中，最为广泛引用的一个基本定理。其中的(c)蕴涵Banach代数的一切复同态都是连续的。

1.2.3 定理 设 A 为 Banach 代数，$x\in A$，$\|x\|<1$。这时，有以下结论：

(a) $e-x$是可逆元；

(b) $\|(e-x)^{-1}-e-x\|\leqslant\dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$；

(c) 对于 A 上的每个复同态来说，都有 $|\phi(x)|<1$。

证 由于 $\|x^n\|\leqslant\|x\|^n$ 以及 $\|x\|<1$，诸元素

(1) $$s_n=e+x+x^2+\cdots+x^n$$

构成 A 内的一个Cauchy序列。因为 A 是完备空间，所以存在这样的 $s\in A$，$\lim\limits_n s_n=s$。又因 $\lim\limits_n x^n=0$，乘法是连续的，当 $n\to\infty$ 时将由

(2) $$s_n\cdot(e-x)=e-x^{n+1}=(e-x)\cdot s_n$$

得到

(3) $$s\cdot(e-x)=e=(e-x)\cdot s.$$

这就是说，s 是$e-x$的逆元素。

接下来，利用（1）式即可推出

(4) $$\|(e-x)^{-1}-e-x\|=\|s-e-x\|=\|x^2+\cdots+x^n+\cdots\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n\leqslant\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

最后，设$\lambda\in \boldsymbol{C}$，$|\lambda|\geqslant 1$。由 (a) 知$e-\lambda^{-1}x$是可逆元。根据命题1.2.2，对于 A 上的任一复同态ϕ，都有

$$\phi(e-\lambda^{-1}x)=1-\lambda^{-1}\phi(x)\neq 0,$$

因此 $\phi(x)\neq\lambda$。 □

1.2.4 引理　如果f是一元复变函数当中的一个整函数，且有$f(0)=1$，$f'(0)=0$以及

（1）　　$0<|f(\lambda)|\leqslant e^{|\lambda|}$　　　$(\lambda\in \boldsymbol{C})$，

那么，对于任何$\lambda\in\boldsymbol{C}$，都有$f(\lambda)=1$。

证　由于f没有零点，所以另有一个整函数g，使

$$f=\exp\{g\},g(0)=g'(0)=0。$$

而且，由条件（1）可知$\mathrm{Re}[g(\;)]\leqslant|\lambda|$。这个不等式蕴涵

（2）　　$|g(\lambda)|\leqslant|2r-g(\lambda)|$　　　$(|\lambda|\leqslant r)$。

函数

（3）　　$h_r(\lambda)=\dfrac{r^2g(\lambda)}{\lambda^2[2r-g(\lambda)]}$

在$\{\lambda:|\lambda|<2r\}$内全纯，并且在$|\lambda|=r$上有$|h_r(\lambda)|\leqslant1$. 根据最大模定理，应有

（4）　　$|h_r(\lambda)|\leqslant1$　　　$(|\lambda|\leqslant r)$。

固决λ，让$r\to\infty$，这时（3）式和（4）式蕴涵$g(\lambda)=0$。　　□

1.2.5 定理　(Gleason, Kahane, Zelazko) 如果ϕ是Banach代数A上的一个线性泛函，有$\phi(e)=1$，又对于每个可逆元$x\in A$都有$\phi(x)\neq0$，那么

（1）　　$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$　　　$(x,y\in A)$。

换句话说，这时ϕ是一个复同态。

（值得注意的是，我们无须假设ϕ的连续性.）

证　设N为ϕ的零空间. 这时$x,y\in A$可以表示为

（2）　　$x=a+\phi(x)e,y=b+\phi(y)e$,

其中$a,b\in N$。再将ϕ应用于（2）的两个方程的乘积，得到

（3）　$\phi(xy)=\phi(ab)+\phi(x)\phi(y)$。于是，如果能够证明命题

（4）　　$a\in N,b\in N\Longrightarrow ab\in N$

成立，就将得到结论（1）.

我们来看，假决已经证明（4）的特款

（5）　　$a\in N\Longrightarrow a^2\in N$

成立，那么在（3）式中让$x=y$，将有