大气科学中数学方法的应用

郭秉荣
丑纪范
杜行远

气象出版社

大气科学中数学方法的应用

郭秉荣 丑纪范 杜行远 编著

气象出版社

内 容 简 介

本书比较简明、系统地介绍近年来在大气科学中应用到的新的数学方法，主要是：共轭方程和扰动理论；大气环流的多平衡态；失稳、分歧和突变等。对于动力预报方面常用的几类方法：差分法、谱方法和格林函数等也作了简明介绍。叙述这些内容时，注意到补充必需的数学基础理论，力求循序渐进，易读易懂。

本书可供具有大专水平的气象工作者使用，亦可作为气象专业高年级学生、研究生的参考教材。

大气科学中数学方法的应用

郭秉荣 丑纪范 杜行远 编著

责任编辑 庞小琪

*　*　*

气象出版社 出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京昌平环球科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　全国各地新华书店经售

*　*　*

开本：850×1168 1/32　印张：12.5　字数：320千字

1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷

印数：1—3,000

统一书号：13194·0354　定价：3.50元

前　言

在近几十年中，大气科学无论在理论研究和业务实践方面都有明显的进展，这表现在科学研究和业务实践方面正在由定性向客观定量的方向发展。这样一来，在大气科学的理论研究和业务工作中需用的数学理论和方法日益深广，而原来在大学学到的一些基础数学知识已远不够用。随着气象科学事业的不断发展，在这一领域中用到的现代数学知识已形形色色散见于中外文献之中。由于对这些内容缺乏系统地了解，因此，要能较快地掌握和应用它们有一定难度。不少气象工作者感到棘手的一件事是：自己想阅读一些现代气象科学文献，或者在自己的工作中，需要用一些现代数学工具，但是要花较多的时间将这些内容读懂，条件不许可，同时也缺少合适的专门结合气象科学讲现代数学理论的书籍。为此，我们编写了本书。试图一方面用不多的篇幅，较系统地介绍一些数学理论和方法，为便于易读易懂，并注意到补充必需的数学基础知识；另一方面是力求紧密结合大气科学的应用问题（特别是天气预报问题）进行讲述，重点介绍近年来在天气预报理论方面的新进展。其目的是为具有大专水平的气象工作者提供一点方便；另一个目的，也是为气象专业的高年级学生和研究生提供一本参考教材。

大气科学的发展，主要决定于对各种气象问题的物理规律的认识，数学只是研究问题的工具。但是实践表明，由于新的数学理论和方法的引进，对现代气象科学的发展，起了有力的促进作用。因此，气象工作者具有较深厚的数学基础，在工作中能及时地掌握和应用不断发展的新的数学工具，也是一件不可忽视的事。

需要说明，本书只是围绕编者在近年工作中用到的一些数学

理论和方法写成的，自然它不可能包括大气科学问题中已用的所有数学理论和方法。至于在大气科学中用得较多的数理统计方法，已另成系统，不在本书述及范围。

本书第一章由杜行远同志执笔，第二至第六章由郭秉荣同志执笔，第七至第十一章由丑纪范同志执笔。

因初次编写，缺乏经验，又限于业务水平，缺点错误难免，请批评指正。

作者

1983年6月

目　录

第一章　气象学中的差分计算方法

§1　引　言

气象学是研究大气状态及其运动、变化的科学。在动力学上描写这些现象的方程，是四维非线性偏微分方程组。一般说来，它们是很复杂的，要求得到解析解是不可能的，而只能在电子计算机上，求出它们的数值解。通常所说的“数值天气预报”，数值二字就是从这个意义来的。

数值解法很多，在这一章我们只介绍其中的差分计算方法。差分方法是气象学中用得最早，也是用得最普遍的一种数值解法。早在六十多年以前，就有人用差分方法试图解决天气预报问题。这一工作，不仅对气象学，而且对计算数学，都有首创意义。六十多年来，这一方法有了新的研究和发展，这里只能介绍其最主要和基本的内容。

我们针对大气运动的特点来讨论差分解法。大气运动(至少)有以下两个特点：第一，它的应变量的数值都是有界的。如果我们认为大气运动方程准确地描述了大气运动状态，则实际所观测到的大气现象就是大气运动方程的真解。利用微分方程真解是有界的这一特性，可以大大地便利下面对差分格式稳定性问题的讨论。第二，大气运动是呈波动状地发生在地球上的。在东西方向(x)是以2π为周期。在南北方向(y)经过简单的线性订正后，则是以π为周期的。所以，如果我们把气象要素写成$A\sin(mx)$时，就意味着是以地球半经$R=6371$公里为特征长度单位，这里m为波数，它和x都是无量纲数。当相邻两格点的实际距离取作300公里时，相应的步长约为$\Delta x=\frac{1}{20}=0.05$的确是一个小量。

当把气象要素写成 $B\sin(ny)$ 时，特征长度为 $\frac{R}{2}=3186$ 公里。欲使步长 Δy 仍为 0.05，则相邻两格点的实际距离应取作 150 公里。从这里的讨论可以看出：在东西方向和南北方向应分别取两个不同的特征尺度。

§2 差分方法及使用的网格

各种气象问题，如天气预报问题，一般情况下，在数学上就是要求解既带有边界条件，又带有初始条件的偏微分方程，或简称边初值问题。差分方法是将这种连续的边初值问题离散化，得到差分形式的边初值问题。方法的基本要领是，用差商代替微商。这样可以减少偏微分方程的维数，将其化为常微分方程组，乃至代数方程组。

我们只讨论能反映大气运动基本特征、形式上尽可能简单的微分方程化为代数方程组的问题。因为所讨论的微分方程的解的性质比较清楚，这样就可以排除数学形式上的复杂性及其他方面因素的干扰，从而能得到差分方法中一些最本质的原则和特性，而它们也是在处理更复杂的方程时，所必须遵循的。

在差分方法中，首先要在我们所研究的区域内，引用一组几何格点。在这些格点上，要给出初始时刻气象要素的值；以后时刻，在这些格点上，要计算出气象要素的新的数值。这种格点称作网格或网格点。因为大气运动是近似水平的，所以我们着重研究固定在平面上的网格。

差分方法中，使用的网格必须是规则的，这样才能在电子计

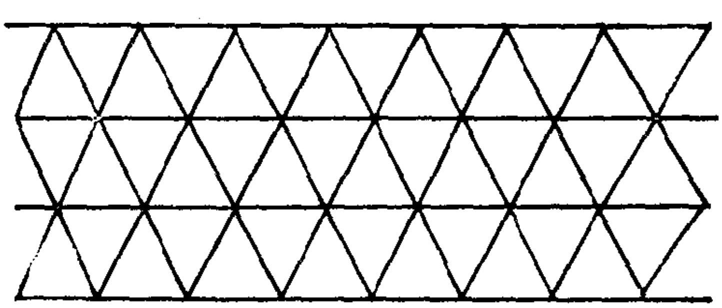

图 1.1 正三角形网格

算机上进行运算。规则的网格一共有三种：正三角形、正方形和正六角形。如图 1.1，1.2，1.3 所示。

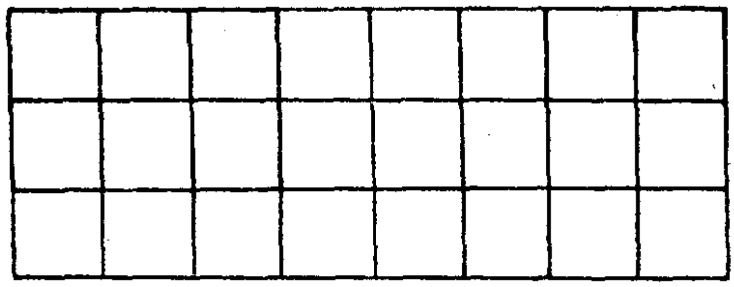

图 1.2 正方形网格

在网格中，相邻两个格点之间的距离称为格距或步长。在相同的区域范围内和相等的格距条件下，使用正三角形、正方形和正六角形网格，所能得到的格点数目之比为

$$8:3\sqrt{3}:4\approx8:5:4$$

很显然，正三角形网格符合"合理密植"的条件，具有较高的精确度。不过，正三角形网格的程序设计，较为复杂。因此一般多用正方形网格。正六角形网格精确度既低，程序设计也复杂，未能在实际中得到应用。

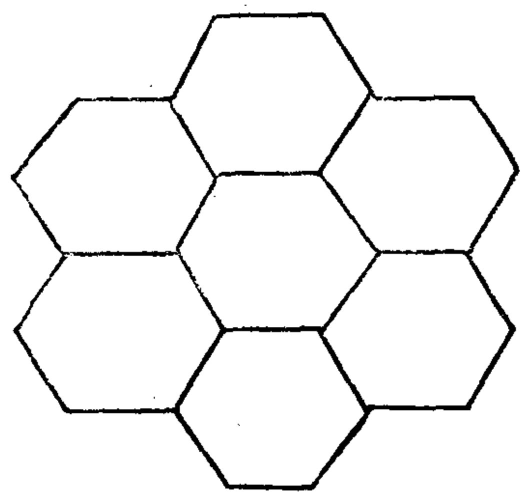

图 1.3 正六角形网格

§3 差分格式及相容性

我们先从含有一个自变量的函数 $u=u(x)$ 谈起。在 x 轴上取 $j=0, 1, 2, \cdots, J$ 个格点，其格距为 Δx，于是格点 $x_j=j\Delta x$ 上的函数值为 $u_j=u(x_j)$，共有 $J+1$ 个。

另一方面，可将函数 $u(x)$ 展成傅里叶(Fourier)级数

$$u(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geqslant1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

根据 $J+1$ 个数据，只能确定右端 $J+1$ 个不同的展开系数，即除

a_0外，还可得出$n=1,2,\cdots,\frac{J}{2}$时的a_n和b_n。当$n=\frac{J}{2}$时为最短波长，其波长为$2\Delta x$，即波长小于二倍格距的短波，在差分计算中是无法考虑的。

在大气运动中，平流性质是很重要的，其特征可以通过下面简单的线性方程来表示

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

下面我们主要讨论这种类型方程的差分格式的性质。

现在$u(x,\ t)$是两个变量的函数。如果选取空间步长为$\Delta x=h$，时间步长为$\Delta t=\tau$，则格点可记作

$$x_k=kh,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

$$t^n=n\tau,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

这样原来连续形式的方程(1.1)就可以写成离散形式，即在每一个网格点$(k,\ n)$上求出$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{k,n}$和$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{k,n}$的近似表达式以构造差分方程。前面已经说明，在气象问题中实际使用的网格距是很小的量，因此可将函数$u(x,\ t)$展成泰勒级数

$$u(x+h,t)=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{h^3}{3!}+\cdots \tag{1.2}$$

$$u(x-h,t)=u(x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{h^3}{3!}+\cdots \tag{1.3}$$

由此有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}+\varepsilon \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}+\varepsilon \tag{1.5}$$

称 ε 为截断误差，其中包含 h 的一阶到高阶项，它表示差商的精度。

若记 $u(x+h,t)=u_{k+1}^n$, $u(x-h,t)=u_{k-1}^n$, $u(x,t)=u_k^n$ 。在(1.4)和(1.5)中略去 ε，则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k^n=\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{h} \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k^n=\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{h} \tag{1.7}$$

(1.6)和(1.7)分别称为向前差分和向后差分，它们的差分精度都是一阶的。

同理，对时间的偏导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_h^n$ 可以用

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}\text{或}\frac{u_k^n-u_k^{n-1}}{\tau}$$

近似代替。

如果将级数（1.2），（1.3）相减和相加，便得到

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k^n$ 和 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_k^n$ 的中央差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k^n=\frac{u_{k+1}^n-u_{k-1}^n}{2h},\quad \varepsilon=O(h^2) \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_k^n=\frac{u_{k+1}^n-2u_k^n+u_{k-1}^n}{h^2},\quad \varepsilon=O(h^2) \tag{1.9}$$

显然中央差分的截断误差较小。

这样，如果将方程(1.1)的时间导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 取向前差分，空间导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 分别取向前、向后和中央差分，便得到方程(1.1)的三种差

分格式

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+c\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{h}=0 \tag{1.10}$$

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+c\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{h}=0 \tag{1.11}$$

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+c\frac{u_{k+1}^n-u_{k-1}^n}{2h}=0 \tag{1.12}$$

这也是微分方程（1.1）的差分方程。在解决问题时，自然还要将相应的边界条件和初始条件离散化。

在气象问题中，有时也要求解纯边值问题的，最简单的情况是拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

这里

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{k,j}=\frac{\phi_{k+1,j}-2\phi_{k,j}+\phi_{k-1,j}}{h^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}h^2+\cdots$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{k,j}=\frac{\phi_{k,j+1}-2\phi_{k,j}+\phi_{k,j-1}}{h^2}-\frac{1}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}h^2+\cdots$$

因此，Laplace 方程的差分格式可以写成

$$\frac{\phi_{k+1,j}+\phi_{k-1,j}+\phi_{k,j+1}+\phi_{k,j-1}-4\phi_{k,j}}{h^2}=0 \tag{1.13}$$

其差分精度是二阶的。

我们用差商代替微商，从而使微分方程离散化而得到差分方程，这里存在截断误差。当格距 $h\to0$，$\tau\to0$ 时，截断误差趋于零，差分方程变成原来的微分方程，这种情况下，称差分格式与相应的微分方程是相容的。拿格式(1.11)来说，即考虑差

$$\left(\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+c\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{h}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k^n\equiv\varepsilon$$

如果当 $h\to0$，$\tau\to0$ 时 $\varepsilon\to0$，则格式称为相容性的。显然，格式(1.11)，(1.12)和(1.13)都是相容的。我们在设计差分格式时，

首先要保证格式的相容性。

§4 收 敛 性

研究差分格式的收敛性和稳定性，是用差分方法求解偏微分方程过程中最重要的两个问题。这里首先讨论差分格式的收敛性。具有非齐次项的平流方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\ t) \tag{1.14}$$

它描述了变量 u 在外力 $f(x,t)$ 作用下，以常数 c 沿 x 轴的平流运动。方程(1.14)的解析解是可以求得的，有了它，就能较方便地研究各种差分格式及其数值解的特性。为了求得方程(1.14)的解析解，作如下变数变换

$$\begin{cases}\xi=x-ct\\ t=t\end{cases}$$

记 $u(x,t)=U(\xi,\ t)$。这样，方程(1.14)变成

$$\frac{\partial U}{\partial t}=f(\xi+ct,\ t)$$

设 $t=0$ 时，$u(x,\ 0)=U(\xi,\ 0)=\varphi(\xi)$。积分上式得

$$\begin{aligned}u(x,t)=U(\xi,\ t)&=\varphi(\xi)+\int_0^t f(\xi+ct',\ t')dt'\\ &=\varphi(x-ct)+\int_0^t f(x-ct+ct',t')dt'\end{aligned} \tag{1.15}$$

这就是方程(1.14)的解析解。

下面讨论方程(1.14)的数值解，采用向后差分格式，则相应于方程(1.14)的差分方程为

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+c\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{h}=f_k^n \tag{1.16}$$

初始条件为：$u_k^0=\varphi_k$

由差分方程 (1.16) 知道，当第 n 层时间的 u_k^n 值已知时，很容易求得第 $n+1$ 层时间的数值解为

$$u_k^{n+1}=\left(1-c\frac{\tau}{h}\right)u_k^n+c\frac{\tau}{h}u_{k-1}^n+\tau f_k^n \tag{1.17}$$

由于 u_k^0 是给定的，所以根据公式(1.17)可求出任何时刻的u_k^n值，这就是差分方程的解。

由微分方程与差分方程的关系知道，差分方程的解 u_k^n 与微分方程的解 $u(x_k, t^n)$的差别是离散化误差产生的。对于固定点 $x_k=kh$，$t^n=n\tau$ 来说，如果当 $h\to 0$，$\tau\to 0$ 时，$u_k^n\to u(x_k, t^n)$，则称差分格式是收敛的。

下面我们求出收敛性的条件，为此设

$$u_k^n=u(x_k,\ t^n)+\delta u_k^n$$

这里 δu_k^n 是差分方程解与微分方程解的差。

将上式代入(1.16)式，得

$$\begin{aligned}&\frac{\delta u_k^{n+1}-\delta u_k^n}{\tau}+c\frac{\delta u_k^n-\delta u_{k-1}^n}{h}\\&=f_k^n-\left[\frac{u(x_k,t^{n-1})-u(x_k,t^n)}{\tau}\right.\\&\qquad\left.+c\frac{u(x_k,t^n)-u(x_{k-1},t^n)}{h}\right]\end{aligned} \tag{1.18}$$

上式右端以一阶精度满足方程(1.14)，所以(1.18)可以写成

$$\frac{\delta u_k^{n+1}-\delta u_k^n}{\tau}+c\frac{\delta u_k^n-\delta u_{k-1}^n}{h}=O(\tau,\ h)$$

或

$$\delta u_k^{n+1}=\left(1-c\frac{\tau}{h}\right)\delta u_k^n+c\frac{\tau}{h}\delta u_{k-1}^n+\tau O(\tau,h) \tag{1.19}$$

我们现在考虑 c，h，τ 三者满足不等式

$$0\leqslant c\frac{\tau}{h}\leqslant 1 \tag{1.20}$$

的情况。这时，(1.19)式右端各项系数都是正的，故有