# 图论基础及其应用

舒贤林 徐志才 编著

北京邮电学院出版社

# 图论基础及其应用

舒贤林
徐志才 编著

北京邮电学院出版社

i

## 内 容 提 要

本书共分十章，前七章系统地讲述了图的基本概念和基本性质，后三章着重介绍了图论在电网络分析和运筹学中的应用。在相关部分还编入了图论算法和计算机程序，每章都附有习题，可供选用。

本书可作为高等工科院校和管理院校本科高年级学生和研究生图论课程的教本，也适合作为已学过线性代数的工程技术人员和管理干部自学图论的读本。


**图论基础及其应用**

编　　著　舒贤林
　　　　　徐志才
责任编辑　李明田

•

北京邮电学院出版社出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
香河燧口印刷厂印刷

•

850×1168毫米　1/32　印张12.56　字数314.3千字
1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷
印数：1—4000册
ISBN　7-5635-0002-2/O.2　定价：2.40元

# 前　　言

人们在社会生产实践中会遇到大量的包含某种二元关系的系统，例如工作分配，组织管理，物质结构，城市规划，通信网络等，这类系统可以用点和边连接起来的图进行模拟，图中的点代表事物，边代表事物之间的关系。

例如，某矿区有 $v_1$、$v_2$、$v_3$、$v_4$、$v_5$ 等五个电话站，站与站之间架有电话线的是：

$v_1$ 与 $v_2$、$v_3$、$v_5$；

$v_2$ 与 $v_1$、$v_3$、$v_4$、$v_5$；

$v_3$ 与 $v_1$、$v_2$、$v_4$；

$v_4$ 与 $v_2$、$v_3$、$v_5$；

$v_5$ 与 $v_1$、$v_2$、$v_4$。

它们构成一个电话网。若用点代表电话站，用边代表站间的电话线，那么这个电话网可以用图 1 所示的图进行模拟。

这些由点和边构成的图，其点的位置和边的长短、曲直都可以任意描画，并不改变实际问题的性质。我们关心的是它有多少个点，在哪些点间有边相连，以及图所具有的其他特点。

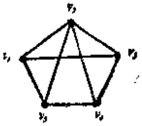


图 1

图论是研究由边连接的点集的理论。它在通信网络，电力网络，开关理论，编码理论，可靠性理论，计算机的程序设计，电路的故障诊断，印刷电路板的设计，情报检索等方面都具有极广泛的应用。下面举几个应用实例。

1. 哥尼斯堡七桥问题

瑞士数学家欧拉在 1736 年发表了一篇讨论哥尼斯堡七桥难

题的论文。哥尼斯堡七桥的示意图如图 2($a$) 所示，$A$、$B$、$C$、$D$四块陆地之间有七个桥相通。问能否从任一陆地出发，走遍七桥而每桥只走一次，又回到原地？为了解这一难题，成千上万人都曾试验过，但都失败了。欧拉指出，七桥难题是无法解决的。他把四块陆地和七个桥用图 2($b$) 来表示，其中点代表陆地，边代表桥。七桥问题则转化为从该图中任一点出发，把图用“一笔画”画出来（每条边必须且只能经过一次，最后回到出发点）。

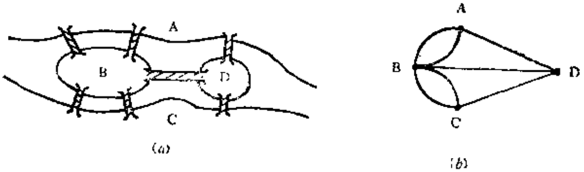



图 2

欧拉给出了一个判定规则：若图是连通的且图中与奇数条边相关联的点的数目为 0 或 2 时，则图能“一笔画”。当与奇数条边相关联的点的数目为 2 时，则两点中任一点为“一笔画”的起点，而另一点为终点；当与奇数条边相关联的点的数目为 0 时，则图中任一点既是“一笔画”的起点又是终点。

七桥问题显然不满足这个规则，图 2($b$) 中每个点关联的边的数目均为奇数，因而它是无解的。欧拉把七桥问题转化为一个图论问题，并十分简捷地证明了这难题是无解的，后来人们公认欧拉为图论的创始人。

2. 环球旅行问题

1857年英国数学家哈密尔顿发明了一个玩具，它是一个木制的正 12 面体，每面是五角形，三面交于一角，共有 20 个角。每个角标注世界上一个重要城市。这玩具的模拟图如图 3 所示。问

旅游者怎样才能仅仅沿着 12 面体的棱旅行经过每个城市恰好一次而最后返回原来的出发城市呢？将这个环球旅行问题转化成一个图论问题来求解，就是要在图 3 中找一条从某点出发，经过图中每点恰好一次且回到出发点的闭合回路。人们把这样的回路称为哈密尔顿回路。由此可见，环球旅行按图论的说法就是在图中寻找哈密尔顿回路。

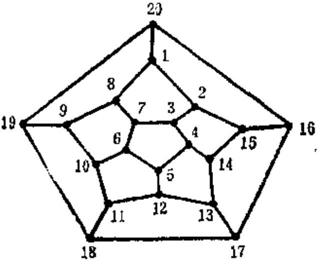



图 3

3． 供应问题

有三个工厂和三个矿山，要从每一个工厂到每一个矿山各修一条专用铁路，问这些铁路能否在同一平面上并且互不交叉？

将三个工厂与三个矿山用六个点表示，九条铁路用九条边表示，就得到一个模拟图如图 4 所示。在图论中把这样的图称为 $K_{3,3}$ 。我们将在第五章中指出 $K_{3,3}$ 不可能画在一个平面上且没有边交叉。因此，上述九条铁路修在同一平面上并且互不交叉是不可能的。

随着电子计算机科学的发展，图论的发展日新月异，图论的应用日益广泛。国内许多学校已经开设图论课程。由于图论的内容非常丰富，涉及面极其广泛，所以本书为了适应一般高等工科

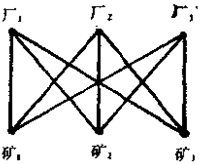



图 4

院校有关通信、计算机科学、自动控制和管理科学等专业教学的需要，编入了图论的基础理论及其在电网络理论、开关理论、运筹学以及计算机科学等方面的应用。在取材上以介绍基础理论为主，适当反映新成就和联系实际。注意内容之间的联系，力求主次分明，由易到难，循序渐进。文字力求简明易读。每章附有一定数量的习题，它们对理解书中内容和掌握书中所介绍的方法是有帮助的。考虑到应用方面的需要，在书的有关部分编入了图论算法和计算机程序。

本书前身是作者编写的同名讲义，曾在北京邮电学院多次使用。通过长期教学实践，根据学生的反映，以及作者的教学和科研心得，对讲义作了修改和增删。

本书可以作为一般高等工科院校高年级学生和研究生有关课程的教材或参考书，也可供有关科技人员阅读。限于作者的水平，缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编 著 者

1987年11月于北京邮电学院

# 目　　录

# 第一章　图的基本概念

## §1.1 图

图论所研究的对象是自然界和人类社会中包含二元关系的系统。其方法是将一个系统抽象为点和边构成的图，点表示事物，边表示事物之间的联系，然后根据图的性质进行分析。因此，我们将要讨论的图与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图形等是不同的。

**定义 1.1.1**　图

设点集 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，边集 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_e\}$，如果对任一边 $e_k \in E$，有 $V$ 中一个点对 $(v_i, v_j)$ 和它对应，则称由 $V$ 和 $E$ 组成的集体为一个图。记为 $G=(V, E)$。点 $v_i$ 和 $v_j$ 称为边 $e_k$ 的端点。称点 $v_i$ 或 $v_j$ 与边 $e_k$ 彼此关联，而称 $v_i$ 和 $v_j$ 彼此相邻。如果两条边 $e_1$ 和 $e_2$ 关联相同的点，则 $e_1$ 和 $e_2$ 称为相邻边。显而易见，关联是指不同元素之间的关系，相邻是指相同元素之间的关系。

**定义 1.1.2**　自环

两端点重合为一点的边称为自环。

**定义 1.1.3**　并行边

如果两条或更多条边与同一对端点关联，则这些边称为并行边。

**定义 1.1.4**　简单图

既无自环又无并行边的图称为简单图。

**定义 1.1.5**　有向图与无向图

如果图中点对 $(v_i, v_j)$ 是有序的，即边 $(v_i, v_j)$ 与 $(v_j, v_i)$ 是 $E$ 中不同的元素，则此图称为有向图。否则，称为无向图。在有向图中，边的方向用箭头表示，对有向边 $(v_i, v_j)$ 而言，点 $v_i$ 是起点，点 $v_j$ 是终点。

**定义 1.1.6　有限图和无限图**

如果 $V$ 和 $E$ 均为有限集，则称 $G=(V, E)$ 为有限图。否则，称为无限图。我们只讨论有限图，以后凡提到图，均指有限图。

**例 1.1.1**　设 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1, v_2, v_3\}$。$E=\{a, b, c, d, e, f\}$。如图 1.1.1 所示。边 $a$ 和 $f$ 都是自环，边 $c$ 和 $d$ 是并行边，同样边 $a$ 和 $f$ 也是并行边。这是无向图。如果在图的各边上添加用箭头表示的方向，则得一有向图。如图 1.1.2 所示。

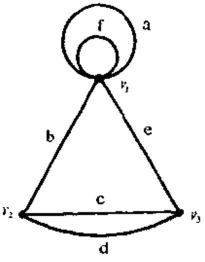


图 1.1.1

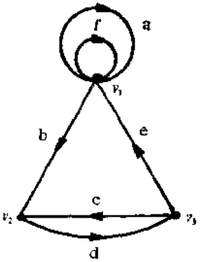


图 1.1.2

**定义 1.1.7　点的次数（度）**

与一个点 $v_i$ 关联的边的数目称为 $v_i$ 的次数，或称为 $v_i$ 的度（若 $v_i$ 上有一个自环，自环对 $v_i$ 提供的次数为2），记为 $d(v_i)$。例如图 1.1.1 中 $d(v_1)=6$，$d(v_2)=3$。$d(v_3)=3$。若

$d(v_i)$是偶数（包括零），则点 $v_i$ 称为偶点，例如图1.1.1中点 $v_1$是偶点。若 $d(v_i)$ 是奇数，则点 $v_i$ 称为奇点，例如图1.1.1中点 $v_2$ 和 $v_3$ 是奇点。

因为每一条边对点提供的次数都是 2，所以图中所有点的次数的总和是边数的 2 倍，即

$$\sum_{i=1}^{n_v} d(v_i) = 2n_e \tag{1.1.1}$$

式中 $n_v$ 为图 $G$ 的点数，$n_e$ 为图 $G$ 的边数。

**定理 1.1.1** 一个图中奇点的数目总是偶数。

**证明**：设 $V_1$ 和 $V_2$ 分别是图 $G$ 中的奇点集和偶点集，由等式（1.1.1），可得下式：

$$\sum_{v_i \in V_1} d(v_i) + \sum_{v_i \in V_2} d(v_i) = \sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2n_e$$

式中 $2n_e$ 是偶数，$\sum\limits_{v_i \in V_2} d(v_i)$ 也是偶数，所以 $\sum\limits_{v_i \in V_1} d(v_i)$ 也必为偶数。由于 $\sum\limits_{v_i \in V_1} d(v_i)$ 中每一项 $d(v_i)$ 为奇数，故它的项数必为偶数，即奇点数必为偶数。

**例 1.1.2** 在一次集会中，与别人握手次数为奇数的人数必定是偶数。

如果用点表示人，用边表示两人互相握手，于是得到一个图，这个图就是描述集会中握手的数学模型。握手次数为奇的人对应于图中的奇点。由定理 1.1.1 可知，他们的数目必定是偶数。

**定义 1.1.8 正则图**

如果图中各点的次数相等，则该图称为正则图。

**定义 1.1.9 孤立点、悬挂点和悬挂边**

如果 $d(v_i)=0$，即没有任何边与 $v_i$ 关联，点 $v_i$ 称为孤立点。

如果 $d(v_i)=1$，即点 $v_i$ 只与一边相关联，则点 $v_i$ 称为悬挂点。与悬挂点关联的边，称为悬挂边。

**定义 1.1.10** 平凡图和空图

只有一个点的图称为平凡图。没有任何边的图称为空图，记为 $\phi$。

**定义 1.1.11** 完全图

如果图中任意两点间恰有一条边，则称该图为完全图。

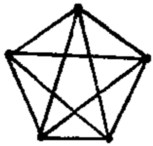


图 1.1.3

显然，完全图的性质由它的点数完全决定。图中点的个数称为图的阶，$n$ 阶完全图记作 $K_n$。图 1.1.3 所示的图是一个 5 阶完全图。

**定理 1.1.2** $n$ 阶完全图有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边。

**证明**：因为完全图中任意两点之间恰有一条边，所以图中每点次数为 $(n-1)$，$K_n$ 中所有点的次数总和是 $n(n-1)$，由式 (1.1.1) 得

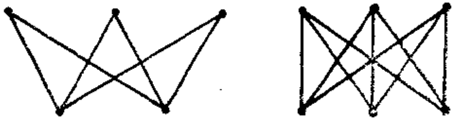
$$n_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=\frac{1}{2}\,n(n-1)$$

**定义 1.1.12** 二部图

如果图 $G$ 的点集 $V$ 被分成两个子集 $X$ 和 $Y$，并只允许 $X$ 中的点与 $Y$ 中的点间有边相联，则图 $G$ 称为二部图，记为 $G=(X,Y;E)$。图 1.1.4 所示的图是一个二部图。

$X$ 中的每个点与 $Y$ 中的每个点都有边相联的简单二部图称为完全二部图。若 $|X|=m$，$|Y|=n$（符号 $|A|$ 表示集合 $A$ 中的元素个数，则这样的图记作 $K_{m,n}$。图 1.1.5 的 $(a)$，$(b)$ 分别是

图 1.1.4



(a) $K_{3,2}$　　　　(b) $K_{3,3}$

图 1.1.5

$K_{3,2}$ 和 $K_{3,3}$ 的图形。

例 1.1.3　一个人带着猫、鸡和米从河的左岸渡到河的右岸，船只有一只，并且只有人能划船，每次人只能带一件东西过河，猫和鸡、鸡和米不能在无人监视的情况下放在一起，问应怎样渡河才能把猫、鸡、米都运过去？

解：在河左岸允许出现的情况有 10 种，即，人猫鸡米，人猫鸡，人猫米，人鸡米，人鸡，猫米，猫，米，鸡，0（人、猫、鸡、米都在右岸）

"人猫"、"人米"等情况在左岸不可能出现，因为这时右岸的情况是"鸡米""猫鸡"，这是不允许出现的。

将每一种情况用一个点表示，如果某次船从左岸划往右岸时，左岸的情况由 $v_i$ 变为 $v_j$，我们就作一条从 $v_i$ 到 $v_j$ 的边。这样就得到一个图 $G$，如图 1.1.6 所示。

船是在左右两岸间往返的，我们的问题已经转化成从图 $G$ 中找一条从左岸初始状态"人猫鸡米"到同岸上的"0"状态之间

的一条路径。这样的路径是很容易找到的，图 1.1.6 中粗线所示的就是一个解。另一个解请读者自己找。

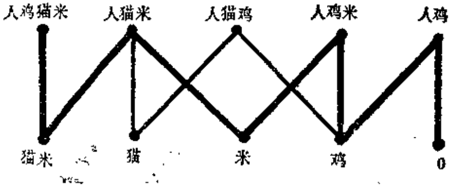



图 1.1.6

## §1.2 子　图

在研究和描述图的性质以及图的局部结构中，子图的概念占有重要的地位。这一节先介绍子图的概念，然后引进了一个标记图$K_n$的子图数目计数公式。

**定义 1.2.1　子图和真子图**

若一图 $G_i$ 的所有点和边都属于一个图 $G$，且 $G_i$ 的每一条边的端点正是 $G$ 中的同一端点，则称 $G_i$ 是 $G$ 的子图，记为 $G_i \subset G$。

例如，图 1.2.1 中$(b)$是$(a)$的子图。

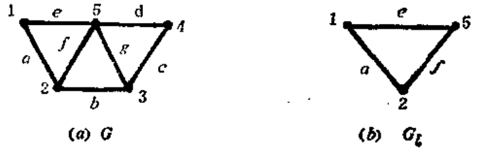



图 1.2.1