普通物理学讲义

第三册

王殖东　阎金铎　李　椿　编

中央广播电视大学出版社

普遍物理学讲义
第三册
王殖东　阎金铎　李　椿　编
*
中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 12.125　千字 252
1984年5月第1版　1984年10月第1次印刷
印数　1—190,000
书号：13300·11　定价：1.10元

目　录

第四篇　波动光学

第四篇　波 动 光 学

第十五章　波动学基础

波动是振动状态的传播过程。由于振动可以分为两大类，一类叫机械振动，一类叫电磁振动(电磁振荡)，所以相应的波也分为机械波和电磁波两大类。机械波要在媒质中才能传播，如声波、水面波等；电磁波不仅可以在机械媒质中传播，也可以在真空中传播，如光波、无线电波等，它们是交替变化着的电场和磁场在空间中的传播。由于电磁波比较抽象，而机械波比较直观，因此在讲波动学基础时，为了便于学习，我们以机械波为例，所得的许多结论不仅适用于机械波，也适用于电磁波。

§15-1　机械波及波的一些基本概念

在第四章中，我们已经学习了机械振动。在本章中，我们要在机械振动的基础上，进一步学习这种振动在媒质中的传播过程。众所周知，机械振动在媒质中的传播就形成机械波动。我们现在观察一个实验。如图 15-1 所示，把一根长而软的弹簧水平悬挂起来，在弹簧的一端施加一个水平的周期

图 15-1

性外力，弹簧的这一端就开始了振动，而这个振动状态能沿着弹簧向前传播，在弹簧上形成疏密相间的波形。

除去上述常见的模式而外，大家还熟悉弦上传播的一种波。我们取一根无限长的弦，因而不需要考虑波在弦的末端会发生什么情况。如图 15-2 所示，把弦的始端系在一个振动的弹簧片上，使其上下振动，则看到弦上有波形传播开去。

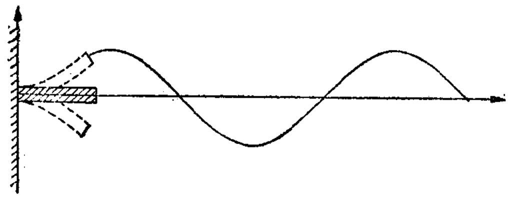

图 15-2

物理学是一门实验科学，物理学的研究方法中最简单、最基本的手段就是观察，因此有意识地锻练观察能力，是很有必要的。现在请大家仔细地观察横波演示器，将会发现，在波向前传播时，媒质中的各质点都在平衡位置附近作周期性振动，只不过在同一时刻，各质点的振动位相不同而已(如图 15-3)。机械波传播的不是媒质本身，而是振动状态。

机械波按传播方向和振动方向间的关系来分，可以分为两大类：一类是媒质中质点的振动方向和波的传播方向相平行，譬如声波，这类波称作纵波；另一类是媒质中质点的振动方向和波的传播方向相垂直，譬如，当我们上下抖动一根橡皮绳时，沿绳上传播的波，这类波称作横波。

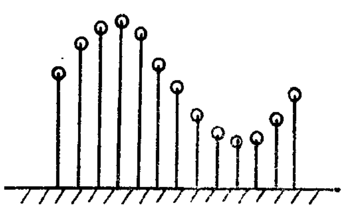

图 15-3

既然波动是振动在媒质中的传播，那么很清楚，要产生一个波动，必须要有两个条件：一个条件是必须要有一个产生振动的物体，称作波源，比如扬声器发声时，它的膜片振动，这个膜片就是一个波源。另一个条件是必须要有振动籍以传播的媒质。譬如在飞船外行走的宇航员是听不到声音的，因为太空中没有声音籍以传播的媒质。

在振动中，我们已经学过简谐振动的概念。如果波源作简谐振动，那么这种振动在媒质中传播时，媒质中的各点也作与此同频率的振动，这样的波就称作简谐波。在此着重指出一下，简谐波是一个很重要的概念，它的重要性就在于它是一种最简单的波动，任何复杂的波动都可以分解为若干个（或无穷个）不同的简谐波，只要我们掌握了简谐波，其他任何复杂的波也就不难掌握了。

我们知道，作简谐振动的物体，它的运动轨迹一般地讲是一条直线或一条弧线，因而是一个一维的问题。而简谐波研

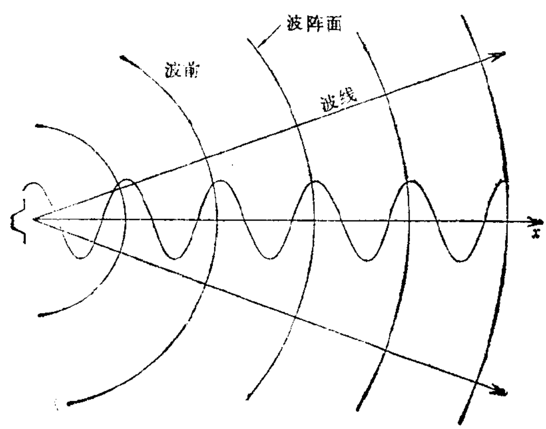

图 15-4

究的是振动在空间的传播，所以通常是一个三维的问题。为了形象地描述波在传播过程中各振动质点之间在位相上的关系，我们引进波阵面的概念。首先选定波源在某一时刻 t 的振动周相，然后考虑这一振动周相在媒质中是如何向各个方向传播的。显然，到 $(t+\Delta t)$ 时刻，这个振动周相正传达到波源周围的一些点上，由这些点联成的面，便称为波阵面，换言之，波阵面是指具有相同的振动周相的那些点的轨迹，如图 15-4 所示。很显然，在任一时刻，前进着的波有无穷多个波阵面，因为它有无穷多个不同的周相。这些波阵面随时间向前运动。例如一个喇叭在发声时，在它周围的空气中就形成疏密相间的密度分布（如图 15-5 的上部所示），因而使某些地方的压强高于原来的大气压强 p_0，某些地方低于 p_0。所以由扬声器发送出去的声波，是由空气中的高压区域和低压区域交替构成的。实际上，压强 p 仅只有约万分之一的变化。如果在某一时刻以空间位置 x 为横坐标，压强 p 为纵坐标作图，我们就得到图 15-5 下部的曲线。在那些压强最高的位置

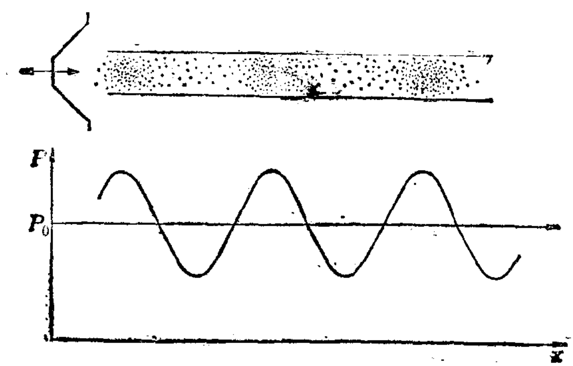

图 15-5

和那些压强最低的位置分别表示不同的振动周相，形成不同的波阵面，在压强最大值和最小值之间还有无数个不同数值的压强，对应着不同的周相，构成无数个不同的波阵面。

最简单而又最有用的波阵面有球面和平面两种。一个点波源产生的振动在各向同性的介质中向各个方向传播的情况是一样的，这个波的波阵面是一组同心球面，但在距波源很远的地方，球面的半径变得很大，就球面上某一个局部的小区域而言，它实际上就是一个平面了。我们把波阵面是平面的波动称为平面波，波阵面是球面的波动称为球面波。波的传播方向称为波射线或简称波线。在各向同性的媒质中，波线恒与波阵面垂直，平面波的波线是垂直于波阵面的平行直线，球面波的波线是以波源为中心，从中心向外的径向直线，如图 15-4 所示。

下面介绍描述波的特性的几个物理量：

波长：波线上相邻的位相差为 2π 的两点间的距离称作波长，通常用字母 λ 表示。例如，在横波的情况下，波长等于波线上相邻两个振动极大或相邻两个振动极小间的距离；在纵波的情况下，波长等于在波线上的相邻两个密部中心间距，或相邻两个疏部中心间距。由此可见，沿波的传播方向上，每隔一个波长 λ，振动状态就重复出现一次。因此，可以说，波长描述了波在空间上的周期性。

周期：波源传播出一个完整的波形所需要的时间称作周期，它也表示一个完整的波形通过波线上任一固定点所需的时间，通常用 T 表示。由此可见，每隔一段时间 T，振动质点的周相就重复出现一次，所以周期 T 描述了波在时间上的周

期性。

频率：周期的倒数称作频率，通常用希腊字母 ν 表示，$\nu=\frac{1}{T}$ 。

波速：单位时间内振动所传播的距离称作波速，通常用英文字母 v 表示。波速实际上是一定的位相传播的速度，因此，波速又称相速。按照定义，一定的振动位相于时间 T 内在空间传播的距离是 λ，所以相速

$$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu \tag{15-1}$$

这个公式把波在时间上的周期性和空间上的周期性联系起来了。

§15-2 行波的波动方程

在无边界的介质中前进着的波称作行波，行波具有输送能量和动量的重要特性。下面我们讨论如何用数学表达式来描述这个行波，亦即如何用数学函数式来描述媒质中各质点的位移是怎样随着各质点的平衡位置和时间而变化的，这个数学表达式就称作波动方程。

我们从两个不同的角度来讨论这个问题。

1．从动力学观点导出平面波波动方程

为简单起见，我们只讨论一维的情况。

如图 15-6 所示，取一根固体细长棒，其横截面积为 S，密度为 ρ，取沿棒向右的方向为 x 正方向，建立坐标系。在棒中任一位置 x 处取一个 ab 段小体元，它的长度为 Δx，体积 $\Delta V=Sdx$。设想有一列纵波穿过它，它的两个端面将受到力的作用，单位横截面上所受的外力称作胁强，用

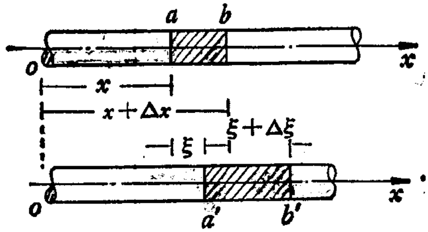

图 15-6

σ 表示。在某一时刻, a 端所受的胁强为 σ, 方向向左, b 端所受的胁强为 $\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx$, 方向向右, 这里 $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ 表示 σ 随 x 的变化率, 取偏导数是因为 σ 在这里是一个多元函数。这样, ab 段所受的合外力即为

$$-\sigma S+\left(\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx\right)S=\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx\cdot S$$

根据牛顿第二定律, 体元 dV 的质量为

$$dm=\rho dv=\rho Sdx$$

体元的加速度为

$$a=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

式中 ξ 表示该体元的位移, 所以我们有

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx\cdot S=\rho Sdx\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

即
$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\tag{15-2}$$

为了进一步推导波动方程, 我们利用弹性力学中的胡克定律: 胁强和胁变之比等于材料的杨氏弹性模量, 用数学公式表示为

$$\frac{\sigma}{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}=Y$$

式中 $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ 是体元的胁变, 它表示体元单位长度的长度变化, Y 是细棒的

杨氏弹性模量。因此

$$\sigma=Y\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

将它代入式(15-2)，即得到

$$Y\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

或写成

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{Y/\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

令

$$v=\sqrt{Y/\rho} \tag{15-3}$$

我们有

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{15-4}$$

方程(15-4)就是在细长棒中传播的平面纵波的波动方程，它是一个二阶偏微分方程，按偏微分方程的理论，式中 v 就是在该棒中纵波传播的速度，证明从略。

除了上面推导的沿细长棒传播的纵波波速公式(15-3)以外，下面再给出几个工程上常用到的波速公式，这些内容在练习题中也会遇到。

在无限大均匀各向同性的固体介质中传播的横波，其波速为

$$v=\sqrt{G/\rho} \tag{15-5}$$

式中 G 是介质的切变弹性模量，ρ 是媒质的体密度。

在张紧的弦上传播的横波，其波速为

$$v=\sqrt{T/\mu} \tag{15-6}$$

式中 T 是弦上的张力，μ 是弦线的线密度。

在液体或气体中传播的纵波，其波速为

$$v=\sqrt{B/\rho} \tag{15-7}$$

式中 B 是介质的容变弹性模量，ρ 是介质的体密度。

2. 从运动学观点导出平面波波动方程

假设有一平面波在无边界的媒质中传播，且介质不吸收波的能量。为简单起见，我们也只讨论一维的情况，并取 X 轴为传播正方向，如图 15-7 所示。设 O 点作简谐振动，其振动

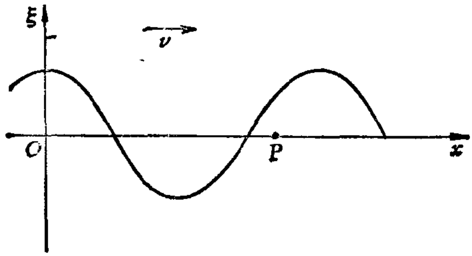

图 15-7

方向可以垂直 X 轴，也可以平行 X 轴，其振幅为 A，角频率为 ω，用 ξ 表示振动的位移，则 O 点的振动方程应该是

$$\xi_o = A\cos\omega t \tag{15-8}$$

O 点的振动周相以相速 v 沿 X 轴传播。在 X 轴上有一点 P，设 $OP=x$，那么 O 的周相传到 P 点需要一段时间 $\Delta t=\dfrac{x}{v}$，因此 P 点的周相落后于 O 点。确切地讲，如果在 t 时刻 O 点的周相为 ωt，那么，要经过一段时间 Δt 以后，P 点才能获得这个周相，或者说，在 t 时刻，P 点的周相是 $(t-\Delta t)$ 时刻 O 点的周相，因此 P 点的振动方程即为

$$\begin{aligned}\xi_P &= A\cos\omega(t-\Delta t)\\ &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\end{aligned}$$

因为 P 点为任取的一点，所以我们可以去掉脚标 P，而把

波动方程写成

$$\xi = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{15-9}$$

由于 ω、T、λ、v、ν 之间有一定的关系，所以方程(15-9)有着几种不同的表达法：

$$\begin{aligned}\xi &= A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ &= A\cos 2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (15\text{-}10)\\ &= A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\end{aligned}$$

方程(15-9)是我们讨论许多问题的基本出发点. 大家一定要确切地理解它，熟练地掌握它，应用它。

下面为了帮助大家能更好地、形象地理解波动方程(15-9)，我们来看图 15-8。

大家知道，一个谐振动可以用一个旋转矢量来表示。设波源做谐振动，振幅为单位 1，周期为 24 秒。图 15-8 左半部

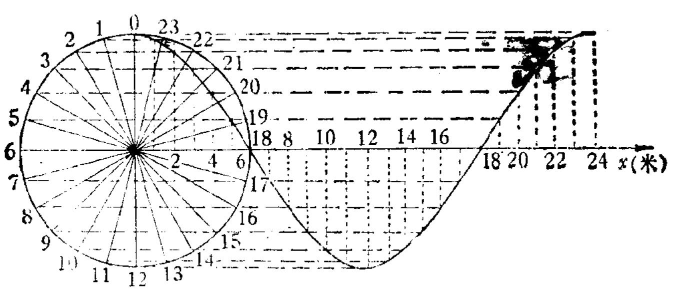

图 15-8

的圆周表示了描述这个振动的参考圆。在 $t=0$ 到 $t=24$ 秒的

这段时间内，旋转矢量 $\boldsymbol{OA}$ 以角速度 $\omega=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 旋转，波源在各时刻的位移由 $\boldsymbol{OA}$ 在纵轴上的投影来表示。图中右部的曲线表示在 $t=24\ \mathrm{s}$ 这一时刻的波形图。这个图是这样绘制的：设波速 $v=1\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，我们看到，在 $t=0\ \mathrm{s}$ 时，波源的周相 $\omega t=0$，振幅 $A=1$，经 24 秒后，这个周相传到 $x=vt=24\times1=24\ \mathrm{m}$ 处，因此在 $x=24\ \mathrm{m}$ 处，位移为1。在 $t=2\ \mathrm{s}$ 时，波源的周相 $\omega t=\pi/6$，$A=\sqrt{3}/2$，到 $t=24\ \mathrm{s}$ 这一时刻，这个周相传播的时间 $t=24-2=22\ \mathrm{s}$，因此，传播的距离 $x=vt=22\times1=22\ \mathrm{m}$，所以在 $x=22\ \mathrm{m}$ 处质点的位移等于在 $t=2\ \mathrm{s}$ 时刻原点的位移，即 $\sqrt{3}/2$。在 $t=6\ \mathrm{s}$ 时，$\omega t=\pi/2$，$A=0$，到 $t=24\ \mathrm{s}$ 这一时刻，这个周相传播的时间为 18 秒，通过的距离为 18 米，因此在 $x=18\ \mathrm{m}$ 处，位移为零，以此类推，我们就得到了图中的余弦曲线。

下面我们对波动方程的物理意义作进一步的分析。

1. 从方程(15-9)可见，对于给定的位置 x_0，有

$$\xi_0=A\cos\omega(t-x_0/v)$$

由于式中 x_0 是一个给定的常数，所以方程是单个变量 t 的函数，它描述了给定点 x_0 的振动情况，作 ξ_0-t 曲线，我们得到的是一条描述 x_0 点振动的振动曲线。

2. 对于给定的时刻 t_0，

$$\xi=A\cos\omega(t_0-x/v)$$

式中 t_0 为给定的常数，所以方程是单个变量 x 的函数，它描述了给定时刻波线上各点的位移，作 $\xi-x$ 曲线，我们得到的是该时刻的波形曲线。对于横波，这个曲线和真实波形一致，对于纵波，它和真实波形不同。

3. 如果 x 和 t 都变化，方程(15-9)是一个二元函数，它描述的是一个沿 x 正方向传播的波动。

假定某一时刻 t，波形图如图 15-9 中曲线 a 所示，设某

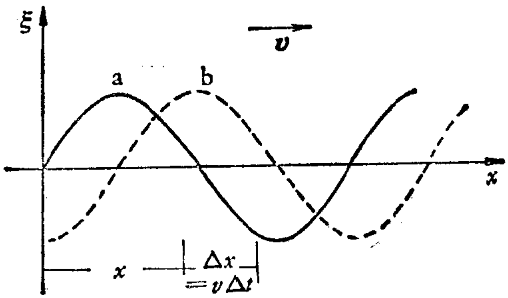

图 15-9

点 x 的位移 $\xi_x = A\cos\omega(t-x/v)$，经过一段时间 Δt 以后，x 点的位相传到 $(x+v\Delta t)$ 点，因此在 $(t+\Delta t)$ 时刻，$(x+v\Delta t)$ 点的位移

$$\begin{aligned}\xi' &= A\cos\omega[t+\Delta t-(x+v\Delta t)/v]\\ &= A\cos\omega(t-x/v)\\ &= \xi_x\end{aligned}$$

由此可见，在波动过程中，在 t 时刻 x 点的位移与 $(t+\Delta t)$ 时刻 $(x+v\Delta t)$ 点位置处的位移相同，即后者重复前者前一时刻的位移和状态，说明在 Δt 时间内，整个波形传播了一段路程 $\Delta x = v\Delta t$。因此，我们看到的现象是波形在传播，其反映的物理本质是位相在传播。

4. 值得大家注意的是，要把相速度 v 和质点振动的速度 v_p 相区别。相速度的大小是由媒质本身的性质所决定的，和