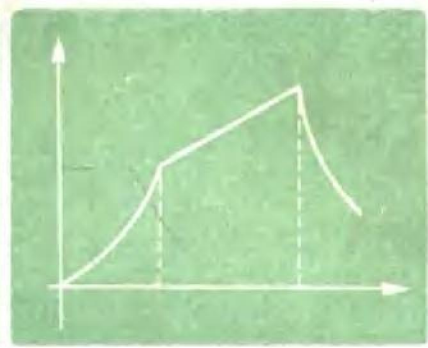
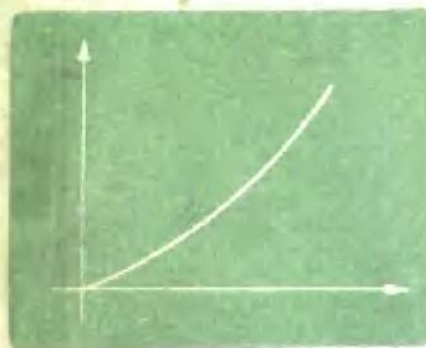
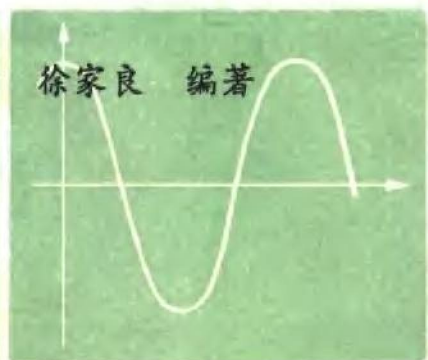
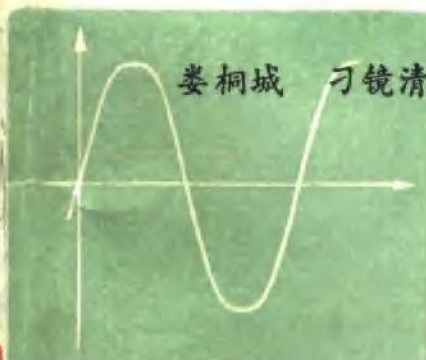
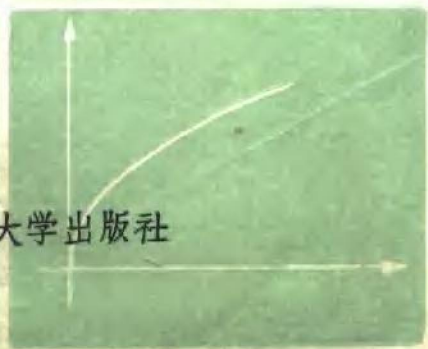
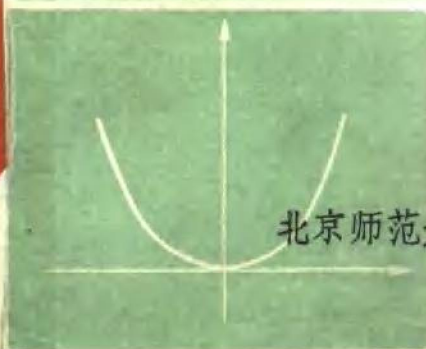




函数的性质及其解题方法



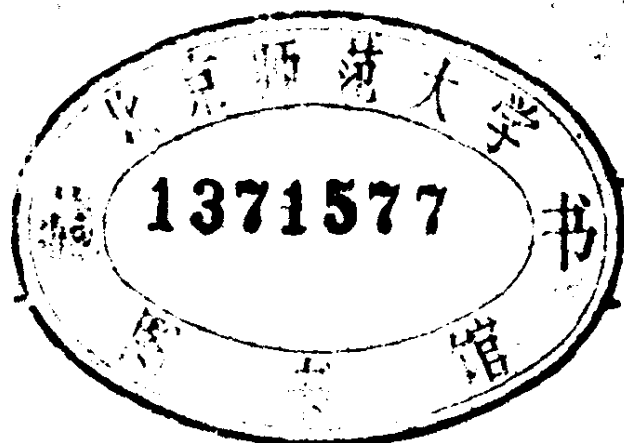
姜桐城 刁镜清 徐家良 编著



北京师范大学出版社

函数的性质及其解题方法

娄桐城 刁镜清 徐家良 编



北京师范大学出版社

函数的性质及其解题方法

娄桐城 刁镜清 徐家良 编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

顺义牛栏山印刷厂印刷

•

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 11.25 字数: 238 千

1986 年 2 月第 1 版 1986 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—13,000

统一书号: 7243·359 定价: 1.55 元

内 容 提 要

本书从初等函数的定义域、值域、函数值与函数符号、增减性、奇偶性、极值、周期等几个方面，简要叙述了初等函数的基本性质。重点介绍利用函数性质解题的一般方法和技巧，并总结其规律。每节配有适量的练习题，书后附有答案，是中學生、自學者进行复习总结和中学教师进行教学的极好参考书。

前 言

全书共分七章，从七个方面叙述函数的基本性质。重点介绍利用函数的性质解题的一般方法和技巧。

书中理论部分简明扼要，例题部分由浅入深，循序渐进。在解题过程和格式方面，注意到基本要求和基本功的训练，注意到基本技能和技巧的启发和培养，同时对于解题方法、思路以及注意事项作了小结。对于疑难问题采取了多种解题方法，从不同角度进行分析对比，训练解题的思考方法和解题能力。

全书配备习题 400 多个，为方便读者，本书对于全部习题作了详细提示或答案供参考。

由于我们水平所限，有些问题的解法可能拙劣，以至差错，欢迎读者批评指正。

李秀舫协助全书制图，在此表示感谢。

编者

目 录

第一章 函数定义域的求法	1
一、整式函数的定义域	1
二、分式函数的定义域	1
三、无理函数的定义域	2
四、对数函数的定义域	4
五、三角函数的定义域	5
六、反三角函数的定义域	6
七、幂函数的定义域	7
第二章 函数值域的求法	14
一、利用反函数求值域	14
二、利用二次函数的极值求值域	15
三、利用判别式求值域	16
四、利用不等式求值域	18
五、利用配方法求值域	19
六、含三角函数的函数值域的求法	20
七、含反三角函数的函数值域的求法	21
第三章 函数值的求法	25
一、函数值的计算	25
二、函数符号的变化	54
第四章 函数的奇偶性	73
一、用定理判断函数的奇偶性	73
二、用定义判断函数的奇偶性	77
第五章 函数的单调性 (增减性)	86

一、怎样判断函数的单调性	86
二、怎样求函数的单调区间	92
三、利用函数的增减性解题	103
第六章 函数的极值	115
一、利用二次函数求极值	116
二、利用判别式求极值	136
三、利用不等式求极值	159
四、利用配方法求极值	176
五、利用三角函数求极值	185
六、利用导数求极值	201
七、线性函数的极值问题	216
第七章 函数的周期性	226
一、函数周期的定义	226
二、函数周期的求法	226
答案与提示	232

第一章 函数定义域的求法

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y ，如果对于某一范围内的 x 的每一个确定的值，按照某个对应关系， y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就叫做 x 的函数， x 叫做自变量。

函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 所取的一切值的集合，叫做这个函数的定义域。

对于用数学解析式表示的函数来说，通常把式子中所有运算都能实行的那些自变量值的集合，叫做这个函数的定义域。这样的定义域又叫做自然域或存在域。

因此对于用解析式表示的函数，在确定其定义域时，关键是要看解析式中包含有什么样的运算，以此便可确定自变量 x 允许值的范围。

一、整式函数的定义域

整式函数 $y=f(x)$ 的定义域为一切实数，例如 $y=2x-3$ 和 $y=3x^2-2x+5$ 的定义域都是一切实数。

二、分式函数的定义域

用分式表示的函数 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域的求法，可以由 $g(x) \neq 0$ 解出 x 值来。即其定义域是使分母的值不为零的所有实数。

例 1 求函数 $y = \frac{5-x}{2x+3}$ 的定义域。

解: 由 $2x+3 \neq 0$ 得 $x \neq -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $x \neq -\frac{3}{2}$ 的一切实数。

例 2 求函数 $y = \frac{4}{x^2-2x-15}$ 的定义域。

解: 由 $x^2-2x-15 \neq 0$ 得 $(x+3)(x-5) \neq 0$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $x \neq -3$ 或 $x \neq 5$ 的一切实数。

例 3 求函数 $y = \frac{15}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ 的定义域。

解: 由
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0, \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $x \neq 0, x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$ 的一切实数。

三、无理函数的定义域

用无理式表示的函数 $y = \sqrt[n]{f(x)}$ 的定义域的求法:

(1) 当 n 为奇数, 且 $f(x)$ 表示整式时, x 为任何实数;

(2) 当 n 为偶数时, 由不等式 $f(x) \geq 0$ 解出 x 的范围来。

例 1 求函数 $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$ 的定义域。

解: 由 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $x \geq 3$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$ 的一切实数。

例 2 求函数 $y = \sqrt{-5 + 2x - x^2}$ 的定义域。

解: 由 $-5 + 2x - x^2 \geq 0$, $x^2 - 2x + 5 \leq 0$ 。

而 $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$,

$\therefore$ 函数的定义域为空集 ϕ 。

例 3 求函数 $y = \sqrt{-(x-a)^2}$ 的定义域。

解: 由 $-(x-a)^2 \geq 0$, 可以看出只有 $(x-a)^2 = 0$ 。

$\therefore x = a$, $\therefore$ 函数的定义域为 $x = a$ 。

例 4 求函数 $y = 3\sqrt{x-1} + 12\sqrt{2-x}$ 的定义域。

解: 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2, \end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $1 \leq x \leq 2$ 。

例 5 求函数 $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域。

解: 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \\ x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1,$

$\therefore$ 函数的定义域为 $x = 1$ 。

例 6 求函数 $y = \sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}$ 的定义域。

解: 解不等式 $(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0$ 。

设 $u(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$ 。

	$x \leq 2$	$2 \leq x \leq 3$	$3 \leq x \leq 4$	$x \geq 4$
$x-2$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
$u(x)$	-	+	-	+

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $2 \leq x \leq 3$ 或 $x \geq 4$ 。

四、对数函数的定义域

对数函数 $y = \log_a f(x)$ (其中 $a > 0$ 但 $a \neq 1$) 的定义域的求法, 由不等式 $f(x) > 0$ 解出 x 的范围来。

例 1 求函数 $y = \lg \lg x$ 的定义域。

解: 由
$$\begin{cases} \lg \lg x > 0 \\ \lg x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x > 1 \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases},$$

$\therefore x > 10$

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $x > 10$ 。

例 2 求函数 $y = \log_{2x+1}(32-4^x)$ 的定义域。

解: 由
$$\begin{cases} 32-4^x > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} < 2^5 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases},$$

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$, 但 $x \neq 0$ 。

例 3 求函数 $y = \lg(3^x - 9) + \frac{1}{|x| - 3}$ 的定义域。

解: 由 $\begin{cases} 3^x - 9 > 0 \\ |x| - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 3^2 \\ |x| \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Rightarrow x > 2,$

但 $x \neq 3$,

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $x > 2$ 但 $x \neq 3$ 。

例 4 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+8}}{1 - \log_{\frac{1}{3}}(1-x)}$ 的定义域。

解: 由 $\begin{cases} x+8 \geq 0 \\ 1-x > 0 \\ 1 - \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \neq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ x < 1 \\ 1-x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ x < 1 \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $-8 \leq x < 1$, 但 $x \neq \frac{2}{3}$ 。

五、三角函数的定义域

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域都是一切实数;

(2) 函数 $y = \operatorname{tg} f(x)$ 的定义域可由 $f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in J$) 解出;

(3) 函数 $y = \operatorname{ctg} f(x)$ 的定义域可由 $f(x) \neq k\pi$ ($k \in J$) 解出。

例 1 求函数 $y = \operatorname{tg}(x-1)$ 的定义域。

解: 由 $x - 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + 1 (k \in J)$,

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + 1 (k \in J)$ 。

例 2 求函数 $y = \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 的定义域。

解: 由 $x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$ 解得 $x \neq k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in J)$ 。

六、反三角函数的定义域

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin f(x)$ 的定义域可由

$|f(x)| \leq 1$ 解出;

(2) 反余弦函数 $y = \arccos f(x)$ 的定义域可由

$|f(x)| \leq 1$ 解出。

例 1 求函数 $y = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-3)}$ 的定义域。

解: 由
$$\begin{cases} x > 0 \\ |x-3| \leq 1 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq x-3 \leq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \\ x \neq 3, \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 y 的定义域为: $2 \leq x \leq 4$ 但 $x \neq 3$ 。

例 2 求函数 $y = \sqrt{3-x} - \lg(2x-3) + \arccos \frac{x-2}{3}$

的定义域。

解: 由
$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \\ \left| \frac{x-2}{3} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{3}{2} \\ |x-2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{3}{2} \\ -1 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 y 的定义域为 $\frac{3}{2} < x \leq 3$ 。

例 3 已知 $2\arccos(x-1) > \pi$, 求 x 的允许值范围。

解: $\because 2\arccos(x-1) > \pi,$
 $\therefore \frac{\pi}{2} < \arccos(x-1) \leq \pi,$
 $\therefore -1 \leq x-1 < 0,$
 $\therefore 0 \leq x < 1.$

七、幂函数的定义域

方幂的指数是无理数或含有变数时, 若使这方幂有意义, 必须使幂的底为正数。

例 1 函数 $y = x^{-\sqrt{3}}$ 的定义域为 $x > 0$ 。

例 2 函数 $y = x^{2x}$ 的定义域为 $x > 0$ 。

例 3 函数 $y = (-7x^2 + 5x + 18)^{\sqrt{2}}$ 的定义域, 由
 $-7x^2 + 5x + 18 > 0 \Rightarrow 7x^2 - 5x - 18 < 0 \Rightarrow -\frac{9}{7} < x < 2.$
 $\therefore$ 函数 y 的定义域为 $-\frac{9}{7} < x < 2.$

习 题 一

1—1. 填表:

	函 数	使函数有意义的实数 x 的范围
(1)	$y = \sqrt{-x^2}$	
(2)	$y = \sqrt{(-x)^2}$	
(3)	$y = \arcsin(\sin x)$	
(4)	$y = \sin(\arcsin x)$	
(5)	$y = 10^{\lg x}$	
(6)	$y = \lg 10^x$	

1—2. 求下列各函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{-x};$$

$$(2) y = \sqrt{|x-2|-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3x+7}};$$

$$(3) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{10}}(\sqrt{x-3}-2)};$$

$$(4) y = (\sqrt{x})^x;$$

$$(5) y = 3^{\sqrt{2x}} + 3^{\sqrt{-2x}};$$

$$(6) y = 2\sqrt{x-1} - \frac{5}{\sqrt{4-x}};$$

$$(7) y = \sqrt{16-x^2} - 3\sqrt{x^2-4};$$

$$(8) y = \sqrt{x^2-7x+12} - \frac{3}{\sqrt[3]{x-4}};$$

$$(9) y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{|x|-1};$$

$$(10) y = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}};$$

$$(11) y = \frac{\sqrt{2-|x|}}{x+1};$$

$$(12) y = \frac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}};$$

$$(13) y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 4;$$

$$(14) y = \frac{1}{x+3} + \sqrt{-x} + \sqrt{x+4};$$

$$(15) y = \sqrt{4+3x-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}};$$

$$(16) \quad y = \sqrt[3]{x} - \sqrt{2}x + \frac{1}{x^2 + 1},$$

$$(17) \quad y = \sqrt{\sqrt[3]{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^x},$$

$$(18) \quad y = \sqrt{\log_2 x - 1},$$

$$(19) \quad y = \frac{\lg(3 + 2x - x^2)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}},$$

$$(20) \quad y = \frac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}.$$

1-3. 求下列各函数的定义域:

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(x-2)}}{2x-5},$$

$$(2) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\lg(x^2 - 3)},$$

$$(3) \quad y = \lg(3x^2 - 4x - 4) + \sqrt{2-x},$$

$$(4) \quad y = \frac{(x+2)\sqrt{4-x^2}}{\lg(x-1)},$$

$$(5) \quad y = \frac{\lg(25-5^x)}{x-1},$$

$$(6) \quad y = \sqrt{2x-10} + \lg(15-x),$$

$$(7) \quad y = \sqrt{2^x - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \log_3 x},$$

$$(8) \quad y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)},$$

$$(9) \quad y = \sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg x}}},$$

$$(10) \ y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}.$$

1—4. 求下列各函数的定义域:

$$(1) \ y = \frac{\sqrt{2x^2-x-1}}{\log_{\sqrt{2}}(x+2)},$$

$$(2) \ y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}},$$

$$(3) \ y = \frac{\sqrt{-x^2+x+2}}{\lg(2-x^2)},$$

$$(4) \ y = \sqrt{\lg(x^2-3x)-1},$$

$$(5) \ y = \log_2 \sqrt{x-4} + \log_3 \frac{1}{x-1},$$

$$(6) \ y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1} + \frac{1}{\lg(2-3x)},$$

$$(7) \ y = \lg \left[\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{x-4} - 3) \right],$$

$$(8) \ y = \lg(1 + \cos x) + \sqrt{4-3x-x^2},$$

$$(9) \ y = (-2x^2-9x+5)^{\sqrt{2}},$$

$$(10) \ y = \lg(3^x-9) + \frac{1}{|x|-3}.$$

1—5. x 取什么值时, 分式

$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{2x^2+x-1} \text{ 无意义? 等于零?}$$

1—6. x 在什么范围内, 等式

$$\sqrt{\log^2_{\frac{1}{3}} x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 1} = \log_{\frac{1}{3}} x - 1 \text{ 成立?}$$