YUNCHOUXUEFANGFAJIQIWEIJISHIXIAN

运筹学方法
及其微机实现

汪遐昌 编

电子科技大学出版社

运筹学方法及其微机实现

汪 遐 昌　　编

电子科技大学出版社

内容简介

运筹问题是要求做出肯定决策的任何问题，运筹学即是对运筹问题进行研究的科学方法，它是现代管理手段的有力工具。本书着重讲述现代管理中使用最广的最优化技术——运筹学方法，阐述运筹学诸分支的数学模型、基本概念、基本理论及其计算方法，同时提供了相应的计算机软件，重点放在用微机处理运筹学的方法，这些方法包括：线性规划、整数线性规划、运载问题、指派问题、网络模型、关键线路法、计划评审技术、动态规划、库存论、排队论、决策/概率论、马尔科夫过程和时间序列预测等。

本书既可作为大专院校教材，也可作为一切管理工作者的参考书，更适合于从事实际工作的工程技术人员。

运筹学方法及其微机实现

汪遐昌　编

*

电子科技大学出版社出版

（成都建设北路二段四号）邮编 610054

成都理工学院印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092　1/16　印张　14.125　字数 335 千字

版次　1996 年 6 月第一版　印次　1996 年 6 月第一次印刷

印数 1—4000 册

中国标准书号　ISBN 7—81043—316—4/TP · 117

定价：14.80 元

序　论

一、发展生产力离不开现代管理

当前，我们国家正在按照邓小平同志关于建设有中国特色的社会主义的理论，一心一意大搞经济建设。这就要求加强现代管理，提高效益，卓有成效地发展社会生产力。所谓管理，就是管理者为了达到某种目标，运用管理职能作用于管理对象，有意识地不断进行有效协调的综合活动过程。加强管理，对于我国实现"四化"具有特殊的重要性。不少国外专家对我国当前工业状况进行考察后，一致认为急需解决的问题，第一是管理，第二是管理，第三还是管理。

现代管理内容，就现代企业来讲，包括计划管理，生产管理，技术管理，质量管理，人事劳动管理，物资管理，成本管理，财务管理等等；宏观社会当然还有现代科学管理，现代教育管理；其实，在现实生活中，每个人均与管理密切相关，起码有一个家庭管理问题。

本书侧重讲现代管理的数学方法。

已经形成的系统工程方法是其中最典型的综合管理方法。系统工程是综合性组织管理技术。它也是本世纪迄今最大的一门科学管理总体方法。它是立足整体统筹全局，把分析与综合、定性与定量结合起来，全面组织管理各系统，使之达到整体效果最佳的管理综合技术。我们讲述的正是系统工程实施中的每个具体步骤均要使用的数学模型的最优化技术——运筹学方法。

二、运筹学的产生和发展

凡是要求做出肯定决策的任何问题均属于运筹问题。虽然，自从有了人，运筹问题就已经存在，可是直到第二次世界大战时才出现运筹学（Operations Research）这一名词，并且形成了现代运筹学的科学方法。

第二次世界大战后，随着大企业的出现，许多企业变成多种经营，更加复杂。因此不得不进行分区管理；同时，又要使企业总的效能达到最优。这就要求用一套科学的组织管理方法。以致本世纪后半期，又出现了以运筹学为中心内容的新的工程技术——系统工程。

运筹学的迅速发展归功于数字计算机的同时发展。例如，线性规划的单纯形法是在1947年由George. B. Dantzig发明的，但是，它却因为现实条件不具备被埋没到50年代中期和末期。计算机帮助了许多运筹方法（时至今日还在应用）的发展和（或）实现。运筹学和计算机紧密相关，因为如果没有计算机，运筹学只不过是一种理论科学，不会象现在这样成为不断发展和成功应用的领域。

本书一方面讲清楚运筹学诸分支的数学模型、基本概念、基本理论、计算方法；同时提供相应的计算机软件，重点放在用计算机处理运筹学的方法。我们的软件基本上能满足实际问

题的需要。

三、运筹学问题的分类

为了分类讲述运筹学问题，我们在目录中罗列了14章，它们几乎包含了生产、生活的各个方面。我们的软件YAJ恰是这些内容：

(1)线性规划
(2)整数线性规划
(3)运载问题
(4)指派问题
(5)网络模型
(6)统筹方法(I)——关键路线法
(7)统筹方法(II)——计划评审技术
(8)动态规划
(9)库存论
(10)排队论
(11)排队系统模拟
(12)决策/概率论
(13)马尔科夫过程
(14)时间序列预测

四、运筹学的数学模型

为了得到问题的最优解，通常更有意义和更方便的是用数学形式将问题写出来。这种数学描述或表达称为问题的数学模型。

许多问题能用一些不同的模型表示；但有一个模型通常比其它的更合适。为此，在过去25年中，已有一批具有适当解法的独特模型为人们所熟悉。例如，线性规划模型、动态规划模型、库存模型、排队模型，已有现成的解法。任何一个运筹方案的目标是要决定手边问题的最合适的数学模型，然后，或者用已有方法去解，或者发展新的解法。

有可能无法为给定的问题建立数学模型；或者，虽可建立模型，但求解困难(比如无现成方法可运用，需要计算机存储量太大，或上机时间太长等等)。对于这种情况，就用直观法或试探法去解(例如，Hungarian method 求解资源分配问题)。此外，我们还可以求助仿真研究复杂的大系统。

本书是针对大家熟悉的数学模型的大多数解法，给出计算机算法，读者可以得到各种各样问题的解及其分析，以提高求解问题的能力。

五、本书的适用范围

最先考虑的自然是从事实际工作的工程技术人员，他们可以用这些理论和方法去解决与之有关的最优化问题。

本书对于一切运用运筹学知识的人都是适用的，这包括一切管理人员、企业家、经济活动家、商业经营者等等。他们不必去深究运筹学的理论，只要按照书中介绍的方法操作，就可以得到满意的结果。

自然，本书也适合那些正在研究和学习应用数学知识特别是运筹学知识的大专院校师生。

此外本书提供了一个优秀的计算机应用软件，所以本书对于微机应用人员也是一本难得的参考书。

目　　录

序　论

第一章　线性规划……………………………………………………………………（1）

1.1　问题和模型 ………………………………………………………………（1）

1.2　线性规划问题解的性质 …………………………………………………（4）

1.3　单纯形方法 ………………………………………………………………（9）

1.4　对偶线性规划问题………………………………………………………（19）

1.5　参数线性规划和灵敏度分析……………………………………………（26）

1.6　微机操作——调用 YAJ 中,LP 决策支持系统 …………………………（31）

第二章　整数线性规划 ……………………………………………………………（35）

2.1　整数规划的例子…………………………………………………………（35）

2.2　整数规划的解法——分支定界法………………………………………（37）

2.3　微机操作——调用 YAJ 中,IP 决策支持系统 …………………………（44）

第三章　运载问题 …………………………………………………………………（50）

3.1　例题和模型………………………………………………………………（50）

3.2　求解平衡问题的表上作业法……………………………………………（50）

3.3　微机操作——调用 YAJ 中,TRP 决策支持系统 ………………………（52）

3.4　不平衡运输问题…………………………………………………………（55）

第四章　指派问题 …………………………………………………………………（57）

4.1　例题和模型………………………………………………………………（57）

4.2　匈牙利法…………………………………………………………………（57）

4.3　微机操作——调用 YAJ 中,ASMP 决策支持系统 ……………………（60）

4.4　对象与活动数目不等情形的指派问题…………………………………（62）

第五章　网络模型 …………………………………………………………………（64）

5.1　基本概念…………………………………………………………………（64）

5.2　最短通路问题……………………………………………………………（67）

5.3　最小树问题………………………………………………………………（71）

5.4　最大流问题………………………………………………………………（72）

5.5　微机操作——调用 YAJ 中,NET 决策支持系统 ………………………（77）

第六章　关键路线法 ………………………………………………………………（81）

6.1　统筹图……………………………………………………………………（81）

6.2　关键路线…………………………………………………………………（84）

6.3　网络参数计算……………………………………………………………（85）

6.4　突击施工分析……………………………………………………………（87）

6.5 微机操作——调用 YAJ 中,CPM 决策支持系统 ……………………… (88)
第七章 计划评审技术 ……………………………………………… (90)
7.1 计划评审技术网络……………………………………………… (90)
7.2 工序的时间估计………………………………………………… (91)
7.3 网络图的时间参数及计算办法………………………………… (92)
7.4 关键路线………………………………………………………… (94)
7.5 事件按期完成的概率…………………………………………… (95)
7.6 微机操作——调用 YAJ 中,PERT 决策支持系统………………… (96)
第八章 动态规划 …………………………………………………… (99)
8.1 最短路线问题…………………………………………………… (99)
8.2 动态规划中的几个名词和符号 ………………………………… (101)
8.3 背包问题 ………………………………………………………… (102)
8.4 生产和库存问题 ………………………………………………… (104)
8.5 结束语 …………………………………………………………… (107)
8.6 微机操作——调用 YAJ 中,DP 决策支持系统…………………… (107)
第九章 库存论……………………………………………………… (115)
9.1 库存论中的几个要素 …………………………………………… (115)
9.2 确定性库存模型 ………………………………………………… (116)
9.3 折扣分析 ………………………………………………………… (121)
9.4 随机性库存模型 ………………………………………………… (122)
9.5 微机操作——调用 YAJ 中,INVT 决策支持系统 ……………… (125)
第十章 排队论……………………………………………………… (128)
10.1 排队论的基本概念……………………………………………… (128)
10.2 顾客到达数的分布和服务时间的分布………………………… (131)
10.3 单服务台的 [$M/M/1$] 模型 ………………………………… (134)
10.4 单服务台的 [$M/G/1$] 模型 ………………………………… (144)
10.5 多服务台的排队模型…………………………………………… (147)
10.6 微机操作——调用 YAJ 中,QUEUE 决策支持系统…………… (149)
第十一章 排队系统模拟…………………………………………… (154)
11.1 模拟概述………………………………………………………… (154)
11.2 伪随机数发生器………………………………………………… (158)
11.3 模拟实例………………………………………………………… (162)
11.4 微机操作——调用 YAJ 中,QSIM 决策支持系统 …………… (164)
第十二章 决策/概率论 …………………………………………… (172)
12.1 决策的概念……………………………………………………… (172)
12.2 确定型决策问题………………………………………………… (173)
12.3 风险型决策问题………………………………………………… (174)
12.4 不确定情况下的决策…………………………………………… (183)
12.5 微机操作——调用 YAJ 中,DSPB 决策支持系统 …………… (186)

第十三章　马尔科夫过程……………………………………………………（192）
13.1　正规随机矩阵………………………………………………………（192）
13.2　马尔科夫链…………………………………………………………（193）
13.3　马尔科夫分析………………………………………………………（196）
13.4　微机操作——调用 YAJ 中,MKV 决策支持系统 ……………………（198）
第十四章　时间序列预测……………………………………………………（201）
14.1　统计预测的一般问题………………………………………………（201）
14.2　平均预测法…………………………………………………………（202）
14.3　趋势预测法…………………………………………………………（205）
14.4　线性回归预测——最小平方法预测………………………………（208）
14.5　预测误差分析………………………………………………………（210）
14.6　微机操作——调用 YAJ 中,TSFC 决策支持系统 …………………（213）
参考文献　…………………………………………………………………（217）
编后记　……………………………………………………………………（218）

第 1 章

线 性 规 划

线性规划(Linear Programming,LP)是目前管理中经常使用而又有成效的优化技术。

线性规划和其它学科一样,也是由于生产力发展的需要,而产生和发展的。随着现代生产的规模越来越大,各部门之间的相互联系越来越密切和复杂,在生产的组织与计划、交通运输、财贸等方面都要求有新的数学方法来为它们服务。因此,早在本世纪 30 年代末 40 年代初,康托洛维奇(Конторвич)和希奇柯克(Hitchcock)等在生产组织和运输问题等方面就开始研究应用线性规划这一数学方法;后来,在 40 年代末又由旦茨基(Dantzig)等人提出了单纯形方法并进一步从理论上给线性规划奠定了基础。

随着计算机的不断发展,计算能力的不断提高,不仅为线性规划方法在经济活动中的广泛应用提供了可能性,而且发展的速度也是很快的。在 1951 年,国际水平只能解约束条件与 10 个方程的线性规划问题,到了 1963 年就能解 1000~10000 个方程的线性规划问题了。另一方面,从时间上看,解一个 67 个方程的线性规划问题,1956 年要一小时,到 1963 年只要 18 秒钟。当然,现在的情形更是大不一样了。

许多问题均可以归结为线性规划问题的模型求解。

1.1 问题和模型

1.1.1 运输问题

设某种物资有 m 个产地:$A_1,\cdots,A_m$;产量分别为 $a_1,\cdots,a_m$(吨)。它们联合供应 n 个销地:$B_1,\cdots,B_n$;销量分别为 $b_1,\cdots,b_n$(吨)。又,从 A_i 到 B_j 单位货物运价为 c_{ij}(元),如表 1.1 所示。

表 1.1

运价(元/吨) 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量(吨)
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
	…			…	
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量(吨)	b_1	b_2	…	b_n	

问应如何调运,才使总运费最少?

解 设从 A_i 运至 B_j 的运量为 x_{ij}(吨)。假定产销平衡 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$,得到问题数学模型:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

这里,min z 表示求 z 的最小值;s.t. 即 subject to (受限于…),后跟约束条件。

1.1.2 布局问题

某生产队要在 $B_1,\cdots,B_n$ 这 n 块地上,种植 $A_1,\cdots,A_m$ 这 m 种作物。各块土地亩数、各种作物计划播种面积以及各种作物在各块地上的单产如表 1.2 所示。问应如何安排种植计划,才使总产量最多?

表 1.2

单产(公斤/亩) 土地 / 播种	B_1	B_2	…	B_n	播种面积(亩)
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
	…			…	
Am	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
土地亩数	b_1	b_2	…	b_n	

解 假定 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$。并设 x_{ij}表示 A_i 作物在 B_j 地上的种植面积。则得数学模型:

$$\max z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

1.1.3 指派问题

设有 n 件工作 $B_1,\cdots,B_n$ 分派给 m 个人 $A_1,\cdots,A_m$ 去做。设 A_i 完成 B_j 的工时为 $c_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$。问应如何分派才使完成全部工作的总工时最少?

解 令

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (B_j \text{ 分给 } A_i) \\ 0 & (B_j \text{ 不分给 } A_i) \end{cases}$$

则得

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1,\cdots,n$$

(每件工作只分派一人去做)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\cdots,m$$

(每人只做一件工作)

$$x_{ij} = 0, \text{或 } 1.\ i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n$$

(每人对每件工作只有做与不做两种情况)

1.1.4 生产组织与计划问题

某工厂用机床 $A_1,\cdots,A_m$ 加工 $B_1,\cdots,B_n$ 种零件。在一个生产周期，A_i 机床只能工作 a_i 机时；工厂必须完成 B_j 零件加工数为 b_j；A_i 机床加工 B_j 零件的时间为 c_{ij}(单位：机时/个)，加工 B_j 零件的成本为 d_{ij}(单位：元/个)。问在这个生产周期，怎样安排各机床的生产任务，才能既完成加工任务，又使总的加工成本最低？

解 设在一个周期内，A_i 机床加工 B_j 零件 x_{ij}件。于是：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \leqslant a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1,\cdots,n$$

(x_{ij} 为非负整数)

1.1.5 合理下料问题

设用某种原料下零件 $A_1,\cdots,A_m$ 的毛坯。根据过去经验，在一件原材料上有 $B_1,\cdots,B_n$ 种不同的下料方式：按 B_j 方式下零件 A_i 的件数为 c_{ij}。此外，需 A_i 零件 a_i 件。问应如何安排下料方式，使得既能满足需要，用的材料又最少？

解 设用 B_j 种方式下料的原材料数为 x_j，则有数学模型：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,\cdots,n$$

1.1.6 配料问题

设用 n 种原料 $B_1,\cdots,B_n$ 制成具有 m 种成分 $A_1,\cdots,A_m$ 的产品。对 A_i 成分的需求量不低于 a_i。又，B_j 原料的单价为 b_j，其每单位含成分 A_i 量为 c_{ij}。问应怎样配料，才使产品成本最低？

解 设取原料 B_j 为 x_j 单位($j=1,\cdots,n$)。得到数学模型：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geqslant a_i,\ i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n$$

上面我们建立了几个在经济领域中常见的实际问题的模型。这些实际问题尽管各式各样，但它们的数学模型却有相同的形式。这就是：表示约束条件的数学式子都是线性等式或线性不等式，表示问题最优化指标的目标函数都是线性函数。因为约束条件和目标函数都是线性的，所以我们把具有这种模型的问题称为线性规划问题。

线性规划问题的数学模型的一般形式是：

求一组变量 $x_j(j=1,\cdots,n)$ 的值，使其满足：

$$\min 或 \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ (或 \geqslant b_i, 或 = b_i)$$

$$i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n$$

式中，a_{ij}、b_i、$c_j(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$为已知量。

若用矩阵符号 $A=(a_{ij})_{m\times n}$、$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$、$b=(b_1,\cdots,b_m)^T$、$c=(c_1,\cdots,c_n)$，则可将问题模型简记为：

$$\min(或 \max)\ z = cx$$

$$\text{s.t.}\ Ax \leqslant b,\ (或 \geqslant, =)$$

$$x \geqslant 0$$

我们称满足约束条件的一组变量的值 $x_j^{(0)}$，$(j=1,\cdots,n)$为线性规划问题的一个可行解。使目标函数取得最大(或最小)值的可行解称为最优解。

线性规划问题的数学模型是描述实际问题的抽象的数学形式。它反映了客观事物数量间的本质规律。建立数学模型时，要从实际出发，抓住最本质的因素，而将不太重要的因素去掉，以便建立一个既简单而又比较真实反映问题本质规律的模型。

1.2 线性规划问题解的性质

1.2.1 两个变量的线性规划问题的图解法

为了给后面的线性规划问题的基本理论提供较直观的几何说明，我们先介绍线性规划问题的图解法。

例 1 求解

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.}\ x_1 \leqslant 4$$

$$x_2 \leqslant 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

我们视(x_1, x_2)为坐标平面上的点。那么，满足约束条件中每一个不等式的点集就是一个半平面。因为约束条件是由5个不等式组成的，所以满足约束条件的点集是5个半平面的相交部分，如图1.1中的凸多边形$OABCD$。该多边形上的任一点，都是问题的一个可行解。该多边形点的全体，构成线性规划问题全体可行解——又叫问题的可行域。

我们再在可行域中找一个最优解。这只要将等值线$2x_1+5x_2=z$平行移动：对应常数z取到一系列不同的值，离原点愈远，z值愈大。于是问题成为：在上列平行线中，找出一条直线，使与凸多边形相交，而又尽可能地离原点最远。从图可见，经过B点的一条直线符合要求。易解出$B=(2,3)$。故 max $z=2*2+5*3=19$。

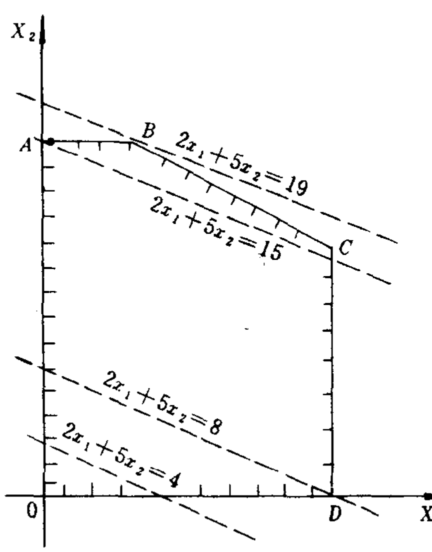

图 1.1

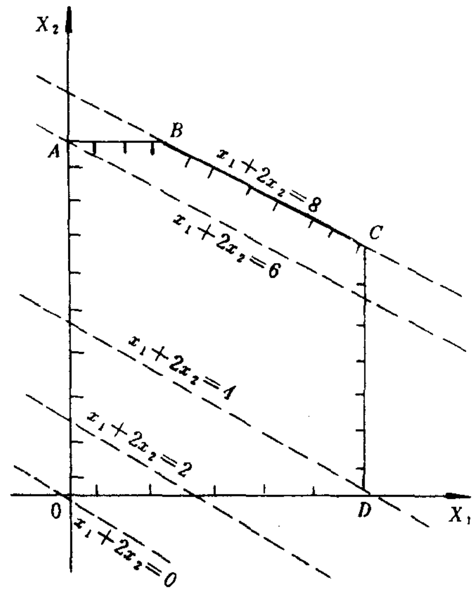

图 1.2

例2　若把例1的目标函数改为$z=x_1+2x_2$，那么，BC边上每一点都是最优解(离原点最远的一条直线$x_1+2x_2=8$与BC边重合)。这时，最优解有无穷多个，它们对应的目标函数值都是8，如图1.2所示。

例3　求解

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 &\geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

例4　把例3改为求目标函数的最大值，再求解。

如图1.3所示．例3最小值为2；例4目标函数无上界，无解。

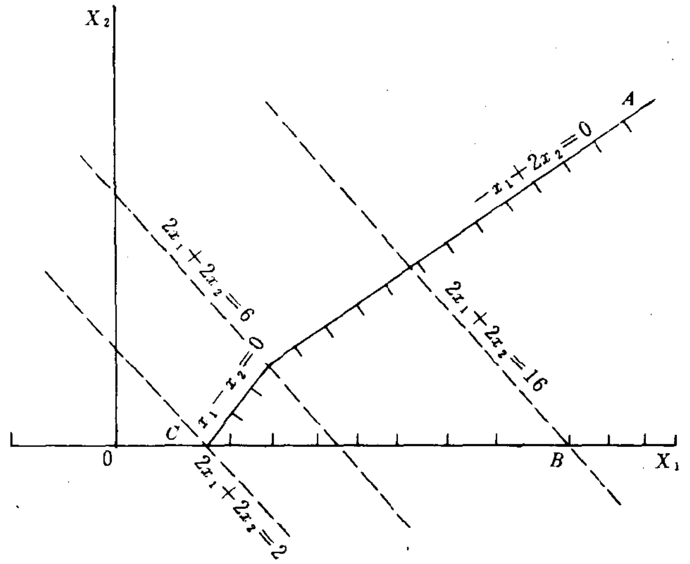

图 1.3

1.2.2 线性规划问题的标准形式

为了讨论方便，我们把线性规划问题化为标准形式。按照如下形式进行：

(1) 如果第 k 个式子为

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n\leqslant b_k$$

则加入变量 $a_{n+k}\geqslant 0$，改为：

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+k}=b_k$$

如果第 e 个式子为

$$a_{e1}x_1+\cdots+a_{en}x_n\geqslant b_e$$

则减去变量 $x_{n+e}\geqslant 0$，改为：

$$a_{e1}x_1+\cdots+a_{en}x_n-x_{n+e}=b_e$$

x_{n+k}、x_{n+e}称为松弛变量。松弛变量在目标函数中的系数为零。

(2) 如果问题是求目标函数 $z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$ 的最大值，则化为求目标函数 $z'=-z=-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$ 的最小值。

(3) 如果对某个变量 x_j 没有非负限制，则引入两个非负变量 $x'_j\geqslant 0, x''_j\geqslant 0$，令 $x_j=x'_j-x''_j$，代入约束条件和目标函数中，化为对全部变量都有非负限制。

通过上述步骤，总可以将任何一个线性规划问题，整理成如下标准形式：

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

$$x_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m$$

或者，按照前面引入的符号，简记为：

$$\min z = cx$$
$$\text{s.t.}\ Ax = b, A = (a_{ij})_{m\times n}$$
$$x \geqslant 0$$

1.2.3 线性规划问题解的性质

1. 几个概念

(1)可行解、基础可行解、最优解、基础最优解

设有线性规划问题

$$\min z = cx$$
$$\text{s.t.}\ Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

我们把满足约束条件的

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$$

称为线性规划问题的可行解。

若 $x^{(0)}=0$,或 $x^{(0)}$的非零分量所对应的系数列向量线性无关时,称可行解 $x^{(0)}$为基础可行解。

使目标函数取最小值的可行解,称为最优解。

使目标函数取最小值的基础可行解,称为基础最优解。

(2)凸集

若连接 n 维点集 S 中任意两点 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$的线段仍在 S 内,则称 S 为凸集。即,若

$$\{x \mid x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, x^{(1)} \in S, x^{(2)} \in S\} \subset S$$

则称 S 为凸集。

(3)极点

若凸集 S 中的点 x,不能成为 S 中任何线段的内点,则称 x 为 S 的极点。即,若对于任意两点 $x^{(1)}\in S, x^{(2)}\in S$,不存在 $\alpha\in(0,1)$,使得:

$$x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}$$

则称 x 为 S 的极点。

2. 线性规划问题解的性质

以后,将线性规划问题简记为(LP)问题。

定理 1 (LP)问题的可行解集为凸集。

证 明 设其可行解集为

$$S = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0\}$$

并设 $x^{(1)}\in S, x^{(2)}\in S; \alpha\in[0,1]$。于是,对 $x=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}$,有:

$$\begin{aligned} Ax &= A[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}] \\ &= \alpha Ax^{(1)} + (1-\alpha)Ax^{(2)} \\ &= \alpha b + (1-\alpha)b = b \end{aligned}$$

且显然,$x\geqslant 0$。亦即 $x\in S$。

定理 2 可行解集 S 中的点 x 是极点,且仅当 x 是基础可行解。

证 明 设 x 是 S 的极点。只需证明当 $x\neq 0$ 时,其非零分量 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}(k\leqslant m)$对应的列

向量 $P_{j_1},\cdots,P_{j_k}$ 线性无关。

如果 $P_{j_1},\cdots,P_{j_k}$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $\delta_1,\cdots,\delta_k$，使得

$$\delta_1 P_{j_1} + \cdots + \delta_k P_{j_k} = 0$$

对任意 λ，也有

$$\lambda(\delta_1 P_{j_1} + \cdots + \delta_k P_{j_k}) = 0 \tag{1.1}$$

又因为 $x_{j_1},\cdots,x_{j_k}$ 为可行解 x 的非零分量，所以

$$x_{j_1} P_{j_1} + \cdots + x_{j_k} P_{j_k} = b \tag{1.2}$$

式(1.2)+式(1.1)得

$$(x_{j_1} + \lambda\delta_1) P_{j_1} + \cdots + (x_{j_k} + \lambda\delta_k) P_{j_k} = b$$

式(1.2)−式(1.1)得

$$(x_{j_1} - \lambda\delta_1) P_{j_1} + \cdots + (x_{j_k} - \lambda\delta_k) P_{j_k} = b$$

选取 $\lambda=\min\{x_{j_t}/|\delta_t|;t=1,\cdots,k,|\delta_t\neq 0\}>0$，构造

$$x^{(1)}: x_{j_1}^{(1)} = x_{j_1} + \lambda\delta_1$$

$$\cdots$$

$$x_{j_k}^{(1)} = x_{j_k} + \lambda\delta_k$$

$$x_j^{(1)} = 0,\ j \neq j_1,\cdots,j_k$$

$$x^{(2)}: x_{j_1}^{(2)} = x_{j_1} - \lambda\delta_1$$

$$\cdots$$

$$x_{j_k}^{(2)} = x_{j_k} - \lambda\delta_k$$

$$x_j^{(2)} = 0,\ j \neq j_1,\cdots,j_k$$

因此

$$x^{(1)}\geqslant 0, x^{(2)}\geqslant 0, x^{(1)}\neq x^{(2)}$$

而且

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)} P_j = b$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(2)} P_j = b$$

所以，$x^{(1)}$、$x^{(2)}$ 为可行解；并且，$x=x^{(1)}/2+x^{(2)}/2$。

这样，x 不是可行解集的极点，与假设矛盾。

下证充分性。设 x 是基础可行解。$x=0$ 时，显然 x 必为极点。故设 $x\neq 0$，其非零分量对应的列向量 $P_{j_1},\cdots,P_{j_k}$ 线性无关。

如果 x 不是极点，则必存在凸集 S 中两个不同的点 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$ 使得：

$$x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}, \alpha \in (0,1)$$

即有

$$x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)},\ j = 1,2,\cdots,n$$

当 $j\neq j_1,\cdots,j_k$ 时，上式变为

$$0 = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)}$$

只有

$$x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0,\ j \neq j_1,\cdots,j_k$$

又因为 $Ax^{(1)}=b, Ax^{(2)}=b$. 两式相减则得：

$$(x_{j_1}{}^{(1)} - x_{j_1}{}^{(2)})P_{j_1} + \cdots + (x_{j_k}{}^{(1)} - x_{j_k}{}^{(2)})P_{j_k} = 0$$

而且，其系数不全为零。所以，$P_{j_1}, \cdots, P_{j_k}$线性相关，与假设矛盾。

定理 3 （LP）问题的最优值可以在极点上达到。

证 明 设 $x^{(0)}$为最优解，最优值为 $z(x^{(0)})=cx^{(0)}$。若 $x^{(0)}=0$，根据定理 2，$x^{(0)}$已是极点，定理成立。若 $x^{(0)}\neq 0$，且不是极点，其非零向量为 $x_{j_1}{}^{(0)}, \cdots, x_{j_k}{}^{(0)}$（$k\leqslant m$）。则利用证明定理 2 必要性时类似的方法选择 λ，从 $x^{(0)}$出发构造：

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda\delta, x^{(2)} = x^{(0)} - \lambda\delta,\ \delta = (\delta_1, \cdots, \delta_k)^T$$

并且

$$x_j{}^{(i)} = 0, j \neq j_1, \cdots, j_k, i = 1,2$$

由这个构造方法，显然 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$中，至少有一个其非零分量的个数至少比 $x^{(0)}$的非零分量的个数少一个。而且

$$z(x^{(1)}) = cx^{(0)} + \lambda c\delta, z(x^{(2)}) = cx^{(0)} - \lambda c\delta$$

前面两式中，必有 $c\delta=0$；不然，$z(x^{(0)})$就不是最小值。

所以

$$z(x^{(0)}) = z(x^{(1)}) = z(^{(2)})$$

因此，已知最优解是 $x^{(0)}$，如果 $x^{(0)}$不是基础可行解，总可以构造另一个最优解 $x^{(1)}$，其非零分量个数至少比 $x^{(0)}$的非零分量个数要少一个。重复这个步骤，可得到最优解：$x^{(2)}$、$x^{(3)}$，…，它们的非零分量个数越来越少。到某个时侯，一定可以找到最优解 $x^{(*)}$，或 $x^{(*)}=0$，或 $x^{(*)}\neq 0$。但其非零向量所对应的列向量线性无关（因为，最特殊情况，到只有一个非零向量时，对应的只有一个列向量，必然线性无关）。这时，$x^{(*)}$即为极点，并且 $z(x^{(*)})=z(x^{(0)})$。

因为极点对应矩阵 A 中一组线性无关列向量，而矩阵 A 中共有 n 列，n 个向量中线性无关组的个数是有限的，因而极点个数有限。从这一结论和定理 3，我们可以得出，如果（LP）问题有最优解，就只需从有限的几个极点中去找。后面马上讲到的解（LP）问题的单纯形方法，就是根据这个原理：由一个极点，迭代到另一个极点，经有限次迭代，求得（LP）问题最优解，或判断问题无解。

1.3 单纯形方法

设有（LP）问题：

$$\min f = cx$$
$$\text{s.t.}\ Ax = b \text{ 或 } \sum x_j P_j = b$$
$$x \geqslant 0$$

这里 $c=(c_1, \cdots, c_n), x=(x_1, \cdots, x_n)^T, b=(b_1, \cdots, b_m)^T$

$A=(a_{ij})_{m\times n}=(P_1, \cdots, P_n), P_j=(a_{1j}, \cdots, a_{mj})^T$

$\text{rank}\, A=m, m<n$

1.3.1 有初始基 $B_{m\times m}=(P_1, \cdots, P_m)$

改写