高等学校试用教材

数学分析

(卷 I)

秦曾复 朱学炎 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

（卷 I）

秦曾复　朱学炎　编

高等教育出版社

内容提要

本书为理工科大学各专业用数学基础课教材，分三卷出版。

卷 I 内容包括：实数系，数列极限，连续函数，导数与微分，黎曼积分，数项级数等六章。

本书注重理论与实际的联系，数学基本概念与物理原型相联系，尽可能介绍数学在实际中的应用。

本书还可供师范大学各专业作为教材或参考书使用。

责任编辑 邵 勇

高等学校试用教材

数 学 分 析

（卷 I）

秦曾复 朱学炎 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 260 000

1991 年 5 月第 1 版 1991 年 5 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 115

ISBN7-04-002694-5/O·1020

定价 3.90 元

序　言

本书是作者们多年来在复旦大学数学系和力学系讲授数学分析课程的讲稿基础上写成的. 由复旦大学数学系主编，出版过三本教科书：陈传璋、金福临、胡家赣、朱学炎、欧阳光中编《数学分析》上，下册，1962年，上海科学技术出版社；陈传璋、金福临、朱学炎、欧阳光中编《数学分析》上，下册，1979年，高等教育出版社；欧阳光中、朱学炎、秦曾复编《数学分析》上，下册，1982年，上海科学技术出版社. 作者们在使用上述教材的过程中，参考国内外的有关教科书，逐渐形成现在的讲义.

历来的数学分析教科书是按数学系的一门基础课程数学分析的教学大纲编写的. 近年来，不仅数学系，而且力学系，统计系，计算机科学系，电子工程系以及管理科学系为了提高大学生的数学素养，陆续设置了数学分析课程. 由于应用的需求但又不可能逐门开设数学专业后继课程的情况，有必要在数学分析课程中适当地扩大基础知识面. 1983年兰州会议制订的综合大学力学专业数学分析教学大纲反映了这种新格局. 本书为此引进弗雷奈标架，包络和施蒂尔杰斯积分等内容，试图提供一本面向理工科各专业的数学分析教材.

以十七世纪牛顿和莱布尼茨创立微积分为标志，经过三百多年的千锤百炼，数学分析课程的基本内容是相当成熟的. 既然是为了提高大学生的数学素养而开设数学分析课程，因此对于它的基本概念，基本运算和基本方法，各专业在教学上都必须一丝不苟，严格要求. 八十年代以来，随着数学科学的进展，国际上几本颇有影响的数学分析教科书探讨用现代数学的观点阐述经典数学的内容. 简而言之，数学分析课程的框架是有限维空间中函数的分析.

循此，泛函分析是无限维空间中函数的分析，它成为数学分析的自然延伸．这样也可消除过去在数学分析和泛函分析两门课程之间的脱节现象．本书开卷第一章讲实数连续统，然后展开一元分析成为实数连续统上函数的分析．同样地，第十一章讲 n 维欧几里得空间，进而多元分析便是欧几里得空间中函数的分析．如此处理使数学分析作为现代数学的基础课程的地位和作用更加明确．

理论联系实际是本书努力贯彻的一个原则．引进数学的基本概念尽可能地联系物理的简明原型．对于每一项数学理论，尽可能地介绍它的应用．特别地，在讲完一元分析之后，应用微分和积分，从开普勒的行星运动三定律推演出牛顿的万有引力定律．它是微积分的一个发源地，也是理论联系实际的一个典范．希望读者通过本书逐步提高分析问题和解决问题的能力．

本书分成三卷，每卷大体上相当于每周四学时一个学期的课程内容．卷 I 包括第一章实数系，第二章数列极限，第三章连续函数，第四章导数与微分，第五章黎曼积分和第六章数项级数．这样，大学生们在第一学期就接触微分，积分和无穷级数；为物理课程应用微积分来表达物理量和物理规律提供可能性．此外，也想改善一下大半学期囿于极限和微分演算的状况．卷 II 包括第七章微分的理论与应用，第八章积分的应用与计算，第九章函数项级数，第十章傅里叶级数和第十一章欧几里得空间．第二学期不是第一学期的简单反复．数学分析课程讨论三类函数，在卷 I 中首先讨论连续函数类；在卷 II 中还要讨论凸函数类和有界变差函数类．卷 II 中引进的一致收敛性在数学分析中扮演着重要的角色．众所周知，泰勒级数和傅里叶级数在自然科学和工程技术中有广泛的应用．将第十一章欧几里得空间放在卷 II，只是出于学时分配上的考虑．卷 III 包括第十二章偏导数及雅可比阵，第十三章隐函数的理论与应用，第十四章含参变量积分，第十五章重积分，第十六章曲

线积分与曲面积分和第十七章数量场与向量场．这就是多元分析．其中对于拉格朗日乘数法，重积分的变量代换以及微分形式的楔积与微分等内容的阐述含有作者们的教学心得．

作者们在教学和编写教材的过程中得到同事们的许多帮助，本书引用了国内外一些教科书，特别是欧阳光中，朱学炎秦曾复编《数学分析》的材料，这里谨表谢意．敬请专家和广大读者对本书提出宝贵的意见．

秦曾复　朱学炎

1990年9月

卷 I 目 录

卷 II 预 告

卷III预告

第1章 实 数 系

§1 集合

集合概念

二十世纪以来，集合已经成为表达各种各样数学理论的最基本的概念.

依照集合论奠基者康托尔*的见解，所谓集合是我们的直觉或者我们的思维确定的各别对象之总体，这一个一个有区别的对象称为集合的元素.此时，元素 x 与集合 S 之间的关系称为"x 属于 S"，记成 $x\in S$.

规定一个集合，通常有两种方式，一种是简单的枚举方式，就是将该集合的元素逐一介绍出来. 例如由张三，李四，王五和赵六组成一个代表团，此代表团即成一个集合，上述四位中的每一个成员便是该集合的一个元素.元素个数有限的集合，往往采取枚举方式，只要意义是明确的，枚举方式有时也扩展到无限元素的情况.例如自然数集 N 可以枚举如下:

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

类似地可以规定整数集 Z.

应该指出，在更多的场合下采取另一种用命题来规定的方式.就是说一个集合 S 的所有元素 x 具有某个共同的性质，这个性质由一个命题 $P(x)$ 来刻划，记成

$$S=\{x\,|\,P(x)\}.$$

例如正数集合 R_+ 可规定为

---

* 康托尔(Georg Cantor，1845—1918)，德国数学家.

$$R_+=\{x\mid x>0\}.$$

命题 $P(x)$ 在这里就是简单语句"$x>0$". 一般地说,命题 $P(x)$ 可以是复合语句. 例如有理数集 Q 可以规定于下:

$$Q=\left\{x\mid x=\frac{p}{q}\text{ 并且 } p\in Z \text{ 并且 } q\in N\right\}.$$

注 1. 任何一个对象 y 是否属于给定的集合 S 的问题, 应十分明确,不能模棱两可. 如果 y 属于 S, 那末前面已经说过,记成 $y\in S$; 若 y 不属于 S,则记成 $y\notin S$. 两者必居其一.

注 2. 按习惯,通常将小写拉丁字母用来记元素,大写拉丁字母记集合. 例如 $S=\{a,b,c\}$,其中的 a 是 S 的一个元素. 但是, $\{a\}$ 就不再理解为元素,而是一个仅含元素 a 的集合.

注 3. 在一个集合 S 中的元素 x 与 y 应是有区别的 (各不相同). 就集合的构成来说,同一个元素 x 在 S 中重复出现没有意义.

注 4. 两个集合 S 和 T 称为相等,是指它们含有同样的元素,此时记成 $S=T$. 例如 $S=\{a,b,c\}$ 和 $T=\{c,a,b\}$,于是 $S=T$. 这时枚举元素的先后次序无所谓. 又如 $S=\{x\mid x^2-1=0\}$ 和 $T=\{x\mid x=\cos n\pi, n\in N\}$,于是 $S=T$. 这时规定集合所用的命题在形式上的不同也无关紧要.

注 5. 有一个特别的集合, 它不包含任何元素,称为"空集",记成 $\varnothing$. 例如 $\{x\mid x^2+1=0 \text{ 并且 } x\in R\}=\varnothing$.

注 6. 两个集合 S 和 B,称 B 是 S 的一个子集,记成 $B\subset S$(或说: S 包含 B), 指凡 B 的元素皆为 S 的元素:

$$x\in B\Rightarrow x\in S$$

(图1-1),其中的符号"$\Rightarrow$"叫做"隐含"(命题 P 与 H 若 $P\Rightarrow H$,则意味着由 P 推出 H).

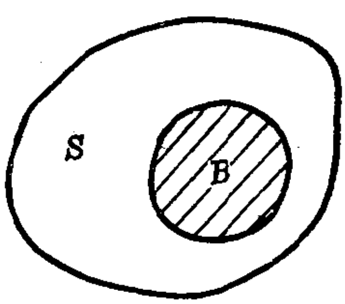

图 1-1 $B\subset S$

例如,有理数集 Q 是实数集 R 的一个子集: $Q\subset R$. 显然对任何集合 S 而言有 $S\subset S$. 此外,还有 $\varnothing\subset S$.

现在问: 由三个元素 a,b,c 组成的集合 $S=\{a,b,c\}$ 共有几个子集?如上所述,它有 $8(=2^3)$ 个子集:

$$\varnothing;$$
$$\{a\},\{b\},\{c\};$$
$$\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\};$$
$$\{a,b,c\}.$$

可以证明,由 n 个元素组成的集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,共有 2^n 个子集.

特别地,当 B 是 S 的一个子集,并且确实有某个元素 $e\in S$ 但 $e\notin B$ 时,称 B 为 S 的一个真子集,这也可表达成 $B\subset S$ 并且 $B\neq S$. 上面由三个元素组成的集合 S 具有 2^3-1 个真子集,即开头举出的 7 个子集是 S 的真子集.

不难看出,注 4 中规定的两个集合 S 和 T 相等能表达成

$$S=T\Leftrightarrow S\subset T \text{ 并且 } T\subset S$$

其中的符号"$\Leftrightarrow$"叫做"当且仅当"(命题 P 与 H 若 $P\Leftrightarrow H$,则意味着 $P\Rightarrow H$ 并且 $H\Rightarrow P$).

集合运算

通常讨论三种集合运算:两个集合的"并",两个集合的"交",及其在一个集合为另一个集合的子集情况下,前者关于后者的"补".

两个集合 S 和 T 的并,是一个集合,记为 $S\cup T$. 这个新集合的元素或者来自集合 S,或者来自集合 T:

$$S\cup T=\{x\mid x\in S \text{ 或者 } x\in T\}.$$

换言之,$S\cup T$ 是由 S 的元素和 T 的元素联合起来组成的集合(图 1-2).

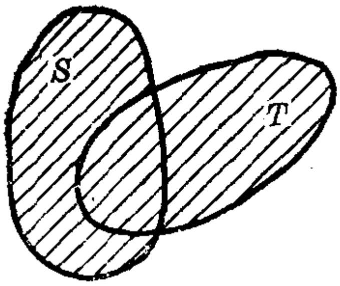

图 1-2　$S\cup T$

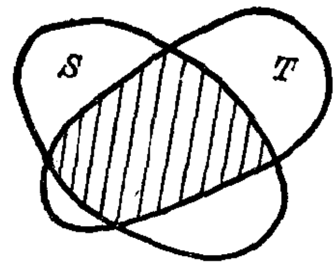

图 1-3　$S\cap T$

两个集合 S 和 T 的交，是一个集合，记为 $S\cap T$. 这个新集合的元素必须既属于 S 又属于 T:

$$S\cap T=\{x\,|\,x\in S \text{ 并且 } x\in T\}.$$

也就是说，$S\cap T$ 是由 S 与 T 共同的元素组成的一个集合(图1-3).

例如，由 $S=\{a,b,c\}$ 和 $T=\{b,c,d,e\}$，得 $S\cup T=\{a,b,c,d,e\}$ 以及 $S\cap T=\{b,c\}$.

又如，自然数集 N 是偶数集 E 与奇数集 F 的并:

$$N=E\cup F,$$

此时

$$E\cap F=\varnothing.$$

设集合 S 是集合 T 的一个子集: $S\subset T$. 此时，可以作出集合 S 关于集合 T 的补，它是一个集合，记为 S_T^c. 在集合 T 不言而喻的情况下常简写为 S^c. 这个新集合的元素属于 T 但不属于 S:

$$S_T^c=\{x\,|\,x\in T \text{ 并且 } x\notin S\}$$

(图1-4). 有些书上将补集叫做余集. 例如，无理数集作为有理数

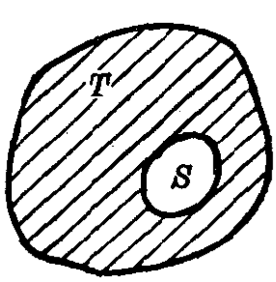

图 1-4　S_T^c

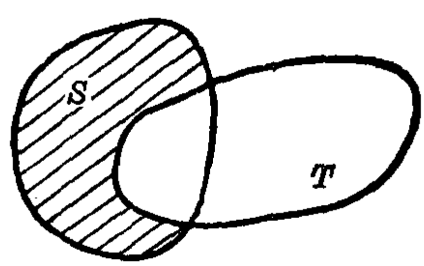

图 1-5　$S-T$