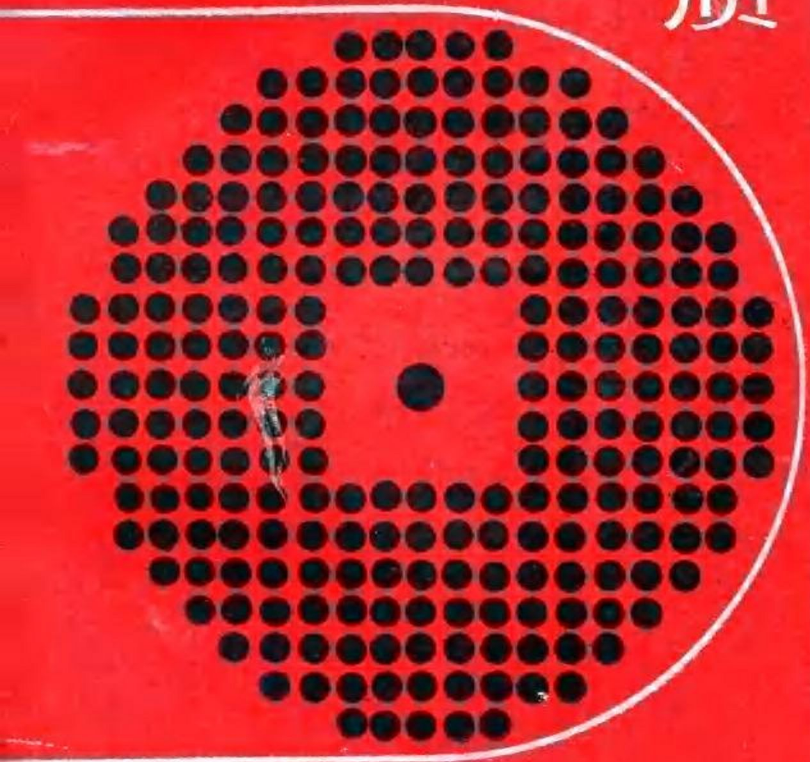
经典和量子约束系统及其对称性质

李子平 著



北京工业大学出版社

经典和量子约束系统及其对称性质

国家自然科学基金资助项目

李子平 著

北京工业大学出版社

内容简介

本书介绍约束系统和它的对称性质。前面五章侧重于在位形空间中讨论系统的对称性质（特别是含附加约束的系统），分析了系统的整体和定域对称性，讨论了约束系统的变换性质和系统运动守恒量之间的关系。后面五章讨论相空间中含固有约束的系统（包括所有定域不变理论）。介绍了该系统的经典和量子理论及其正则对称性质。讨论了奇异系统的正则量子化和泛函（路径）积分量子化。对杨-Mills场作了较深入的分析。约束Hamilton系统的经典和量子理论在现代场论中占重要地位。

本书适合大学物理系高年级学生和研究生以及从事理论物理、粒子物理、核物理、凝聚态物理、力学和数学等科技工作者阅读。

经典和量子约束系统及其对称性质

李子平 著

•

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

北京通县燕山印刷厂印刷

•

1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷

850×1168毫米32开本 21.25印张 526千字

印数：1～1000册

ISBN7-5639-0302-X/O·15

定价：21.00元

（京）新登字212号

前　　言

物理系统的状态和运动过程常常受到某些条件的制约，这些条件称为约束条件．约束条件可分为两类：一类是在位形空间中描述系统运动时出现的附加条件（约束），如力学中的几何约束和运动约束（或完整约束和非完整约束），连续介质力学中的热力学关系，场论中场变量满足某些附加条件等等．另一类是在相空间中描述系统的运动时，其正则变量是不独立的，正则变量之间存在某些约束关系．本书将分别从Lagrange体制和Hamilton体制来讨论约束系统的运动以及它们在有限李群G_r和无限李群$G_{\infty r}$下的对称性质．书中前半部分主要涉及到位形空间中的附加约束，第六章以后涉及到相空间中的固有约束，讨论该约束系统的经典和量子理论．

经典动力学的基本问题是建立系统的运动方程并求出该方程的解。实际的动力学系统即使是运动方程已经给出，要求出运动方程的解往往是很困难的，有时是不可能的（特别是非线性微分方程和约束系统的运动微分方程），甚至解的存在性也难以断定。尽管如此，动力学系统也往往存在某些运动守恒量，这些守恒量的存在对于了解系统的物理状态和性质就十分重要．对系统运动守恒量的研究，传统的方法主要有：(1) 直接从系统的运动微分方程出发；(2) 基于对称性所联系的Nöther理论；(3) 在力学中，从力学的微分变分原理出发。在许多情况下，从系统的对称性来求系统的守恒量是十分有效的方法．本书将把Nöther理论推广到约束系统．

物理系统所处的状态和运动规律常常包含某些对称性质为其

基本特征．对于物理系统所具有的对称性的分析和研究在物理学的众多领域内都有重要意义．例如，几何形体的对称性在晶体结构的研究中占重要地位．物理规律的对称性的研究是对称理论的重要方面．历史上，力学规律在Galileo变换下的不变性，所代表的力学相对性原理，是经典力学的重要支柱．随着相对论的发展，人们进一步认识到对称性（不变性）原理与物理规律之间存在紧密联系，例如，狭义相对论要求，物理规律应该是Lorentz协变的．量子力学和量子场论的发展，使对称性原理深入到微观物理学领域，成为人们探索微观粒子运动规律的重要原理之一．在原子核物理和粒子物理学中，对称性理论的重要性就更为突出．在物理学中对称性理论的研究是多方面的，其中的一个重要方面是对称性和守恒律的联系．物理规律对称性的数学形式体现为系统的运动方程（或作用量）在某种对称群下具有不变性。连续对称性和守恒律的联系表现为：系统的作用量在某种对称群（有限李群G_r）下不变，必导致系统的某种守恒量存在．连续对称性所联系的守恒律可分为时空对称和内部对称两类．重要的时空对称群有Poincaré群和共形群等。时空的均匀性和各向同性产生能量、动量和角动量守恒，共形对称群也存在相应的守恒量．重要的内部对称群有$U(1)$，$SU(2)$和$SU(3)$群等等，它们所联系的守恒量有电荷、同位旋和幺旋等等．这种来源于对称性的守恒荷也称为Nöther荷．还有另一类不来源于对称性的守恒荷，称拓扑荷．场量和连续介质的状态参量一般有多个分量，组成一个矢量空间，称为场量空间．场量作为时空点的函数，可以看作时空流形到场量空间的映象，这个映象的任意连续变形下的不变量称为场的拓扑不变量或拓扑荷，它们是守恒的．拓扑荷与Nöther荷是不同的概念．拓扑性孤立子的稳定性是由拓扑荷守恒保证的．

时空对称和内部对称群所联系的守恒量，与群的生成元有关（从量子理论角度）．分立对称变换（非连续变换），虽然没有相应

的生成元，但一般来说，分立对称变换也导致相应的守恒量存在. 例如，空间反演P下的不变性，导致宇称守恒；电荷共轭C下的不变性，导致电荷共轭宇称守恒. 结合同位旋空间中的转动，还有G宇称守恒等等。但是时间反演T下的不变性，却不导致相应的守恒量（可导致细致平衡原理和超选择定则等）.在粒子的弱相互作用中，P，C，T均不守恒. 对于具有Lorentz群对称性的定域相互作用，尽管P，C或T受到破坏，但乘积PCT总是一个对称变换. 在粒子物理学中，已经知道，较强的相互作用具有较高的对称性，在弱作用中，时间反演和CP的破坏程度比P和C的破坏程度要小得多. 另一类分立对称变换是量子理论中全同粒子的交换对称性，对称群为置换群S_n. 这种对称性和多粒子系统的统计性密切相关。

从量子场论的观点，所有的（基本）粒子都是相应的场的量子，场是物质的基本形态. 如果对所描写场的场量的对称变换在时空每一点上一齐施行，这样得到的对称性是整体对称性，相应的对称群为有限李群G_r；如果在时空每一点独立施行对称变换，所得到的对称为定（局）域对称性，相应的对称群为无限李群$G_{\infty r}$. 电磁场具有Abel $U(1)$群的定域对称性. 非Abel群定域规范对称的杨-Mills场（通过真空自发破缺和Higgs机制）在描述自然界的四种基本相互作用中起有十分重要的作用，普遍认为自然界的四种基本相互作用均是由规范场（杨-Mills场）来传递的。粒子物理学的发展表明，对某些最终受到破缺的近似对称性的研究也是重要的。内部对称性的研究已成功地得到了拓广，规范理论中提出了各种定域规范对称群，如量子味动动力学（QFD）中的$SU(2)\otimes U(1)$，量子色动力学(QCD)中的$SU(3)$，大统一（GUT）中的$SU(5)$，$SO(10)$，超对称和超引力（定域超对称）、Kaluza-Klein理论以及超弦理论中提出了更高的对称性等等.

在传统的对称性理论中，一般未考虑系统受约束的情况，将

描写系统的态函数作为独立变量来处理的．然而，实际物理系统的运动往往受到约束的限制．即使是在位形空间中来描述，也存在不少受约束系统；奇异Lagrange量描述的系统，在相空间中存在固有约束．本书则侧重于研究约束系统及其在连续对称群下的性质．我们从约束系统（位形空间约束和相空间约束）在有限李群G_r下的变换性质出发，将Nöther定理和Poincaré-Cartan积分不变量推广到了多种形式的约束系统，并给出了在非完整力学、连续介质力学和电磁场等方面的应用．考虑系统在无限李群$G_{\infty r}$下的性质，分别导出了位形空间和相空间的广义Nöther恒等式．对某些非不变系统，沿着系统运动的轨线，可导致新的守恒律，给出了在杨-Mills场等方面的应用．讨论了高阶微商约束系统的对称性质。

用奇异Lagrange量描述的系统，简称奇异系统，奇异系统在相空间中存在固有约束．奇异系统的正则形式及其量子化的研究始于Dirac．在物理学的众多领域中，广泛存在着奇异系统，例如相对论性粒子运动满足的质壳条件，表明动量的分量是不独立的；用光锥坐标描述的场是奇异系统；Fermi场的Lagrange量是奇异的；所有定域规范不变的Lagrange量均是奇异的，规范场理论就属于这种类型．粒子物理的发展表明，描述自然界基本相互作用的电磁场、杨-Mills场、引力场、超对称、超引力和超弦等理论，都是具有奇异Lagrange量的系统（或约束Hamilton系统）．因此，研究和处理约束成为规范理论中的基本问题之一，它在现代量子场论中，特别是在规范场和引力场的量子化中占有重要地位．由于奇异系统在相空间存在约束，而系统的量子化是通过相空间中的正则变量的经典和量子对应来实现的，这就需要恰当地处理约束．用Dirac括号对杨-Mills场进行正则量子化，在处理上遇到了困难．对非Abel规范场（杨-Mills场）利用泛函积分（路径积分）量子化则是一种有效的方案。Faddeev利用Feynman路径积分成功地实现了含第一类约束系统的量子化．对于同时含第一类约束和第二类约束的系统以及含Grassmann数系统的泛函积分量子化也已建立，同时还建立了相对论协变性泛函积分量子化理论．尽管约束系统的Dirac理论已经有了相当发展，但是其中的若干基本问题至今在文献中仍不断得到广泛的讨论，例如，Dirac猜想是否有效；规范生成元的构造；约束Hamilton系统的经典和量子正则对称性质；显含时间的奇异系统；高阶微商奇异系统的正则形式和对称性质等等，都是值得深入研究的问题．本书的后半部分在介绍约束系统的Dirac理论的基础上，将对这些问题进行讨论．

关于约束系统的对称性质的研究，目前只散见在一些杂志文献中，而约束Hamilton系统的经典和量子理论在国内尚未见到出版这方面专著．本书在介绍约束动力学基本理论的基础上，对当前散见在杂志文献中的资料作了较为系统的整理和介绍．特别着重于讨论约束系统的对称性方面的研究进展，这些研究不少是我国物理学工作者和力学工作者的工作，例如，对非完整力学系统创立的一种积分理论，作者的工作实际上比国外早七年．

第一章讨论有限自由度的完整系统，它可以用独立坐标来描述，也可以用非独立坐标来描述．书中分析了用独立坐标描述的系统，在位形空间和相空间中的对称群G_r下所导致的守恒量，并讨论了这两种变量描述的等价性．用非独立坐标描述的完整系统（有限约束），在约束条件下的对称变换仍导致系统守恒量存在．

第二章讨论有限自由度非完整系统，一般来说，非完整系统的对称变换不再导致系统的守恒量存在．当变换所确定的等时变分恰好适合约束加在虚位移上的条件时，保持系统保守部分的Lagrange量（准）不变的变换可导致该系统的守恒量存在．对线性、非线性、非完整、非保守系统以及非惯性系统的运动守恒

量问题作了较详细的研究，还将Poincaré-Cartan 积分不变量推广到了非完整系统.

第三章讨论连续系统的整体对称性质，作为后面进一步讨论的先导. 介绍了对称(有限)李群G_r下所联系的守恒量，具体讨论了共形群下的对称性和场的内部对称性，给出了在弹性力学和场论中的应用实例. 特别着重研究了带电粒子与磁单极子系统的电磁场角动量和经典角动量问题.

第四章讨论带附加约束条件的连续系统的整体对称性质. 即使是受有限约束的系统，一般来说，对称变换也不导致经典形式的Nöther定理的守恒量（内部对称变换才可导致这样的守恒量存在).使系统Lagrange量（准）不变的变换所确定的定域（实质）变分保持约束条件不变时，才能导致经典形式的Nöther守恒量. 通过求解广义的Killing偏微分方程组，可以得到系统的运动守恒量. 给出了约束系统的变换性质对电磁波在介质分界面的反射、折射中的应用. 讨论了高阶微商系统，给出了对不可压缩连续介质力学的应用.

第五章讨论系统在无限李群$G_{\infty r}$下的定域变换性质。无限李群下系统的不变性导致Nöther恒等式。将该恒等式推广到非不变性系统，某些非不变性系统亦含Dirac约束。讨论了广义Nöther恒等式在杨-Mills场理论中的应用，得到了与通常BRS荷不同的PBRS荷. 讨论了“等周问题”和“测地线问题”中的定域不变性.

在第六章中，首先介绍了有限自由度奇异系统的Dirac理论，说明了初级约束、次级约束、第一类约束和第二类约束以及Dirac括号的意义. 在此基础上，研究了奇异系统的正则对称性质，给出了奇异系统在相空间中的Nöther定理和Nöther恒等式. 将Poincaré-Cartan 积分不变量推广到显含时间的奇异系统，讨论了它与正则方程、正则变换间的关系,

第七章研究了第一类约束作为规范变换生成元的问题．讨论了一种规范生成元的构成（包括高阶微商理论），分析了生成元中与初级第一类约束、次级第一类约束相连系的系数之间的关系．讨论了参数变更的对称变换下，系统 正 则Hamilton量的性质．说明了固定规范的问题．讨论了Dirac猜想的反例（包括高阶微商系统）．

第八章讨论场论中奇异系统的Dirac理论，分别 以 电 磁场和杨-Mills 场为例作了较详细的说明．研究了场论中奇异系统规范生成元的构成．导出了场论中奇异系统正则形式的广义Nöther 定理和广义Nöther恒等式，并给出了它们的应用．导出了 场 论 中奇异系统的 *Poincaré*-Cartan 积分不变量．最后将这些结果推广到场论中含高阶微商的奇异系统。

第九章讨论奇异系统的正则（算符）形式量子化．含第二类约束的系统通过Dirac括号与量子括号的对应来实现系统的 量 子化．对于含第一类约束的系统，需要选取规范条件来实现系统的量子化，并以电磁场、杨-Mills场为例作了较详细 的 说 明．讨论了电子-声子系统的正则量子化．分析了广义电动力学的 正 则结构．讨论了Lagrange量添加一个时间全微分项（或四 维 散 度项）后，其量子化结果与原有系统的量子化结果是否 等 价 的 问题．

第十章讨论泛函积分量子化．从介绍量子力学中的泛函（路径）积分量子化开始，一直到场论中的泛函积分量子化，讨论了正则量子化和泛函积分量子化之间的等效性．给出了含第一类约束和第二类约束的系统的泛函积分形式，以杨-Mills场为例进行了分析．说明了理论的规范无关性．异出了Ward-Takahashi恒等式并给出了应用．讨论了引力场和高阶微商理论的量子化．

当系统在位形空间中受有附加约束的限制时，只要Lagrange乘子规则适用（例如，有限约束），那么该系统也可作为奇异系统

来处理，此时将Lagrange乘子视为动力学变量.

限于篇幅和时间，约束Hamilton系统的有些方面未能包含在本书中，例如约束动力学的微分几何描述、约束理论在弦理论等方面的应用（引力理论方面的应用也未充分讨论），Lagrange量子化方法等等. 附录中介绍了一点微分流形的概念，可作为进一步阅读有关专门著作的一个导引. 为了使读者阅读本书，书中给出了一些例子来说明基本理论，书末还有其他几个附录。由于时间和作者水平有限，错误和不妥之处难免，欢迎批评指正.

本书的主要内容曾给研究生讲授. 作者对吴碧初副教授阅读本书部分章节所提出的宝贵意见和研究生杨赤帮助整理和抄写了大部分书稿表示感谢.

目　　录

第三章　连续系统

第四章　约束系统

第五章 定域对称性

第六章　奇异系统

第七章　第一类约束与规范变换

第八章 场论中的奇异系统

第九章 奇异系统的正则量子化

第十章 泛函积分量子化