数学

SHU XUE

中学生学习丛书 ZHONGXUESHENG XUEXI CONGSHU

福建人民出版社

中学生学习丛书

数学

（修订本）

主编

福州教师进修学院

编者

池伯鼎 周志文 林振铨 郭仰嵩

魏长庚 倪木森 任寿彬 高玉栋

陈肇和 林宗炘 郭道平

中学生学习丛书

数　学

（修订本）

主　编

福州教师进修学院

编　者

池伯鼎　周志文　林振铨

魏长庚　倪木森　任寿彬

陈肇和　林宗炘　郭道平

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

787×1092　1/32　12印张　256千字

1978年5月第1版　　1979年1月第2版

1980年1月第3次印刷

统一书号：7173·332　　定价：0.69 元

内　容　提　要

《中学生学习丛书》是一套基础知识读物。它是在集体讨论、认真总结各科教学经验的基础上，参照教育部制订的中学各科教学大纲试行草案的精神，参考全国高等学校招生考试复习大纲的内容，以现行教材为依据编写而成的。它以中学生和知识青年为主要对象，也可供准备升大学的高中毕业生和知识青年复习参考，着重帮助他们掌握和巩固各科基本理论和基础知识，提高分析问题、解决问题的能力。为了便于自学，内容力求深入浅出，明白易懂。并配置一定数量的习题，以供练习；书末附有习题答案。

这套丛书共八种。《语文》、《数学》、《物理》、《化学》、《历史》、《地理》已于一九七八年四、五月间陆续出版，现根据读者意见和要求，进行修订、补充、再版，并增加《政治》、《英语》两种。

本书包括代数、三角、平面几何、立体几何和平面解析几何五个部分。学习时应注意各部分知识间的相互联系和它们的综合运用，特别应着重基础知识的学习、基本技能的训练和逻辑思维能力的培养。书末还附有一定深度的参考题，可在熟练地掌握基础知识之后，再行解答。

这套丛书编写和修订都比较仓促，缺点错误在所难免，希望读者批评指正，以便再修订时参考。

目　录

代　数

三　角

平 面 几 何

立 体 几 何

平面解析几何

代　　数

I　数与式

一　实数

（一）实数的概念

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数——可化为}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（即无限不循环小数）}\end{cases}
$$

（二）数轴、绝对值

1.数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。

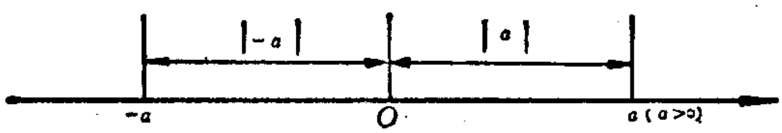
实数与数轴上的点具有“一一对应”的关系。这就是：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应。

2.实数的绝对值：正数的绝对值就是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值就是零。即

$$
|a|=\begin{cases}a\ （当 a\geqslant 0 时）;\\ -a\ （当 a<0 时）.\end{cases}
$$

从数轴上看，实数的绝对值就是表示这个实数所对应的

点与原点的距离。



3.实数大小的比较：数轴上的点越往右，它所表示的数就越大，也就是：一切正数大于零，零大于一切负数。两个负数，绝对值大的反而小；绝对值小的，反而大。

（三）实数的运算

1.正负数运算法则

（1）加法

$a+b$		a、b同号	a、b异号
运算结果	符号	同于原加数的符号	同于绝对值较大加数的符号
	绝对值	等于a、b绝对值相加	等于a、b绝对值相减(大减小)

特殊情况：两个相反数相加等于零；任何数与零相加，仍得这个数。

（2）减法：转化为加法，即

$$a-b=a+(-b).$$

（3）乘、除法

$a\cdot b$（或$a\div b$）		a、b同号	a、b异号
运算结果	符号	正	负
	绝对值	等于a、b绝对值的积（或商）	

（4）乘方：乘法运算的特例，如

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}.\quad（n为自然数）$$

（5）开方：开方是乘方的逆运算.（见根式部分）

2.运算定律

（1）交换律：$a+b=b+a$,

$a\cdot b=b\cdot a$.

（2）结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$,

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

（3）分配律：$a\cdot(b+c)=ab+ac$,

$(a+b)\cdot c=ac+bc$.

3.运算顺序：先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减.如果有括号，就先算括号里的数.

例 1 计算：$12\div(-2)+0\div147$

$-|2^4-(-29)\times(-2)|\times(3^2-2^3)$

解 原式$=-6+0-|16-58|\times(9-8)$

$=-6-42\times1=-48$.

例 2 计算：$\left(3\frac{1}{3}\right)^2-(-6.5)\times\frac{4}{13}+(-2)^4$

$\div[(-2)^3+2]$

解 原式$=\frac{100}{9}-\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{4}{13}+16\div(-8+2)$

$=\frac{100}{9}+2+16\div(-6)=\frac{100}{9}+2-\frac{8}{3}$

$=11\frac{1}{9}+2-2\frac{6}{9}=10\frac{4}{9}$.

二　代数式

用代数运算符号把数字、字母连接起来的式子叫做代数式，代数式的分类如下：

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}
$$

（一）整式

1.整式的运算

（1）加减法

i.去括号

$a+(b-c+d)=a+b-c+d$；（括号内的项都不变号）

$a-(b-c+d)=a-b+c-d$。（括号内的项都变号）

ii.合并同类项：将所含字母相同，并且各个字母的指数也分别相同的项——同类项合并成一项，合并时只要把同类项系数的代数和作为结果的系数。

（2）乘除法、乘方：在进行乘除法、乘方运算时，经常要用到下列正整数指数幂的运算法则：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$(a^m)^n=a^{mn};$$

$$(ab)^n=a^nb^n;$$

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n}(m>n,\ a\neq 0),\\1\qquad(m=n,\ a\neq 0),\\\dfrac{1}{a^{n-m}}(m<n,\ a\neq 0);\end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(b\neq 0).$$

i.乘法

单项式乘以单项式：应用乘法交换律、结合律及幂的运算法则进行计算。

单项式乘以多项式：应用乘法对加法的分配律转化为单项式乘以单项式进行计算。

多项式乘以多项式：把一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，并把所得的积相加。在特殊情况下可直接应用下列乘法公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

ii.除法

单项式除以单项式：把系数和相同字母的幂分别相除，并把被除式单独有的字母连同它们的指数保留在商里。若某些字母在被除式里的指数小于除式里的指数，或者除式里出现某些在被除式里所没有的字母，则结果用分式表示。

多项式除以单项式：先把多项式的每一项除以这个单项式，再求商的代数和。

iii.乘方：应用积的乘方和幂的乘方法则进行计算。

2.因式分解：将多项式表示成几个整式的积叫做多项式的因式分解。因式分解通常有如下几种方法：

（1）提取公因式法：提取多项式各项的最高公因式；

（2）应用公式分解法；

（3）分组分解法：分组后各组有公因式可提取，或有公式可用。

例 1 分解因式：$27ab^2+8a^4b^2$。

解 原式$=ab^2(27+8a^3)$

$=ab^2(3+2a)(9-6a+4a^2)$

例 2 分解因式：$am+2bn+cm-2an-bm-2cn$。

解 原式$=m(a-b+c)-2n(a-b+c)$

$=(a-b+c)(m-2n)$。

例 3 分解因式：$ax^2+ay^2-ab^2+2axy$。

解 原式$=a(x^2+y^2-b^2+2xy)$

$=a[(x^2+y^2+2xy)-b^2]$

$=a[(x+y)^2-b^2]$

$=a(x+y+b)(x+y-b)$。

例 4 分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$。

解 原式$=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$。

对于二次三项式可采用下列方法进行因式分解：

（1）十字相乘法

例 1 分解因式：$2a^2+ab-10b^2$。

解 原式$=(a-2b)(2a+5b)$。

$$\begin{array}{ccc} a & & -2b \\ & \times & \\ 2a & & 5b \end{array}$$

例 2 分解因式：$x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6$。

解 原式$=(x-2y)^2-5(x-2y)+6$

$=(x-2y-2)(x-2y-3)$。

（2）配方法

例 分解因式：$3x^2-2x-2$。（在实数范围内）

解 原式$=3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)$

$$=3\left[x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}\right]$$
$$=3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right]$$
$$=3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2\right]$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right).$$

（二）分式

1.基本性质

$$\frac{b}{a}=\frac{bm}{am}\quad (m\neq 0).$$

2.约分与通分

（1）约分：应用分式的基本性质，把分式的分子、分母的公因式都约去，这种运算过程叫做约分，所得结果叫做最简分式。

（2）通分：应用分式的基本性质，把两个或两个以上分母不同的分式化成分母相同的分式且又不改变分式的值的过程叫做通分。通常取各分母的最低公倍式作为公分母，运算较简。

3.运算

（1）加减法

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}, \text{（同分母）}$$
$$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}=\frac{bc\pm ad}{ac}. \text{（异分母）}$$

（2）乘法

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}.$$

(3) 除法

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

(4) 乘方

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad (a \neq 0).$$

(5) 开方（见根式部分）

4.繁分式的化简：繁分式实际上是分式除法的另一种写法，所以可利用除法法则和分式的基本性质来化简繁分式。

例 1　化简：$\frac{1}{2x+3y} - \frac{1}{3y-2x} - \frac{6y}{4x^2-9y^2}$.

解　原式 $= \frac{1}{3y+2x} - \frac{1}{3y-2x} + \frac{6y}{(3y+2x)(3y-2x)}$

$$= \frac{3y-2x-3y-2x+6y}{(3y+2x)(3y-2x)}$$

$$= \frac{6y-4x}{(3y+2x)(3y-2x)}$$

$$= \frac{2(3y-2x)}{(3y+2x)(3y-2x)} = \frac{2}{3y+2x}.$$

例 2　化简：

$$\frac{m}{m-1} \div \frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m^3-1} \div \frac{1}{m^2+m+1}.$$

解　原式 $= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{m+1}{m}$

$$- \frac{m+1}{(m-1)(m^2+m+1)} \cdot (m^2+m+1)$$

$$= \frac{m+1}{m-1} - \frac{m+1}{m-1}$$

$$= 0.$$

例 3 化简：$\left[-\dfrac{p^2q^3}{3(p+q)}\right]^4\cdot\left(\dfrac{p^2-q^2}{p^2q^2}\right)^3$。

解 原式$=\dfrac{p^8q^{12}}{81(p+q)^4}\cdot\dfrac{(p+q)^3(p-q)^3}{p^6q^6}$

$=\dfrac{p^2q^6(p-q)^3}{81(p+q)}$。

例 4 已知$x=-0.625$，

试求$\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$的值。

解 原式$=\dfrac{1}{1-\dfrac{x(1+x)}{x^2-1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$

$=\dfrac{x-1}{x-1-x}=1-x$。

当$x=-0.625$时，

原式$=1-(-0.625)=1.625$。

（三）二次根式

1.二次方根：如果$x^2=a$，那末x叫做a的二次方根。

(1) 性质：$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$；

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(当a\geqslant0时),\\-a(当a<0时);\end{cases}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,\ b\geqslant0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,\ b>0)。$$

(2) 最简根式与同类根式：符合下列条件的二次根式，叫做最简二次根式：

i.被开方式的每一个因式的指数都小于2；