

黄嘉佑 李 黄



气象中的谱分析

气象出版社

气象中的谱分析

黄嘉佑 李 黄编著

气象出版社

内 容 提 要

谱分析是气象分析和预报中的一个重要方法。本书着重总结和介绍了国内外谱的基本原理及其在气象中的应用。内容涉及功率谱、交叉谱、最大熵谱、空间波谱展开、球谱展开及时空交叉谱等方法。

本书适合于从事气象业务和研究的科技人员阅读，也可作为大专院校气象专业师生的课外参考读物。

气象中的谱分析

黄嘉佑 李 黄编著

责任编辑 顾仁俭

气 象 出 版 社 出 版

(北京西郊白石桥路46号)

北京丰华印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

* * *

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.125 字数: 221千字

1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷

印数: 1—5,000 统一书号: 13194·0147

定价: 1.35 元

前 言

大气运动无论从时间演变上或空间分布上都存在着各种尺度的波动现象。例如，在空间方面，常常在各种高空天气图上可以看到等高线的各种波动现象，这种波动包括波长为几千公里的超长波，也包括上千公里的长波等天气尺度方面的波动。另外，在中、小尺度方面，如大气湍流、飑线等天气现象中存在着波长在几百公里以下的各种波动。在各种气象要素的时间演变中，也存在着多种时间尺度的周期变化现象，比较常见的是日变化和年变化现象。除此之外，国内外气象工作者还发现其他各种尺度的周期变化。如大气微物理变化可以是几秒，天气图上环流指数变化是几天或几十天，某些气象要素的变化可以是几年或几十年、甚至几百年或几千年的气候振动。这些存在于空间与时间中的波动现象的研究，在气象分析和预报工作中是十分重要的。

在大气运动的演变过程中，不仅在各种空间尺度和各种时间尺度上存在着波动现象，而且它们之间还存在错综复杂的相互制约关系。不同空间尺度的波动常常有着不同时间尺度的周期变化，这种包括时间在内的四维波动现象是气象研究的重要方面。

如何分析大气运动在空间时间方面存在的各种复杂的波动现象中的规律性呢？谱分析就是一种有力的工具。事实上，以傅里叶分析为基础的谱分析方法很早就分析气象要素时间序列的周期性上使用。因为在气象要素随时间演变过程中，尽管在时域中表现十分复杂，根据傅氏展开，总可以在频率

域上用不同频率的波动来区分它们。这种在频率域上的分解也可以类似地应用于高空图上的波动结构中，不过，在空间上习惯把它换成波数的表示形式。这种分解方法就是谱分析的主要内容。由于谱分析已广泛地用于无线电、物理等学科上，其基本原理多有详尽介绍，本书就不准备重复，仅侧重于介绍这一方法在气象中的应用及其特点。当然，为说明需要，某些重要原理及公式也在本书中给出，以备查找方便。

本书第一章，首先介绍用气象要素时间序列寻找周期性的方法，并着重阐述各种谱分析方法的基本原理，如功率谱、最大熵谱和交叉谱。这也是本书后两章的理论基础。

第二章着重介绍大气运动的空间谱分析技术。其中包括常用的谱分析在大气运动空间结构分析中的作用，高度场上纬向波谱分析及有关大气运动的各种物理量谱分析。此外，还介绍二维空间场的谱展开，即球谐展开等。

时间与空间相互结合的谱分析——时空谱分析是近代谱分析在气象中应用的重大发展，将在第三章中着重介绍。

近几十年来，谱分析技术在气象中应用愈来愈广泛，应用的技术也在不断地发展。我们编写这本书的目的就在于介绍和推广这一技术，促进其在气象中进一步的应用。但由于作者理论水平有限，实践经验不足，材料收集也不够齐全，缺点和错误在所难免，望读者提出宝贵意见。

编者

1982年3月

目 录

第一章 气象要素时间序列的谱分析

§ 1 谱的概念.....	1
§ 2 功率谱估计.....	13
§ 3 利用功率谱作周期分析.....	36
§ 4 谱分析与滤波.....	53
§ 5 功率谱估计的其它方法.....	68
§ 6 最大熵谱方法.....	79
§ 7 交叉谱分析.....	96
§ 8 谱分析在天气、气候分析和预报中的应用.....	123

第二章 大气运动的谱分析

§ 1 空间点的谱分析.....	143
§ 2 高度场纬向谱分析.....	174
§ 3 大气运动中物理量的谱分析.....	188
§ 4 高度场的球谐分析.....	217

第三章 时-空谱分析

§ 1 时-空谱的基本原理	254
§ 2 时-空谱的计算方法	259
§ 3 时-空谱分析的 Hayashi 方法	263
§ 4 大气运动各种波动的时-空谱表示	272
§ 5 时-空谱分析的 Hayashi 方法计算实例及应用...	289
§ 6 时-空谱分析的其它方法及应用	300

第一章 气象要素时间序列的谱分析

§ 1 谱的概念

在气象要素时间序列的分析和预报中，经常使用周期变化来描述它们随时间演变的规律性。这种周期的确定是通过谱分析方法来实现的。那末，谱的概念是什么呢？它与周期性又如何联系在一起呢？

我们先来看看气象要素随时间变化的实际例子。图 1.1 给出北京 1 月份气温年变化曲线，图中实线代表实测值，从

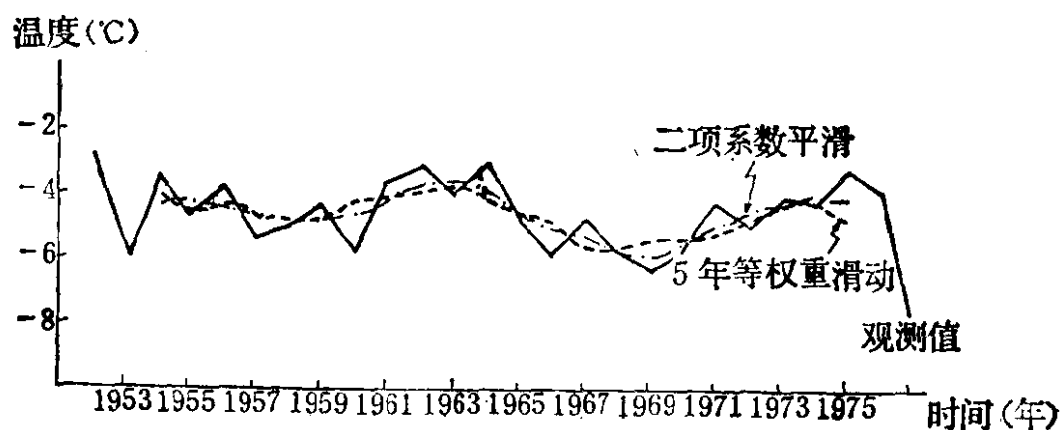


图 1.1 北京 1 月份气温年变化曲线

曲线变化中很难发现明显的周期变化现象。对原序列可以作某些平滑处理，如图中虚线和点虚线所示，稍可看到约有10年以上的周期变化。然而，较为精确的周期以及短于10年的周期变化均不易从这些时间曲线中发现。但是，如果我们把气象要素的时间变化曲线看成由多种不同频率振动的规则

波（正弦波或余弦波）迭加而成，然后在频率域上比较不同频率的波的方差贡献大小，就有可能分析出主要的振动，从而就可分析出振动的主要频率或周期。这种从频率域上对气象要素时间序列分析的方法就称为谱分析。

众所周知，对任一以周期 T 变化的时间函数 $f(t)$ ，在满足狄氏条件下，可以展成如下形式的傅里叶级数^[1-3]：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1.1)$$

若令

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

则有

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (1.2)$$

其中 ω_k 称为第 k 个谐波的圆频率。实际应用中，还常使用频率 f ，它与圆频率 ω 有如下关系：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.3)$$

因而

$$f_k = \frac{k}{T} \quad (1.4)$$

为简便起见，今后把频率与圆频率统称为频率。在 (1.2) 式中的 a_k 与 b_k 称为傅氏系统，它们可表示为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_k t dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \omega_k t dt \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 k 称为谐波的波数。(1.1)及(1.2)式表明,一般的时间函数可以看成由无穷个不同频率的振动波迭加而成。常常使我们更感兴趣的是了解这些振动的振幅及位相。利用尤拉公式容易把 (1.2) 式改写为

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - i b_k}{2} e^{i \omega_k t} + \frac{a_k + i b_k}{2} e^{-i \omega_k t} \right)$$

若令

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}$$

则该式可写为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t} \quad (1.6)$$

c_k 称为 $f(t)$ 的复谱。因为 c_k 是一个复数, 可以把 c_k 表示成振幅 A_k 和位相 θ_k 的形式:

$$c_k = A_k e^{-i \theta_k}$$

其中

$$A_k = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\theta_k = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_k}{a_k}$$

位相 θ_k 变化在 $0 \sim 360^\circ$ 或 $0 \sim 2\pi$ (弧度) 之间。在具体计算时, 可以根据 a_k, b_k 的符号来确定 θ_k 在第几象限的角度。例如: 当 $a_k > 0, b_k > 0$ 时, θ_k 在第一象限; $a_k < 0, b_k > 0, \theta_k$ 在第二象限; $a_k < 0, b_k < 0, \theta_k$ 在第三象限; $a_k > 0, b_k < 0$, 则 θ_k 为第四象限。通常把 A_k 称为振幅谱, θ_k 称为位相谱。由于它们均随波数 k 变化, 每个波数的谐波又对应于相应的频率, 故可以用 ω 为横坐标, 以 A_k, θ_k 为纵坐标作图, 这种图称为谱图, 如图 1.2 及图 1.3。图的横坐标有

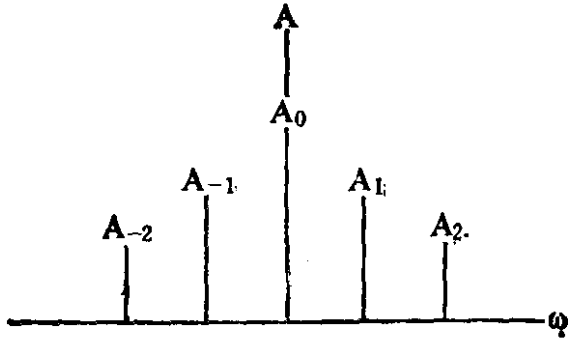


图 1.2 振幅谱图

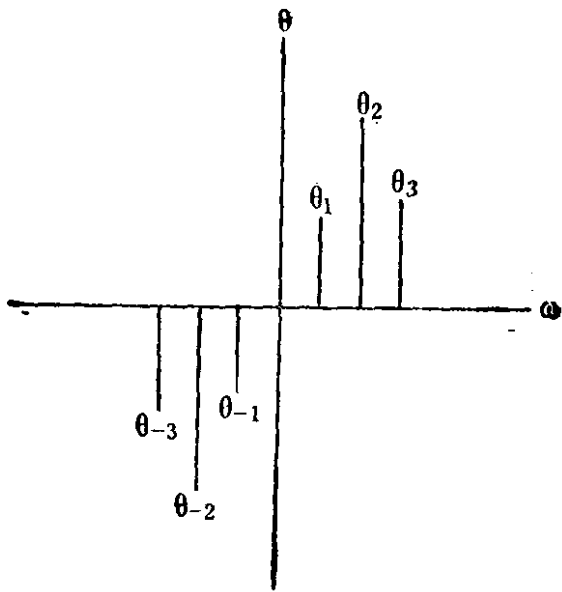


图 1.3 位相谱图

时用波数表示,有时用频率 f 表示,有时则用周期 T 表示。从图可见,由于 k 是整数,谱图中的曲线是不连续的,我们把这种谱称为离散谱或线谱。

复谱 c_k 与时间函数是可以互相表示的。对(1.6)式两边各乘以 $e^{-i\omega_{k'}t}$, 并在一个周期 T 上积分有

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_{k'}t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} dt$$

利用

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} dt = \begin{cases} T & \text{当 } k = k' \\ 0 & \text{当 } k \neq k' \end{cases}$$

有

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (1.7)$$

由(1.6)与(1.7)式构成时间函数与复谱的一一对应关系,这种关系又称为傅氏变换关系。

在气象分析中,仅了解某一时间间隔 T 内的波动情况是不够的,我们常希望了解在无限时间序列中各种连续频率的波动结构,这就有必要把离散谱推广到连续谱上面去。这时,只需把周期 T 推广至无限大即得。

把(1.5)式代入(1.2)式并利用三角函数和差化积公式可导出

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cos \omega_k(t - \lambda) d\lambda \quad (1.8a)$$

由于

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}, \quad \omega_{k-1} = \frac{2\pi(k-1)}{T}$$

则任意两个相邻谐波之间的频率差为

$$\Delta \omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2\pi}{T}$$

即

$$T = \frac{2\pi}{\Delta \omega}$$

代入(1.8 a)式有

$$f(t) = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cos[\omega_k(t-\lambda)] d\lambda$$

在把周期 T 推广至无穷大过程中, 任意两个相邻波数对应的谐波之间的频率差无限接近于 0, 即 $\Delta \omega \rightarrow 0$ 。这样一来, 对应离散波数的离散频率就变成是连续的, 从而得到连续的频率波动与 $f(t)$ 的关系式为

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos[\omega(t-\lambda)] d\lambda \quad (1.8 b)$$

进一步令

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos \omega \lambda d\lambda$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \sin \omega \lambda d\lambda$$

并设

$$\sin \theta(\omega) = \frac{b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$

$$\cos \theta(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$$

则

$$\operatorname{tg} \theta(\omega) = \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

据上面所设，显然有

$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$$

$\theta(\omega)$ 相当于离散谱的位相，它也称为连续谱中的位相谱。并记

$$A^2(\omega) = a^2(\omega) + b^2(\omega)$$

称为振幅谱。利用和差化积公式把(1.8 b)式变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left[\int_{-\infty}^\infty f(\lambda) \cos \omega \lambda \cos \omega t d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) \sin \omega \lambda \sin \omega t d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) [\cos \theta(\omega) \cos \omega t + \sin \theta(\omega) \sin \omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \cos [\theta(\omega) - \omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \cos [\omega t - \theta(\omega)] d\omega \end{aligned}$$

利用尤拉公式，上式变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty A(\omega) \{ e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} + e^{-i[\omega t - \theta(\omega)]} \} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty A(\omega) e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-i[\omega t - \theta(\omega)]} d\omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} d\omega \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i[(-\omega)t - \theta(-\omega)]} d\omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} d\omega \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 A(\omega) e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} d\omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\theta(\omega)} e^{i\omega t} d\omega
\end{aligned}$$

令

$$F(\omega) = A(\omega) e^{-i\theta(\omega)}$$

则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.9)$$

$F(\omega)$ 称为时间函数 $f(t)$ 的谱, 它也是复数, 可表示为

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= A(\omega) e^{-i\theta(\omega)} = A(\omega)(\cos \theta(\omega) - i \sin \theta(\omega)) \\
&= a(\omega) - i b(\omega)
\end{aligned} \quad (1.10)$$

复谱的实部就相当于离散谱中的傅里叶系数 a_k , 虚部就相当于 b_k 。而振幅谱就相当于离散谱的振幅谱 $[A(\omega) \sim A_k]$, 位相谱 $\theta(\omega)$ 相当于 θ_k 。把 $a(\omega)$ 与 $b(\omega)$ 的表达式代入(1.10)式有

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos \omega \lambda d\lambda - i \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \sin \omega \lambda d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt
\end{aligned} \quad (1.11)$$

如果令

$$\begin{cases} a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos \omega \lambda d\lambda \\ b(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \sin \omega \lambda d\lambda \end{cases}$$

则可写出复谱 $F(\omega)$ 与时间函数 $f(t)$ 之间的关系式为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

上式与 (1.11) 式都可以作为计算时间函数 $f(t)$ 的复谱的计算式，它们仅有比例常数 $\frac{1}{2\pi}$ 的差别。

时间函数与它的复谱的关系本来可以作为时间序列分析的工具。但由于复谱是复数，使用不便；而且，在对组成时间序列中各种波动来说，我们感兴趣的仅是哪个周期波动起主要作用，即仅对它们的方差贡献感兴趣，因而在时间序列分析中常用的是功率谱，也有称为方差谱或能谱^[1~4]。在一般的气象要素时间序列周期分析中，大多采用这一分析方法，有时又简称它为谱分析。

按照一般的物理模型，若其电阻为 1 个单位，瞬时电压用 $f(t)$ 表示，则它的瞬时功率为 $f^2(t)$ ，它的总能量为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

从统计观点来看，上式就表示以数学期望为 0 的 $f(t)$ 的方差。对于这种总能量或总方差，可以分解为各种波动的部分能量或方差之和。功率谱分析就是在这种概念下产生的。它

和时间函数本身的谱相对应，也有离散功率谱与连续功率谱之分，我们将在下面分别进行介绍。

设时间函数 $f(t)$ 及 $g(t)$ 具有相同的周期 T ，据(1.6)式可分别表示为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t}$$

$$g(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} d_{k'} e^{i \omega_{k'} t}$$

将上两等式两边的项相乘并取积分，有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_k d_{k'} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_k d_{k'} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} dt \end{aligned}$$

利用

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} dt = \begin{cases} 1 & (k + k' = 0) \\ 0 & (k + k' \neq 0) \end{cases}$$

可得

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{-k} \tag{1.12}$$

由于负波数的复谱就等于正波数复谱的共轭

$$d_{-k} = d_k^*$$

则有

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k^* \tag{1.13}$$

对于时间函数的方差或平均功率的情况，只要把上面两个时

间函数取成相同的即可，即 $f(t) = g(t)$ 。于是有

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \quad (1.14)$$

但是

$$c_k c_k^* = |c_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$$

若令

$$S_k'^2 = |c_k|^2 \quad (1.15)$$

则(1.14)式可表示为

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k'^2 \quad (1.16)$$

由于 $S_k'^2$ 表示第 k 个谐波振幅平方，因此上式表示，时间函数 $f(t)$ 的平均功率（或方差）可以用各谐波振幅平方（或各谐波方差）之和表示。这就是时间函数功率在频率域上的分解，因而称 $S_k'^2$ 为时间函数 $f(t)$ 的（离散）功率谱。

容易看到，利用(1.16)式和(1.15)式可以作出离散功率谱的谱图，谱图可以用波数 k 为横轴，功率谱值 $S_k'^2$ 为纵轴作出。离散功率谱图也是一种线谱，显示在正、负横轴之间。

事实上，在离散功率谱图上正、负横轴两半的功率谱线是对称的，即

$$S_k'^2 = S_{-k}'^2$$

因而，通常离散谱图仅绘出正半轴的一半。这时，(1.16)式写为

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} S_k'^2$$

或简写为