

压电晶体陀螺

张福学 编著

HK15106



国防工业出版社

内 容 简 介

压电晶体陀螺是应用压电晶体的固体性能（压电现象）来敏感旋转速率的一种惯性器件。它可用在飞机、舰船、导弹的稳定系统中。

压电晶体陀螺有振梁式、圆管式、音叉式、圆盘式等多种结构。振梁式压电晶体陀螺的主体结构简单，性能优于其它结构的压电晶体陀螺。本书重点叙述振梁式压电晶体陀螺的工作原理、结构、电路设计以及性能试验。

本书可供研究、生产和使用陀螺的工程技术人员以及有关专业的高等院校师生阅读。

压 电 晶 体 陀 螺

张 福 学 编 著

国防工业出版社出版

本书在北京发行所发行 各地新华书店经售

上海商务印刷厂排版 国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/16 印张 9 1/2 215 千字

1981 年 1 月第一版 1981 年 1 月第一次印刷 印数：0,001—1,900 册

统一书号：15034·2028 定价：1.00 元

前 言

压电晶体陀螺是应用压电晶体的固体性能(压电现象)来敏感旋转速率的一种惯性器件,所以又称固体压电陀螺。它消除了普通陀螺的旋转部分,成功地解决了长寿命、高可靠性问题,是陀螺发展史上的一次重大变革。这种陀螺的出现,改变了陀螺的概念;但因它具有陀螺的功能,所以在本书里仍称为陀螺。严格地说,按钱学森教授的意见,压电晶体速率陀螺(本书统称压电晶体陀螺)应称为压电晶体速率表。

压电晶体陀螺有振梁式、圆管式、音叉式、圆盘式等多种结构。振梁式压电晶体陀螺的基本结构是一根矩形弹性梁,在其节点支撑,以其基波弯曲频率振动。它主体结构简单,性能优于其它结构的压电晶体陀螺。本书重点叙述振梁式压电晶体陀螺。

压电晶体陀螺已在导弹、飞机和舰船中使用,并有可能在坦克和自行火炮中使用。当使用精密的积分器时,在系统中它还具有提供姿态参考的功能。灵敏限为 $0.001^\circ/\text{秒}$ 以下的压电晶体陀螺还可考虑用于卫星姿态控制。当加上微分器时,它能敏感角加速度,具有陀螺角加速度表的功能,有着广泛的用途。压电晶体陀螺的应用还刚刚开始,其意义不仅在于能在某些方面取代普通陀螺,更重要的是,它能在一些应用方面满足普通陀螺所不能达到的要求。例如,压电晶体陀螺能满足炮射导弹设计要求的小体积和承受 $8000g$ 冲击;能达到卫星和舰船要求的长寿命;可实现 $500^\circ/\text{秒}$ 以上大角速度的精确测量。

我国压电与声光技术研究所研制的压电晶体速率陀螺,首先用于导弹和舰船,达到世界先进水平,荣获全国科学大会奖。

本书主要根据美国通用电气公司的几篇资料,结合作者在工作中的体会编著而成。其中有的章节是按原文编译的。

在编写本书的过程中,各级领导给予了大力支持;北京航空学院于波同志和北京工业学院陈峰浴同志进行了认真的审校;苏广平、卿荣康和陈伯泉等同志提了许多宝贵意见;周远兴等同志描绘了插图。在此谨表示深切的谢意。

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 压电晶体陀螺与普通陀螺的比较	1
§ 1.2 压电晶体陀螺的试验和使用情况	3
§ 1.3 曲折的发展史	4
§ 1.4 光明的前途	5
第二章 基本概念	6
§ 2.1 压电现象	6
§ 2.2 一般压电方程	7
§ 2.3 哥氏加速度与哥氏力	8
§ 2.4 两端自由梁的自由横振动	13
§ 2.5 驱动力	15
第三章 工作原理	17
§ 3.1 在直角坐标系中运动方程的推导	17
§ 3.2 恒速率时的灵敏度	19
§ 3.3 谐振频率间隔	19
§ 3.4 带宽——陀螺的频率响应	20
§ 3.5 在极坐标系中运动方程的推导	23
§ 3.6 圆管式压电晶体陀螺	25
§ 3.7 压电——压磁振动陀螺	26
第四章 振梁式压电晶体陀螺的研究	27
§ 4.1 概述	27
§ 4.2 沿振动轴的梁的驱动振动——换能器力和电压的关系	27
§ 4.3 由角速率引起的输出轴运动	29
§ 4.4 陀螺零位漂移和噪声的来源	30
§ 4.5 振梁式压电晶体陀螺的数学模型	33
第五章 圆管式压电晶体陀螺的研究	35
§ 5.1 性能方程	35
§ 5.2 等效电路	43
§ 5.3 假的电输出	45
第六章 振梁式压电晶体陀螺的设计和分析	46
§ 6.1 机械设计和分析	46
§ 6.2 敏感轴的研究	49
§ 6.3 两端自由梁夹持支撑型陀螺的结构和讨论	51
§ 6.4 两端自由梁 O 环支撑型陀螺的结构	55
§ 6.5 两端固定梁陀螺的结构和讨论	55
§ 6.6 两端自由梁平衡环支撑型陀螺的结构	56
§ 6.7 陀螺的装配设计	59

第七章 圆管式压电晶体陀螺的工艺研究	61
§ 7.1 设计规范	61
§ 7.2 压电陶瓷元件的机加工	62
§ 7.3 电极	62
§ 7.4 极化	63
§ 7.5 压电陶瓷体的安装技术	66
§ 7.6 电路	67
第八章 振梁式压电晶体陀螺的电路研究	73
§ 8.1 电路的分析和设计	73
§ 8.2 试验电路	81
§ 8.3 陀螺产品的电路说明	85
§ 8.4 压电陀螺在飞行器稳定系统中的作用及方块图	88
第九章 压电晶体陀螺的一般性能试验	91
§ 9.1 敏感器件的性能测试	91
§ 9.2 敏感器件的性能	92
§ 9.3 频率响应和阻尼系数	94
§ 9.4 起动时间	95
§ 9.5 功率、尺寸和重量	96
第十章 压电晶体陀螺的运算试验	97
§ 10.1 灵敏限	99
§ 10.2 线性度和比例系数	104
§ 10.3 滞后现象	111
§ 10.4 轴间交叉耦合	111
§ 10.5 准备时间	112
§ 10.6 长期漂移	112
§ 10.7 运算寿命	113
§ 10.8 零位稳定性	114
§ 10.9 电源电压灵敏度	114
第十一章 压电晶体陀螺的环境试验和可靠性试验	115
§ 11.1 零位电压随温度的漂移	115
§ 11.2 比例系数随温度的变化	118
§ 11.3 振动试验	118
§ 11.4 过载试验	134
§ 11.5 冲击试验	136
§ 11.6 噪声试验	137
§ 11.7 环氧乙烷清洁处理和热稳定性试验	137
§ 11.8 振梁式压电晶体陀螺的故障及讨论	139
§ 11.9 圆管式压电晶体陀螺的可靠性试验	140
§ 11.10 提高性能的途径	143
§ 11.11 结论	144
参考资料	144

第一章 绪 论

陀螺和加速度表是姿态控制和惯性制导的核心器件。随着宇宙航行技术的发展,特别是卫星和洲际导弹的发展,要求姿态控制和惯性制导系统进一步提高精度,能适应各种恶劣环境,小功率,长寿命及体积小。例如,洲际导弹要达到 200 米的命中准确度,要求加速度表的精度为 10^{-6} ,陀螺漂移小于 0.01 度/时。

普通惯性器件有滚珠轴承支承的高速转动部分,结构复杂,要求精密加工,这就影响了工作的可靠性、精度、寿命和尺寸。因此,在使用机电式陀螺的同时,一方面改进转动轴承的支承形式,另一方面探索无转动轴承的惯性器件。自 1946 年以来,先后改进和探索过三环轴承式、液浮、气浮、磁悬浮、静电悬浮、核子、超低温、激光、音叉、射流、压模轴承、挠性、表面波及压电晶体等陀螺;但大量应用的只有液浮和气浮陀螺。压电晶体陀螺虽然有二十多年的发展史,但国外至今还未正式把它列入新型陀螺。起初它引起了人们的很大兴趣,但后来发现它有很大的局限性,因此发展极缓慢。近年来,似乎又受到重视。这种陀螺的主要特点是,没有转动部分,而输出信号中有振动成分。本书将详细介绍刚进入应用阶段的新型压电晶体陀螺。

§ 1.1 压电晶体陀螺与普通陀螺的比较

普通陀螺是一种利用高速转子的惯性器件。由于有转动部分,因此存在许多不受欢迎的特性,这就是:由于轴承磨损,每次维修后的使用时间受到限制;陀螺转子具有角位移,这导致输出信号非线性误差;由于转子的惯性,引起滞后误差;机械部件多,结构复杂;由于机械误差和摩擦干扰,使仪表灵敏度降低;大量精密机械部件的加工导致高成本;功率消耗大;由于有转动部分,大量的部件需要密封,使可靠性变差。曾试图消除这些不良特性,例如用静电或气浮支承,以便减小摩擦和提高可靠性,但是并没有简化造成高成本的复杂制作工艺。

为了克服普通陀螺的不良特性而促进了新型陀螺的研究。压电晶体陀螺就是其中的一种^[1,2]。

压电晶体陀螺没有轴承,因此寿命仅取决于材料的疲劳寿命^[3]和电子器件的可靠性。材料的疲劳寿命可以说是无限的^[3],所以陀螺的寿命实际上几乎完全决定于电子器件的可靠性。随着电子器件可靠性的不断提高,压电晶体陀螺的寿命也就不断增长,其寿命大约为普通陀螺或线性加速度表的 25 倍^[2]。

普通陀螺的线性度由其支架偏转角和读出机构的线性度确定。压电晶体陀螺的位移实际上为零,且读出装置的线性度很好,这就使压电晶体陀螺的线性度比普通陀螺的线性度约高 10 倍^[3]。

因为压电晶体陀螺的位移可以忽略不计,所以压电晶体陀螺的滞后比一般陀螺的滞后低 10 倍^[3]。

压电晶体陀螺由于结构简单,没有转动部件,所以可靠性显著高于普通陀螺。现在估

计,压电晶体陀螺的可靠性比普通陀螺要高5倍^[3]。

压电晶体陀螺的灵敏限仅由振动材料的晶体内摩擦和读出装置的灵敏限确定。压电晶体陀螺的理论灵敏限可达到0.002度/时,比普通陀螺的灵敏限优越四个数量级^[3]。但实际上,灵敏限还受到由于陀螺结构不对称而在运动时引起的假振动的限制,如果制作工艺不能保证较好的结构对称,也许灵敏限还会低于普通陀螺^[7]。

不象普通陀螺那样,压电晶体陀螺在理论上没有测量上限。据美国通用电气公司报导,使用压电晶体陀螺可测量高达1300度/秒的角速率。测量下限受输出信号中杂音的限制^[1]。

因为压电晶体陀螺没有旋转部分,所以其结构可大大地简化。压电晶体陀螺只是一个敏感器件,对于振梁式结构,其敏感轴非常简单,是一根实芯的矩形弹性梁,梁的尺寸误差要求很严格。此外,压电晶体陀螺不要求控制安装和修理的环境,产品可放在普通的工作房间内^[2,3]。

压电晶体陀螺的价格估计为普通陀螺的四分之一^[3]。其成本主要取决于固体电路的售价。在线性固体电路昂贵的情况下,压电晶体陀螺的价格不比普通陀螺低,并且最初可能更贵一些^[1]。但压电晶体陀螺的最大优点是,用无转动部分的角速率敏感器件代替旋转质量的普通陀螺,打破了普通陀螺的长期独占地位,使每次维修后的使用时间有希望增加10倍^[1]。因此,压电晶体陀螺对用户是非常经济的。

压电晶体陀螺用直流电源工作,并且总功耗小于1瓦^[1]。输出信号也是直流的^[1]。普通陀螺的陀螺马达信号器和力矩器通常要用交流电源,功耗达2~6瓦^[1,3]。与普通陀螺不同,压电晶体陀螺输出信号的比例系数,只须调整电位器,即能满足系统的需要,而普通陀螺的机械设计是不可调整的^[1,5]。

现在,包括电路的压电晶体陀螺,其尺寸为106×81×30毫米,重约400克。使用硅集成电路可以进一步小型化到76×38×19毫米,重85克^[2]。试验室模型测试表明,压电晶体陀螺的灵敏度与尺寸无关,因此它的尺寸将来可做得很小。包括驱动和读出电路的完整压电晶体陀螺体积约为645毫米³,重约28克^[3]。普通陀螺需要一个很大的陀螺专用电源,因此使用普通陀螺需要占整机的体积和重量远远超过压电晶体陀螺。

与普通陀螺相比,压电晶体陀螺的另一个重要优点是,本身容易监控。普通陀螺通常用

表 1.1 普通陀螺与压电晶体陀螺性能比较表^[3]

性 能 \ 陀 螺	普 通 陀 螺	压电晶体陀螺
起 动 时 间	10 秒	1 秒
功 率 消 耗	2~6 瓦	0.100 瓦
灵 敏 限	0.01 度/秒	≪0.01 度/秒
动 态 范 围	±200 度/秒	±500 度/秒
全 量 程 线 性 度	5%	1%
比 例 系 数	30 毫伏/度/秒	20 毫伏/度/秒
滞 后	0.08%	0.007%

一个小的附加永久磁铁和绕组对陀螺马达的转动进行监控, 而压电晶体陀螺的监控和校准用现有电路实现^[1]。

压电陀螺的性能, 除零位电压的温度稳定性外, 均超过普通陀螺的性能指标, 表 1.1 证明了这一点。所引用的普通陀螺性能是一般的飞机控制系统用速率陀螺的鉴定结果, 压电晶体陀螺的数据是试验室模型的测量结果。由于压电晶体陀螺有寿命长、精度高、动态范围宽、功耗小、直流工作及频带宽等优点, 所以特别适于长期在空间和水上执行任务^[4]。

§ 1.2 压电晶体陀螺的试验和使用情况

美国通用电气公司制作了几套压电晶体陀螺模型。当工作电源为 ± 15 伏, 消耗功率为 1 瓦时, 陀螺的寿命设计为 50000 小时, 预期寿命 20000 小时, 消耗功率为 4 瓦^[2]。在试验室进行了 84000 小时的寿命试验没有发生故障。预计发生故障的平均间隔为 42000 小时, 大约是普通陀螺故障间隔的 5 倍。通用电气公司给出的测量下限为 0.01 度/秒, 线性度为 1% (普通陀螺线性度一般为 2.5%), 并且没有发生滞后现象^[1]。

美国通用电气公司制作了 15 套压电晶体陀螺, 一部分卖给海空军组织指挥部, 在波音 707、波音 727、波音突击 80、苏格兰 F-4、DC-9 和 A-10 等飞机的稳定系统内作了飞行试验。两套送给航宇局试验室进行试验。在波音 707 飞机的稳定系统中累计航行时间超过 30000 小时没有失效, 并且总的漂移小于 1 度/秒。美国空军已正式将压电晶体陀螺选用于 A-10 系统以增大其稳定性, 并且已批量生产。

我国压电与声光技术研究所研制和生产的压电陀螺, 1976 年正式用于导弹和舰船。

美国通用电气公司的压电晶体陀螺, 达到如下技术指标:

- | | |
|-----------|---|
| 1) 敏感范围 | ± 50 度/秒 = ± 5 伏 |
| 2) 灵敏限 | 0.1 度/秒 |
| 3) 滞后 | 抵偿后输出为零 |
| 4) 漂移 | 0.13 度/秒 (抵偿输出) |
| 5) 线性度 | $\ll 1\%$ (全量程) |
| 6) 轴间交叉耦合 | $< 1\%$ |
| 7) 工作温度范围 | $+20 \sim +70^\circ\text{C}$ |
| 8) 频率响应 | > 20 赫 |
| 9) 阻尼 | 0.31 ~ 0.42 |
| 10) 功率 | < 1 瓦 |
| 11) 振动 | 在三轴方向 |
| | 正弦曲线: 5 ~ 2000 赫, 1 g 检查谐振 |
| | 6 ~ 14 赫, 振幅 12.7 毫米 |
| | 14 ~ 2000 赫, $\pm 5 g$ |
| | 5 ~ 2000 赫扫描全循环, 时间 1 分钟 |
| | 随机: 频谱 20 ~ 2000 赫, $0.5 g^2/\text{赫} = 31.5 g$ 有效值, 2 分钟 |
| 12) 冲击 | 冲击加速度 100 g |
| | 冲击方向 相互垂直的每个方向 |
| | 冲击次数 2 次 |

冲击持续时间 1.0 毫秒

13) 线性过载 在 45g 时, 相互垂直的三个方向各 1 分钟

14) 噪声 除持续时间为 2 分钟外, 按军用标准 810B 方法 515 类 B 进行(150 分贝)

§ 1.3 曲折的发展史

很久以来, 人们试图应用压电效应和反压电效应的原理来敏感惯性力或线加速度。大约在 1950 年, 美国就开始研制利用压电效应和反压电效应的固体陀螺, 先后研制过的公司有六个以上, 但几乎都是半途而废, 至今未见正式使用。例如, 最早探索的是古德伊尔公司, 在 1952 年、1955 年曾作过探索性研究报告。至 1955 年以后进行研究的是克勒维特公司和古尔顿仪表公司。后者进行了约六年的研究之后于 1961 年提出研制报告, 对压电音叉型速率陀螺作了较多的理论阐述; 然而离应用还有很大距离, 特别是性能不稳定和重复性差的问题未能解决, 研制工作即告停止。1961 年开始进行压电晶体陀螺研制的是西屋电气公司、通用电气公司和空军诺斯罗普公司。西屋电气公司研究管型压电晶体陀螺, 诺斯罗普公司研究扭转式压电晶体陀螺, 通用电气公司则研制振梁式压电晶体陀螺。前二者的研制工作获得了陀螺效果, 但由于零位电压不稳定及工艺困难, 故未深入研究也告停止。虽然振梁式压电晶体陀螺成效较好, 但目前也只在 A-10 飞机稳定系统中选用。

振梁式压电晶体陀螺的前景虽较好, 但发展也极缓慢。1964 年通用电气公司作了原理性的报导, 1966 年在设计、制造和试验方面作了一些工作, 样机得到了表 1.2 的性能。1967 年通用电气公司又对这种陀螺的灵敏限和零位稳定性作了进一步改进, 获得表 1.3 的试验模型性能。1980 年 3 月美国通用电气公司告诉我们, 他们研制的压电晶体陀螺在 6 种飞机上使用过, 但选用的还仅有 A-10 飞机。发展不快的原因是压电晶体陀螺在研制过程中遇到了如下不易攻克的技术难关:

1) 对振动敏感; 2) 零位随温度的变化大; 3) 对加速度敏感; 4) 零位漂移大; 5) 零位重复性差。

这些技术难关不是克服不了的, 但要解决这些问题则并不是轻而易举的。

表 1.2 1966 年压电晶体陀螺模型的性能

1. 灵敏限	0.01 度/秒	11. 温度范围	+20+70°C
2. 线性度	1%(全量程)	12. 自然频率	48 赫
3. 比例系数	0.05~0.070 伏/度/秒	13. 阻尼系数	0.02~0.03
4. 比例系数随温度变化 (0~100°C)	10%	14. 最大角速度	50~1300 度/秒
5. 动态范围	±9 伏	15. 功率	1 瓦, ±14 伏
6. 短期漂移	0.02 度/秒	16. 起动时间	1~3 秒
7. 长期漂移	0.02 度/秒/时	17. 寿命	1 年
8. 零位漂移	0.4 度/秒	18. 滞后	临界值
9. 频率响应	300 弧度/秒	19. 交叉耦合	0.1%
10. 温度漂移(+20~+70°C)	~+5 度/秒	20. g 灵敏度	+0.1 度/秒/g -0.06 度/秒/g ²

表 1.3 1967 年压电晶体陀螺模型性能

1. 灵敏限	~ 0.002 度/秒	8. 阻尼系数	0.6
2. 线性度	$\leq 1\%$ (逐点线性度)	9. 零位随温度的变化 ($-10 \sim +70^\circ\text{C}$)	$< \pm 6$ 度/秒
3. 比例系数	0.395 伏/度/秒	10. 零位随振动的变化 (lg, 0~1500 赫)	< 0.25 度/秒
4. 动态范围	± 10 伏	11. 输出阻抗	< 500 欧
5. 零位不稳定性	0.15 度/秒	12. 功率	2 瓦, ± 15 伏
6. 频率响应	1 分贝 (到 40 赫)		
7. 自然频率	63 赫		

§ 1.4 光明的前途

宇宙航行技术的发展要求姿态控制和惯性制导系统用的陀螺和加速度表实现小型化、固体化,并且寿命长、可靠性高、功耗小,能适应各种恶劣环境。因此压电晶体陀螺的出现是宇宙航行技术发展的要求。

虽然以今天的标准来看,压电晶体陀螺的电路并不十分复杂,但在早期的电子管时代,尺寸和重量都不可能做得很小^[1],只有在今天能采用固体电路和混合集成电路的情况下,压电晶体陀螺才可能实现固体化。因此,压电晶体陀螺的出现也是微电子技术发展的结果。

压电晶体陀螺的出现,其意义不仅在于增加了一种惯性器件的新品种,更重要的是提供了一种设计微小型固态惯性器件的新概念。因此,虽然研制进展缓慢,但研制工作总是在断断续续进行。显然,随着微电子技术的进一步发展,特别是大规模集成电路和混合集成电路的进一步完善,电子器件可靠性的进一步提高,以及压电晶体陀螺原理、结构、制作工艺的研究进一步深入,压电晶体陀螺必将获得广泛的应用。

第二章 基本概念

§ 2.1 压电现象

当在压电晶体(单晶或陶瓷)上加负荷时,晶体面上就出现电荷。例如,在 1000 克/厘米^2 的压力下,石英晶体在两个相对面上能够发生 0.06 伏 的电位差。反之,若将晶体置于电场中,电场将使晶体产生机械应力和形变。这种现象称为压电效应。

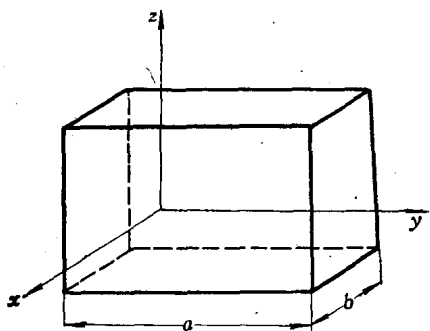


图 2.1 石英的平行六面体

压电效应分正、逆两种。加应力于晶体而引起晶体表面出现电荷,这叫做正压电效应。反之,在晶体上施加电场,使晶体产生形变或应力,称为逆压电效应(或反压电效应)。在压电晶体陀螺内,则是利用了压电体的这种正压电效应和反压电效应。

外加应力的方向跟极化方向相同或在外加电场方向上产生应力,称为纵效应。应力与极化方向成直角时,称为横效应。例如,从石英晶体上切割出一个矩形六面体,如图 2.1 所示, z 轴即光轴、 x 轴即电轴、 y 轴即机械轴。当平行于 x 轴的压缩力 T 作用于如此切割的压电石英上时,在垂直于 x 轴的面上就出现等量而符号相反的电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。电量 Q 与压缩力 T 成正比,而和石英板大小无关。

$$Q_{11} = KT \quad (2.1)$$

这就是纵压电效应。 K 称为石英晶体的压电常数。如果 Q 的单位为 CGSE 电荷单位, T 的单位为达因,则压电常数约等于 6.5×10^{-18} 。

如果作用力 T 平行于光轴(z 轴),观察不到电荷。

如果作用力 T 平行于 y 轴,则在垂直于 x 轴的平面内也会产生电荷,但电荷符号与纵效应的相反,这就是横压电效应。这时在每一面上发生的电量 $Q_{\perp}$ 为

$$Q_{\perp} = K \frac{a}{b} T \quad (2.2)$$

式中 K 和上式一样,为石英晶体的压电常数; a 是在力 T 作用方向上板的宽度; b 是在电轴方向上板的厚度。振梁式压电晶体陀螺就是用横压电效应。

力的符号改变时,电荷 Q 的符号也随着改变。如果压缩时在面上出现正电荷,则伸长时在面上出现负电荷;反之亦然。

所有晶体被划分为 32 种类型。在没有对称中心的 21 类晶体中有 20 种具有压电效应,而 20 种压电晶体中又有 10 种具有热释电现象。

大多数天然晶体和人造晶体都做过压电效应的试验;但实际应用则要求有大的压电效应、绝缘性良好、机械特性好,还要求稳定的物理化学性能。现在使用的有石英、罗谢尔盐、ADP、KDP、铌酸锂、钽酸锂、氧化锌及压电陶瓷等。

石英和压电陶瓷是研制压电晶体陀螺的最重要的材料。石英属于三角形梯面体类(18

类),有良好的机械性能和高 Q_M , 特别是, 其频率和容量的温度性能好。目前用得较多的是属于双六重极性类(26类)的钛锆酸铅压电陶瓷。虽然它的温度特性差, 但极化方向和形状能任意选择, 甚至可在同一瓷体内以不同方向极化, 如圆管式压电晶体陀螺。石英则要求晶轴有一个特定的取向。陶瓷, 特别是改性 PZT 压电陶瓷, 其居里温度超过 300°C , 电机耦合系数高达 0.7 以上, 这是目前压电晶体陀螺可选用的较好材料。显然, PZT 压电陶瓷也不是理想的压电晶体陀螺用材料。理想的材料是高灵敏度、高稳定性的压电单晶或多晶陶瓷, 压电铌酸锂单晶有可能成为这样的材料。

§ 2.2 一般压电方程

本节列出一般压电方程式。温度(熵)假定恒定, 故无热变化存在。如果是低电场和低应力, 则这些方程式可用于压电晶体和压电陶瓷。按照 IRE 标准, 符号和单位都是 MKS 制。方程用矩阵形式而不用张量形式。

$$T = c^D S - h_t D \quad (2.3)$$

$$E = -hS + \beta^S D \quad (2.4)$$

$$S = s^D T + g_t D \quad (2.5)$$

$$E = -gT + \beta^T D \quad (2.6)$$

$$S = s^E T + d_t E \quad (2.7)$$

$$D = dT + \varepsilon^T E \quad (2.8)$$

$$T = c^E S - e_t E \quad (2.9)$$

$$D = eS + \varepsilon^S E \quad (2.10)$$

$$s^E - s^D = g_t d = d_t g \quad (2.11)$$

$$c^D - c^E = h_t e = e_t h \quad (2.12)$$

$$\varepsilon^T - \varepsilon^S = e d_t = d e_t \quad (2.13)$$

$$\beta^S - \beta^T = g h_t = h g_t \quad (2.14)$$

$$d = \varepsilon^T g = e s^E \quad (2.15)$$

$$e = d c^E = \varepsilon^S h \quad (2.16)$$

$$g = h s^D = \beta^T d \quad (2.17)$$

$$h = \beta^S e = g c^D \quad (2.18)$$

$$s^D = (c^D)^{-1} \quad (2.19)$$

$$s^E = (c^E)^{-1} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^T = (\beta^T)^{-1} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon^S = (\beta^S)^{-1} \quad (2.22)$$

以上各式中 S ——弹性应变;
 T ——弹性应力(牛顿/米²);
 c ——弹性刚度常数(牛顿/米²);
 s ——弹性柔顺常数(米²/牛顿);
 E ——电场强度(伏/米);
 D ——电位移(库仑/米²);
 ε ——介电常数(法拉/米);

β —— ϵ^{-1} (介电隔离率)(米/法拉);

d ——压电应变常数(米/伏=库仑/牛顿);

e ——压电应力常数(库仑/米);

g ——压电电压常数(米·伏/牛顿=米²/库仑);

h ——压电劲度常数(伏/米=牛顿/库仑)。

上述各式中上标表示保持恒定的变量, -1 幂数表示反矩阵, 下标表示变换矩阵。

带有不独立变量 S 和 T 的方程式代表正压电效应; 带有不独立变量 D 和 E 的方程式代表反压电效应。压电陶瓷所用的一些系数如下:

$$[c^D] = \begin{bmatrix} c_{11}^D & c_{12}^D & c_{13}^D & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^D & c_{11}^D & c_{13}^D & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^D & c_{13}^D & c_{33}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} (c_{11}^D - c_{12}^D) \end{bmatrix}$$

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta^S] = \begin{bmatrix} \beta_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33}^S \end{bmatrix}$$

方程(2.3)和(2.4)用常用矩阵符号则为

$$[T] = [c^D][S] - [h_t][D]$$

$$[E] = -[h][S] + [\beta^S][D]$$

弹性常数有 5 个独立的, 对于各向同性固体:

$$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = c_{44}; \quad c_{11} = c_{33}; \quad c_{12} = c_{13}$$

拉曼常数定义 $\lambda = c_{12}$ 和 $\mu = c_{44}$, 故 $c_{11} = \lambda + 2\mu$ 。如果方程(2.3)到(2.22)中 D 、 E 和 s 分别用 B 、 H 和 μ 代替, 即得磁性材料的磁致伸缩方程。二组方程的相似性说明, 用压电效应完成的许多功能可用磁致伸缩方式完成。理论上, 全磁致伸缩振动陀螺仪是能做的, 不过主要障碍是要在圆筒形元件内形成边缘和扭转模式所用的磁化区域。复合式的压电-磁致伸缩陀螺已经成功地实现了^[8]。

§ 2.3 哥氏加速度与哥氏力

当牵连运动为移动时, 点的绝对加速度 $\vec{a}_a$ 等于牵连加速度 $\vec{a}_e$ 与相对加速度 $\vec{a}_r$ 的向量和。即

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \quad (2.23)$$

当牵连运动为定轴转动时, 点的绝对加速度 $\vec{a}_a$ 又等于什么呢? 我们通过下面的例子来讨论这个问题。

设一个小球在圆盘上半径为 $\vec{r}$ 的圆槽内, 相对圆盘以大小不变的速度 $\vec{v}_r$ 作圆周运动; 同时, 圆盘以等角速度 $\vec{\omega}$ 绕轴 O 转动, 如图 2.2 所示。

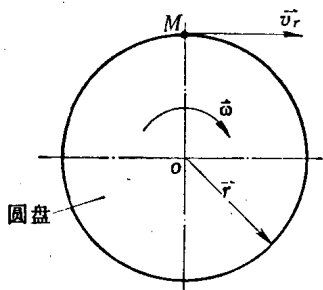


图 2.2 物体在转动圆盘上沿圆盘的同心圆周运动

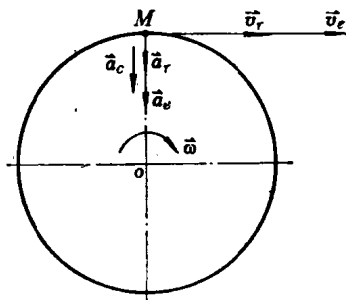


图 2.3 物体在转动圆盘上沿圆盘的同心圆周运动时的速度和加速度

将小球看成是一个动点 M , 取圆盘为动系, M 点的相对运动是此点对圆盘作的以 $\vec{r}$ 为半径的等速圆周运动, 相对速度为 $\vec{v}_r$; 相对加速度 $\vec{a}_r$ 的方向指向圆心 O , 如图 2.3 所示, 大小为

$$a_r = \frac{v_r^2}{r} \quad (2.24)$$

圆盘绕轴 O 作定轴转动, 转动的角速度为 $\vec{\omega}$, M 点的牵连速度 $\vec{v}_e$ 为

$$v_e = r\omega \quad (2.25)$$

牵连速度 $\vec{v}_e$ 的方向为沿半径为 $\vec{r}$ 的圆的切线。牵连加速度 $\vec{a}_e$ 的方向指向轴 O , 大小为

$$a_e = r\omega^2 \quad (2.26)$$

M 点的绝对运动, 也是半径为 $\vec{r}$ 的圆周运动, 由于 $\vec{v}_r$ 和 $\vec{v}_e$ 同向, 故 M 点绝对速度 $\vec{v}_a$ 的大小为

$$v_a = v_e + v_r = r\omega + v_r = \text{常数} \quad (2.27)$$

由此可知, M 点的绝对运动是等速圆周运动。 M 点的绝对加速度 $\vec{a}_a$ 的方向指向圆心, 大小为

$$a_a = \frac{v_a^2}{r} = \frac{(r\omega + v_r)^2}{r} = \frac{v_r^2}{r} + r\omega^2 + 2\omega v_r \quad (2.28)$$

由绝对加速度的表达式 (2.28) 和牵连运动为移动时的绝对加速度的表达式 (2.23) 可看出, 当牵连运动为定轴转动时, 在绝对加速度的表达式中, 增加的 $2\omega v_r$ 项称哥氏加速度。

哥氏加速度 $a_e = 2\omega v_r$ 的产生, 是由于转动的牵连运动和相对运动相互影响的结果。为了说明这个问题, 我们来讨论下面的例子。

设有一直杆 OA 在平面内以角速度 $\vec{\omega}$ 绕轴 O 作定轴转动, 动点 M 沿 OA 杆滑动, 以相对速度 $\vec{v}_r$ 、相对加速度 $\vec{a}_r$ 作变速直线运动, 如图 2.4 所示。

取 OA 为动系。经过一个很短的瞬间 Δt , 转过了一个角度 $\Delta\varphi$ 。

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \quad (2.29)$$

在时间 t , 质点位于 M , 经过 Δt 后, 质点位于 M' , 牵连速度 $\vec{v}_e$ 变为 $\vec{v}'_e$, 而相对速度 $\vec{v}_r$ 变为 $\vec{v}'_r$ 。

在时间间隔 Δt 内, $t' = t + \Delta t$, 绝对速度的增量为

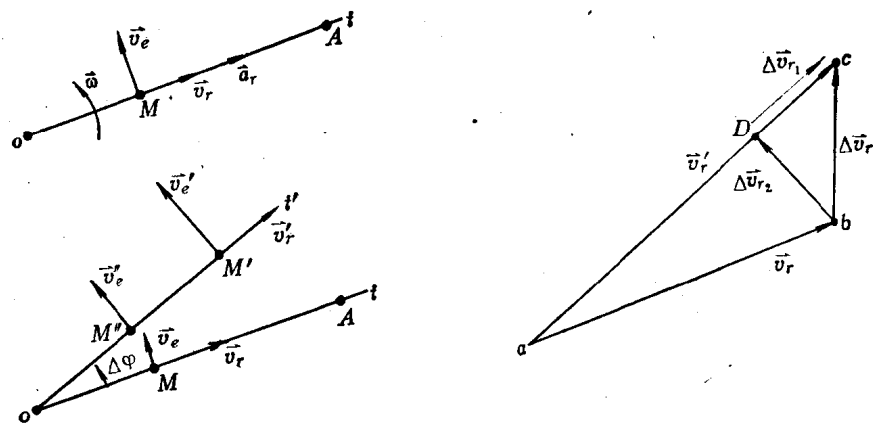


图 2.4 物体在绕定轴转动的直杆上滑动时的速度

$$\vec{v}'_a - \vec{v}_a = (\vec{v}'_e - \vec{v}_e) + (\vec{v}'_r - \vec{v}_r) \quad (2.30)$$

其中

$$\vec{v}'_e - \vec{v}_e = (\vec{v}'_e - \vec{v}''_e) + (\vec{v}''_e - \vec{v}_e)$$

$\vec{v}''_e$ 是瞬时 t 的重合点在瞬时 t' 对静系的速度; $\vec{v}'_e - \vec{v}''_e$ 是牵连速度大小的改变; $\vec{v}''_e - \vec{v}_e$ 是牵连速度方向的改变。

从三角形 $\triangle abc$ 中可看出:

$$\vec{v}'_r - \vec{v}_r = \Delta \vec{v}_r = \Delta \vec{v}_{r1} + \Delta \vec{v}_{r2} \quad (2.31)$$

$\Delta \vec{v}_{r1}$ 为相对速度 $\vec{v}_r$ 大小的改变, $\Delta \vec{v}_{r2}$ 为 v_r 方向的改变。

M 点的绝对加速度 $\vec{a}_a$ 为

$$\vec{a}_a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}'_a - \vec{v}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{r1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{r2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}'_e - \vec{v}''_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}''_e - \vec{v}_e}{\Delta t} \quad (2.32)$$

式中 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{r1}}{\Delta t}$ 是沿 OA 方向, 相对速度 $\vec{v}_r$ 本身大小的变化, 称动点的相对加速度;

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}''_e - \vec{v}_e}{\Delta t}$ 是动点在瞬时 t 的重合点的速度变化, 称牵连加速度;

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{r2}}{\Delta t}$ 是牵连运动为转动时, 相对速度 $\vec{v}_r$ 的方向发生变化所产生的哥氏加速度 (一部分), 其大小为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}_{r2}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \cdot v_r}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} v_r = \omega \cdot v_r$$

其方向垂直于 OA 杆;

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}'_e - \vec{v}''_e}{\Delta t}$ 是由于相对运动的存在, 使牵连速度的大小发生变化所产生的哥氏加速度 (另一部分), 其大小为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\vec{v}'_e - \vec{v}''_e}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(OM - OM'')\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M'M''}{\Delta t} \omega = \omega v_r$$

其方向也垂直于 OA 杆。

因此, 哥氏加速度为

$$a_c = 2\omega v_r \quad (2.33)$$

哥氏加速度 $\vec{a}_c$ 的方向是相对速度 $\vec{v}_r$ 按牵连角速度 (动系的角速度) $\vec{\omega}$ 的转向转过 90° 角的方向。

如果 $\vec{v}_r$ 与 $\vec{\omega}$ 成任意角 α 时, 则

$$a_c = 2v_r\omega \sin \alpha$$

即哥氏加速度等于相对速度 v_r 与牵连角速度的乘积, 再乘上 v_r 与 ω 的夹角的正弦。

有时候, 利用极坐标比直角坐标更为方便, 如第三章中讨论圆管式压电晶体陀螺时就是这样。

动点 M 在瞬时 t 于 A 点的坐标为 $A(r, \theta)$, $\vec{r}$ 为极径, θ 为极角, 如图 2.5 所示。

经过时间 Δt , $t' = t + \Delta t$, 动点 A 的坐标为 $A'(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ 。

设 $\Delta \theta$ 很小时

$$\overrightarrow{BA'} = (\vec{r} + \Delta \vec{r}) \cos \Delta \theta - \vec{r} \approx \Delta \vec{r}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\vec{r} + \Delta \vec{r}) \sin \Delta \theta \approx \vec{r} \Delta \theta$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

径向速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r}$$

切线速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = r \dot{\theta}$$

我们现在来求加速度的表达式。

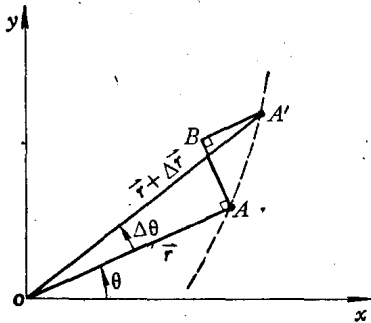


图 2.5 物体在极坐标系中的牵连运动

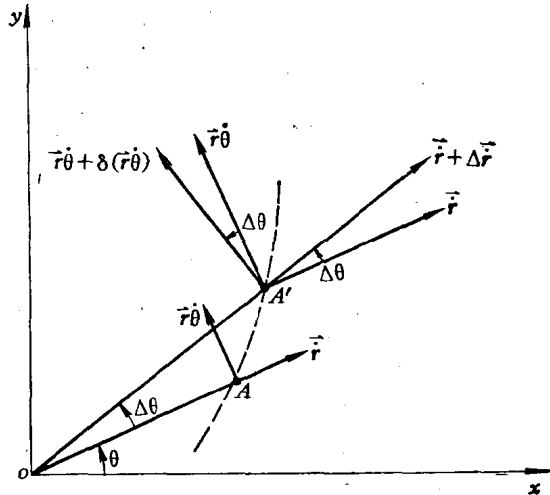


图 2.6 物体在极坐标系中牵连运动的速度和加速度

如图 2.6 所示, 假设 $\Delta \theta$ 很小, 则可得出径向加速度:

$$\therefore (\dot{r} + \Delta \dot{r}) \cos \Delta \theta - [r \dot{\theta} + \Delta(r \dot{\theta})] \sin \Delta \theta - \dot{r} \approx \Delta \dot{r} - r \dot{\theta} \Delta \theta$$

$$\therefore \vec{a}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{r} - r \dot{\theta} \Delta \theta}{\Delta t} = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (2.34)$$

亦可得出切线加速度:

$$\therefore [r \dot{\theta} + \Delta(r \dot{\theta})] \cos \Delta \theta + (\dot{r} + \Delta \dot{r}) \sin \Delta \theta - r \dot{\theta} \approx \Delta(r \dot{\theta}) + \dot{r} \Delta \theta$$

$$\therefore a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(r \dot{\theta}) + \dot{r} \Delta \theta}{\Delta t} = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} \quad (2.35)$$

式中 $r \dot{\theta}^2$ ——向心加速度;

$2\dot{r} \dot{\theta}$ ——哥氏加速度。

利用牛顿力学来分析物体的复杂运动, 主要是研究单独的质点上作用的力与质量的运动之间的关系。

质点, 即一个足够小物体。为了研究的目的, 物体的各个单体之间的距离可以忽略时, 这样的物体就叫做质点。

在力学中, 由质点的运动加速度所产生的力叫惯性力, 惯性力 F 与质点的质量 m 成正比, 与加速度 a 成正比, 方向与加速度 a 的方向相反, 即

$$F = -ma$$

由于哥氏加速度 a_c 的存在, 所构成的力叫哥氏惯性力, 简称哥氏力, 即

$$F_c = -ma_c = -2mv_r\omega \sin \alpha$$

如果利用矢量分析学的符号, 则哥氏力 F_c 可以用矢量 $\vec{v}_r$ 和 $\vec{\omega}$ 的矢积决定:

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$$

移动速度 $\vec{v}_r$ 一般用 $\vec{v}$ 表示, 故 $\vec{F}_c$ 的一般表示式为

$$\vec{F}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

在物体的质量 m 已知的情况下, 计算哥氏力, 主要找出哥氏加速度的大小与方向。

哥氏力的存在能够说明许多地球表面上物体运动的现象。例如, 一列火车在北半球沿子午线向北而行, 如图 2.7 所示。在这种情况下, 相对速度矢量 $\vec{v}$ 与角速度矢量 $\vec{\omega}$ 成一锐角 α , 所以哥氏力 $\vec{F}_c$ 切于地球表面, 方向朝右 (如果脸朝着列车运动的方向)。因此, 列车施于右轨道上的压力比左轨道上的压力大。在南半球上, 当列车向南运动时, $\vec{v}$ 与 $\vec{\omega}$ 成钝角, 在这种情况下, 哥氏力的方向朝左 (相对于列车前进的方向)。此外, 北半球上的河流冲刷右岸, 南半球上的河流冲刷左岸, 自由落下的物体离开竖直线偏向东方, 摆的摆动面偏转及其它种种现象, 都可以由哥氏力的存在来说明。

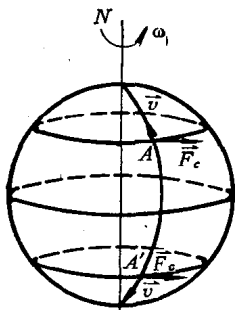


图 2.7 作用在地球表面运动的物体上的哥氏力方向

观察者在旋转的地球上看到的导弹和飞行器的明显偏斜就是由于存在哥氏力的原因。因此, 在计算导弹的弹道时, 必须考虑地球的旋转, 考虑预定通道时要计入热带风暴的影响。

哥氏力的存在可以应用到各种技术方面, 普通陀螺和压电晶体陀螺都是利用这一现象的结果。普通陀螺的工作原理已为人们所熟知, 压电晶体陀螺的工作原理类似于普通陀螺, 图 2.8 示出普通陀螺与压电晶体陀螺之间的关系。

对于普通陀螺, 转矩 $\vec{M}$ 、角动量 $\vec{H}$ 、输入 (或进动) 角速度 $\vec{\omega}$ 之间存在着如下关系:

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{H} \quad (2.36)$$

在典型的弹簧抑制速率陀螺中, 该转矩转换成角位移, 角位移又转换成与输入角速度成比例的电信号。

压电晶体陀螺用线动量 $m\vec{v}$ 代替普通陀螺的角动量 $\vec{H}$, 用 $-\vec{F}_c$ 哥氏力代替转矩 $\vec{M}$ 。因此

$$\vec{F}_c \propto (\vec{\omega} \times m\vec{v}) \quad (2.37)$$

式中 $\vec{\omega}$ 是输入角速度。对于具有线速度而在旋转系统中的粒子运动, 例如振梁式或圆管式

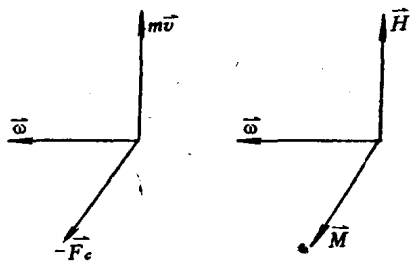


图 2.8 压电晶体陀螺与普通陀螺的类比

右边是弹簧抑制陀螺角速度参数力矩 $\vec{M}$ 、角动量 $\vec{H}$ 和角速度 $\vec{\omega}$; 左边是压电晶体陀螺参数哥氏力 $\vec{F}_c$ 、线性动量 $m\vec{v}$ 和输入角速度 $\vec{\omega}$