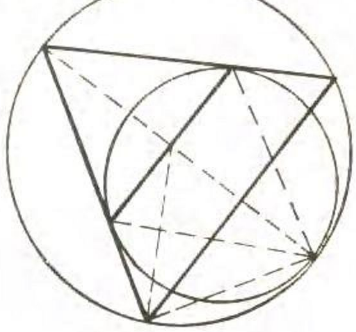
中数学



GUOJISHUXUEJINGSAISHITIJIANGJIE

国际数学竞赛试题讲解

II

湖 北 人 民 出 版 社

国际数学竞赛试题讲解

II

江仁俊　成应璆　蔡训武
梁法驯　樊　恺

湖北人民出版社

国际数学竞赛试题讲解

Ⅱ

江仁俊　成应璟　蔡训武

梁法驯　樊　恺

＊

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　印张13.75　293,000字

1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷

印数：1—42,400

统一书号：7106·1543　定价：1.10元

出版说明

为满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学：《代数解题引导》，《几何解题引导》，《三角解题引导》，《解析几何解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年三月

前　言

本书是对第一届到第十八届国际中学生数学竞赛试题的分析与解答．按《国际数学竞赛试题讲解（Ⅰ）》的体例要求，由江仁俊、成应璪、蔡训武、梁法驯、樊恺等同志合作编写．江仁俊同志负责审．

试题总的看来，知识面较宽，难度较大，综合性较强，技巧性较高，灵活、新颖而且具有趣味性．除少数试题之外，多数试题对数学基础知识的要求较高，内容不仅包括初等数学的各个方面，还涉及到高等数学的一些分支．但利用我国中学生熟悉的数学知识来解，多数题仍能解出，而且还可借以提高分析推理、空间想象、抽象思维以及灵活运用所学知识的能力．

本书和《国际数学竞赛试题讲解Ⅰ》一样，每道试题都分"分析"、"解答"和"附注"三个部分阐述．解答部分除选择了国内外有关资料上的解（证）法外，为了开拓解题思路，我们还充实了一些自己的解（证）法；分析和附注完全是一种尝试，是为了使读者具体窥视出国际数学竞赛的水平，掌握解题思路，了解与试题有关的问题，总结某些带规律性的方法和技巧．

由于我们水平有限，书中定有不妥和错误之处，请同志们批评指正．

编　者

1979年12月

目　录

第一届国际中学生数学竞赛试题分析与解答

1959 年在罗马尼亚举行

第　一　题 (波兰命题)

证明：分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

【分析】 显然，对任何自然数 n, 关于 n 的一次式 $21n+4$、$14n+3$ 皆为正整数，并且 $21n+4>14n+3$, 从而$\frac{21n+4}{14n+3}$表示一系列的假分数.

欲证分数$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约，即证 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素，也就是证其最大公约数

$$(21n+4,\ 14n+3)=1.$$

而两正数是否互素的判别，最大公约数的求法，又可直接利用辗转相除法实现，因此得知本题的一般证法.

此外，如下述的证法三，先设其最大公约数为 d，再证 $d=1$ 亦可.

〈证法一〉 对$\frac{21n+4}{14n+3}$作辗转相除法如下：

1	$21n+4$	$14n+3$	2
	$14n+3$	$14n+2$	
	$7n+1$	1	

由此可知，最后的余数为1，即

$$(21n+4,\ 14n+3)=1,$$

所以分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数n皆不可约.

〈证法二〉 假设$\frac{21n+4}{14n+3}$可约，则因

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3},$$

故$\frac{7n+1}{14n+3}$可约，从而它的倒数$\frac{14n+3}{7n+1}$可约.

类似地，又化假分数$\frac{14n+3}{7n+1}$为带分数：

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1},$$

于是$\frac{1}{7n+1}$亦必可约. 但对任何自然数n，真分数$\frac{1}{7n+1}$显然皆不可约，因此导致矛盾. 证毕.

〈证法三〉 设$21n+4$与$14n+3$的最大公约数为d，则

$$21n+4=pd; \tag{1}$$

$$14n+3=qd, \tag{2}$$

其中p、q皆为正整数.

由(1)、(2)消去n并整理，得

$$(3q-2p)d=1. \tag{3}$$

由于p、q皆为正整数，所以$3q-2p$为整数. 因此，要(3)成立，必须正整数$d=1$. 证毕.

【附注】 1. 辗转相除法又称欧几里德(Euclid)演算法，是求最大公约数的一个切实可行的办法. 证法二在形式上采用了反证，但实质上，是将证法一中辗转相除的过程分段进

行表述．因此，这一类问题，一般都可用辗转相除法解决．

2．记号$(f、g)$表示两个正整数f与g的最大公约数；"f、g互素"与"$(f、g)=1$"等价．对于两个以上的数，记法相同，比如三个数12、18、24的最大公约数是6，即

$$(12，18，24)=6.$$

关于最小公倍数，常以方括号记之．例如12、18、24三个数的最小公倍数是72，即

$$[12，18，24]=72.$$

第　二　题 （罗马尼亚命题）

对于x的哪些实数值，下列等式成立：

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$；

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$；

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$，

这里根式仅表算术根．

【分析】 由题设知，$x\geqslant\frac{1}{2}$是研究问题的前提，否则，二次根号下将出现负值．

在$x\geqslant\frac{1}{2}$的许可值范围内，可以对函数

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

进行讨论得到答案，或按根式方程求解．

由于函数表达式是含有两层根号的复合二次根式，首先考虑化简函数式是必要的．

〈解答〉 将等式左边用y表示，因$x\geqslant\frac{1}{2}$，故可作如下

变形：

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+2\sqrt{2x-1}+1}$$

$$+\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2-2\sqrt{2x-1}+1}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[(\sqrt{2x-1}+1)+|\sqrt{2x-1}-1|].$$

为去绝对值符号，下面分两种情况讨论．

第一，若$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，则有：

$$1\leqslant 2x\leqslant 2,\quad 0\leqslant 2x-1\leqslant 1,\quad 0\leqslant\sqrt{2x-1}\leqslant 1.$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}.$$

第二，若$x>1$，则有：

$$2x>2,\quad 2x-1>1,\quad \sqrt{2x-1}>1.$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}[(\sqrt{2x-1}+1)+\sqrt{2x-1}-1]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

总之，我们得到：

a）当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，等式成立；

b）因为在$x\geqslant\frac{1}{2}$的定义域内，函数y的值不小于$\sqrt{2}$，故对x的任何实数值，等式都不能成立；

c）当$x>1$时，原等式变为：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2,$$

解之，得$x=\frac{3}{2}$．也就是说，当$x=\frac{3}{2}$时，等式成立．

【附注】 1．对这道题，我国的中学生是比较熟悉的．但要注意的是：对于

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0);\\ -a\ (a<0),\end{cases}$$

特别是在a本身的符号未确定的情况下，应该进行讨论，分别写出结果．

2．在化简形如$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$的复合根式，考虑$A\pm\sqrt{B}$能否配成完全平方时，用“拼凑法”观察较为简捷：

第一，$\sqrt{B}$变成$\sqrt{B'}$的2倍；

第二，A变成A_1与A_2的和，并且A_1与A_2的积恰好等于B'．

本题中的函数式$x\pm\sqrt{2x-1}$，就是通过拼凑而配成完全平方的．

第　三　题　（匈牙利命题）

设$\cos x$（实数）满足二次方程

$$a\cos^2x+b\cos x+c=0,$$

其中a、b、c是实数，求$\cos 2x$所满足的一个二次方程．在$a=4$、$b=2$和$c=-1$的情况下，将此二方程进行比较．

【分析】 因为 $\cos x$ 与 $\cos 2x$ 之间存在着关系式（即余弦倍角公式）

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

即

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

故易将题设方程中的 $\cos x$ 用 $\cos 2x$ 表示，变形整理，即可求得所求方程．显然，它的系数也含有 a、b 和 c.

此外，利用根与系数间的关系，也可求出所求的方程．

最后，在指定的情况下，比较两个方程在“结构”上的异同点．

〈解法一〉 将题设方程变形：

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0, \tag{1}$$

$$a\cos^2 x + c = -b\cos x, \tag{2}$$

$(2)^2 \times 4$，并整理得：

$$a^2(2\cos^2 x)^2 + (4ac - 2b^2)\cdot 2\cos^2 x + 4c^2 = 0. \tag{3}$$

将 $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ 代入(3)，得：

$$a^2(\cos 2x + 1)^2 + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0,$$

$$a^2\cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0. \tag{4}$$

显然，(4)是要求的 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程．

将 $a = 4$、$b = 2$ 和 $c = -1$ 代入(1)，得

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0; \tag{5}$$

代入(4)，得

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0. \tag{6}$$

(5)与(6)比较易知：在该种情况下，它们都是系数完全相同的一元二次方程；不过一个是以 $\cos x$ 为元，另一个则以

$\cos 2x$ 为元.

〈解法二〉 根据韦达定理，题设方程两根有如下关系：

$$\cos x_1+\cos x_2=-\frac{b}{a};\ \cos x_1\cos x_2=\frac{c}{a}.$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1+\cos 2x_2&=2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2-1)\\&=2[(\cos x_1+\cos x_2)^2-2\cos x_1\cdot\cos x_2-1]\\&=2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}-1\right]\\&=\frac{-(2a^2+4ac-2b^2)}{a^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1\cdot\cos 2x_2&=(2\cos^2 x_1-1)(2\cos^2 x_2-1)\\&=4(\cos x_1\cdot\cos x_2)^2-2(\cos^2 x_1+\cos^2 x_2)+1\\&=4\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}\right]+1\\&=\frac{a^2+4ac-2b^2+4c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

因此，要求的 $\cos 2x$ 所满足的二次方程为：

$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+a^2+4ac-2b^2+4c^2=0.$$

关于题设方程与所求方程的比较，同解法一.

【附注】 1. 如应用求根公式于题设二次方程，可求 $\cos x_i\,(i=1,2)$；再用余弦二倍角公式，求出相应的 $\cos 2x_i$ 的值；最后展开

$$(\cos 2x-\cos 2x_1)(\cos 2x-\cos 2x_2)=0$$

的左边，并以 $\cos 2x$ 为元进行整理，亦可得到所求的二次方程.

2. 解答本题虽较容易，但它运用了有关代数与三角的基础知识，有一定的综合性，中学生平时练习这类题是必要的。例如把题中的“$\cos x$”换为“$\sin x$”，情况将怎样？请读者考虑。

第　四　题　(匈牙利命题)

试作一直角三角形，其斜边 c 给定，且使 c 边上的中线为二直角边的几何中项。

【分析】 求作的是一直角三角形，因斜边 c 已知，故问题在于确定第三顶（即直角顶）点 c。

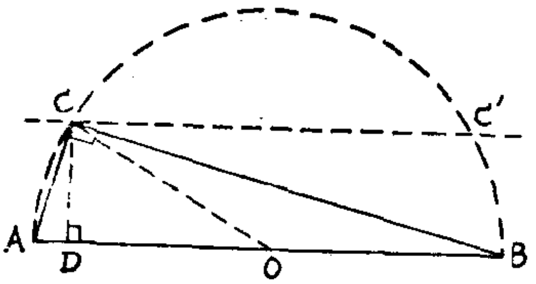


图 1—1

本题解法不止一种，这里着重分析一种作法。

设图已成，即 $Rt\triangle ABC$ 符合要求（如图 1—1 所示），易知 C 点在以 AB（$=c$）为直径的$\odot O$ 的圆周上。为进一步弄清 C 点的确切位置，作斜边 AB 上的中线 $OC\left(=\frac{c}{2}\right)$和高 CD，则

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2=AC\cdot BC,\quad AC\cdot BC=c\cdot CD.$$

所以 $CD=\frac{c}{4}$，即 C 点又在平行于 AB 并与 AB 相距$\frac{c}{4}$的直线 CC' 上。因此，直角三角形的直角顶点就是$\odot O$ 与直线 CC' 的交点。

〈解法一〉 由上面的分析得到如下的作法（图 1—2）：

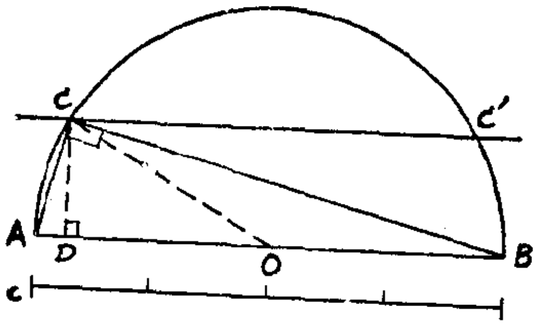


图 1—2

1) 作线段 $\overline{AB}=c$（已知的）；

2) 以 $\overline{AB}$ 为直径作 $\odot O$;

3) 作直线 $CC' \parallel AB$，使 CC' 与 AB 的距离为 $\frac{c}{4}$，CC' 与 $\odot O$ 交于 C、C'；

4) 连 AC、BC（或 AC'、BC'），则 ΔABC（或 $\Delta ABC'$）即为所求.

事实上，由 1)、2)，ΔABC 显然是斜边为 c 的直角三角形；剩下来的，只需证明“$Rt\Delta ABC$ 斜边上的中线为二直角边的几何中项”即可.

连 OC，则 $OC=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}$；又过 C 作 $CD \perp AB$，D 为垂足，则由 3) 知 $CD=\frac{c}{4}$. 于是，我们有：

$$OC^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c}{4}\cdot c=CD\cdot AB=AC\cdot BC.$$

对作图无误的证明至此结束.

〈**解法二**〉 用代数法作图. 在 $Rt\Delta ABC$ 中，斜边 $AB=c$，斜边上的中线 $OC=\frac{c}{2}$ 为已知，设 $AC=t$，$BC=u$（图 1—3），则有

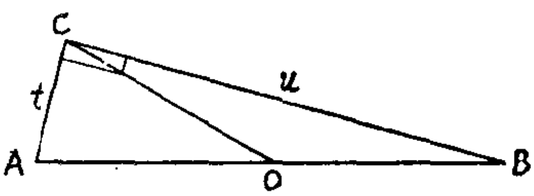


图 1—3

$$\begin{cases} tu=\left(\frac{c}{2}\right)^2; & (1) \\ t^2+u^2=c^2. & (2) \end{cases}$$

(1)·2 + (2)：$(t+u)^2=\frac{3}{2}c^2$；两边开平方取正值，得

$$t+u=\frac{\sqrt{6}}{2}c. \tag{3}$$

(1)、(3)联立，t、u分别是下列一元二次方程的两个根：

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)x+\left(\frac{c}{2}\right)^2=0. \tag{4}$$

显然，(4)有二正实根．因此问题归结为一元二次方程(4)的根的作图，而这是完全可能的(作法见后面附注)．

如果由(1)、(3)，具体算出

$$t(或u)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c=c\cos15°,$$

$$u(或t)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c=c\sin15°,$$

也可先利用代数法，直接作出线段$\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}c$；或者根据角的特别值作出15°角或75°角，从而最后完成斜边为c的直角三角形的作图．

【附注】 1．作图题视题中对于所求图形位置的要求不同而分为两大类：

第一类，如果求作的图形必须作在指定的位置，则称这类作图为定位作图．例如“过已知直线外一已知点作已知直线的平行线”就是定位作图．

第二类，如果对于所求图形的位置没有硬性的限制，这种作图叫活位作图．例如，“在定圆中作内接正方形”、“已知边长作正三角形”等都是活位作图．

按一定方法把作图题所求图形作出的过程，叫做解作图题．凡定位作图，能作出多少个适合条件的图形，就说有多

少个"解"；在活位作图里，若适合条件的图形彼此合同（通俗地说就是全等），则不论能作出多少个都称为一"解"，不合同的才算不同的解．无论哪类作图，当所求图形不存在时，便说这个作图题"无解"．

由此可知，本题作图属活位作图；不仅有解，而且适合条件的图形彼此合同，故为一解．

2．关于一元二次方程的根的作图问题．

设

$$x^2-px+qr=0 \tag{5}$$

（p、q、$r>0$，且 $p^2\geqslant 4qr$）的两根为 x_1 和 x_2，则

$$x_1+x_2=p;\quad x_1x_2=qr.$$

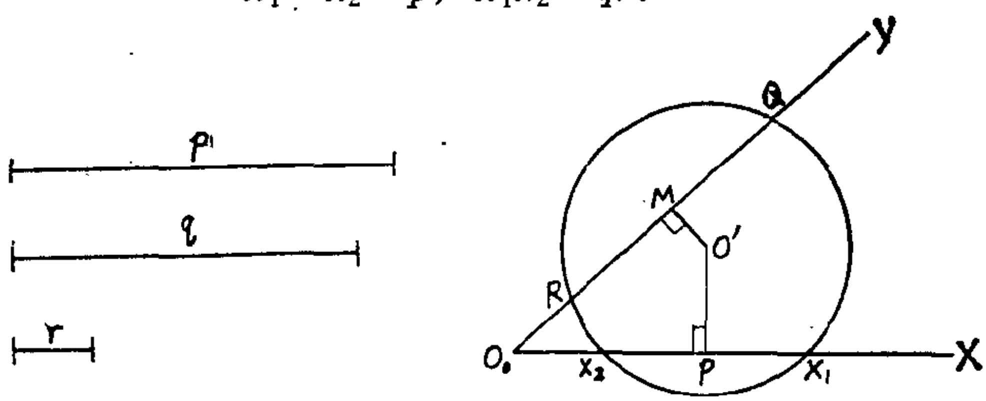


图 1—4

1）自平面上任一点 O_0 引二射线 O_0X 与 O_0Y（图1—4）；

2）在 O_0X 上截 $\overline{O_0P}=\dfrac{1}{2}p$，在 O_0Y 上截取 $\overline{O_0Q}=q$、$\overline{O_0R}=r$；

3）过 P 引 O_0X 的垂线 PO'，作 QR 的中垂线 MO'，O' 为此二线的交点；

4）以 O' 为圆心，$O'Q(=O'R)$ 为半径作 $\odot O'$，设 $\odot O'$ 与 O_0X 交于 X_1 与 X_2 两点，则 $\overline{O_0X_1}$、$\overline{O_0X_2}$ 即为所求的两